Exercice 1 (5 points)

Montrer que la suite $u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \cos x \; dx$ est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 (5 points)

1. Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \; dxdy = 1$. Calculer
$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} f(2x+y, x-y) \; dxdy.$$
2. On désigne par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; \quad x^2+y^2 \leq 1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que
$$I(\alpha) = \iint_D (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}} \; dx \; dy < \infty.$$
Lorsque cette condition est vérifiée, calculer $I(\alpha)$.

Exercice 3 (7 points)

Etant donné deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$, on appelle convolution de f et g la fonction $f * g$, si elle existe, définie par
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t) g(t) \; dt.$$

1. On suppose que f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que la fonction $(y,z) \to f(y)g(z)$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^2)$ (utiliser le théorème de Fubini). En déduire que $f * g$ est définie presque partout et appartient à $L^1(\mathbb{R})$.
2. Calculer et tracer $f * g$ pour $f = g = \chi_{[0,1]}$.
$\chi_E(x)$ désigne la fonction caractéristique d'un ensemble E: $\chi_E(x)$ est égal à 1 si x appartient à E et 0 sinon.
3. Soit f dans $L^1(\mathbb{R})$ et $g = \frac{1}{2h}\chi_{[-h,h]}$, où $h > 0$. Montrer que $f * g$ est continue.

Exercice 4 (3 points)

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \bar{\mathbb{R}}$ une fonction Lebesgue intégrable.

1. Soit a un réel positif et $E_a = \{x; |f(x)| \geq a\}$. Montrer que $m(E_a) < \infty$.
2. Soit $E = \{x \in \mathbb{R}^p, |f(x)| = +\infty\}$. Montrer que E est de mesure nulle.

Exercice 1

On pose $f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos x$. La fonction f_n est mesurable comme produit d'une fonction mesurable $\chi_{[0,n]}$ et d'une fonction continue.
Pour $0 < x < n$, $\ln(f_n(x)) = n\ln\left(1-\frac{x}{n}\right)$ tend vers $-x$ lorsque $n \to \infty$, et donc

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \chi_{[0,\infty[}e^{-x}\cos x$$

De plus, comme $\ln(1+t) \leq t$, pour $t > -1$, on a (avec $t = \frac{x}{n}$)

$$|f_n(x)| \leq \chi_{[0,n]}(x)\left(1-\frac{x}{n}\right)^n \leq \chi_{[0,n]}(x)e^{-x} \leq \chi_{[0,\infty[}e^{-x} = g(x),$$

et $g(x)$ est une fonction intégrable. Le théorème de convergence dominée donne

$$\lim u_n = \int_0^\infty e^{-x}\cos x\ dx = \mathrm{Re}\int_0^\infty e^{-x(1+i)}\ dx = \mathrm{Re}\frac{1}{1+i} = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2

1. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \to (X = 2x+y, Y = x-y)$. C'est un difféomorphisme d'inverse $\Phi : (X,Y) \to (x = \frac{X+Y}{3}, y = \frac{X-2Y}{3})$. Prenons Φ comme changement de variable. La matrice Jacobienne est

$$\text{Jac } \Phi = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

et la valeur absolue du déterminant $|J_\Phi| = \frac{1}{3}$. On a donc

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} f(2x+y, x-y)\ dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(X,Y)|J_\Phi|\ dXdY = \frac{1}{3}.$$

2. On effectue un changement de variable

$$\begin{array}{rrcl} \Phi : &]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \\ & (r,\theta) & \to & (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) \end{array}$$

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\ dx\ dy = \iint_D r^{-\alpha}\ rdr\ d\theta = 2\pi\int_0^1 r^{1-\alpha}\ dr.$$

(Fubini s'applique car la fonction est positive). La fonction $r^{1-\alpha}$ est intégrable sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, i.e. $\alpha < 2$. Dans ce cas,

$$I(\alpha) = 2\pi\left[\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{2-\alpha}.$$

Exercice 3

1. les fonctions f et g étant dans $L^1(\mathbb{R})$, on a
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, dy \right) |g(z)| \, dz = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(y)| \, dy \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |g(z)| \, dz \right) < \infty.$$
D'après le théorème de Fubini (iii), la fonction $(y, z) \to f(y)g(z)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. En faisant le changement de variable $y = x - t$ et $z = t$, on obtient
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(y)g(z) \, dy \, dz = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x-t)g(t) \, dx \, dt < \infty,$$
ce qui montre que la fonction $(x, t) \to f(x-t)g(t)$ est intégrable. Toujours d'après le théorème de Fubini (ii), pour presque tout x, la fonction $t \to f(x-t)g(t)$ est donc intégrable, i.e. $f * g$ est définie p.p. et intégrable ($\int_{\mathbb{R}} f * g(x)dx = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x-t)g(t) \, dx \, dt$).
2. pour $f = g = \chi_{[0,1]}$,
$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}} \chi_{[0,1]}(x-t)\chi_{[0,1]}(t) \, dt = \int_{[0,1]} \chi_{[0,1]}(x-t) \, dt,$$
soit en faisant le changement de variable $s = x - t$
$$f * g(x) = \int_{[x-1,x]} \chi_{[0,1]}(s) \, ds = m([0,1] \cap [x-1, x]).$$
On a donc
$$f * g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$
Les fonctions f et g sont discontinues, mais la convolution est continue.
3. pour $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g = \frac{1}{2h}\chi_{[-h,h]}$, on a
$$f * g(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x-t) \, dt = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(s) \, ds.$$
Comme pour $a \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $y \to \int_a^y f(s) \, ds$ est continue, la fonction $f * g(x)$ est continue.

Exercice 4

1. On a $E_a = f^{-1}([-\infty, -a]) \bigcup f^{-1}([a, \infty])$. La fonction f étant intégrable, elle est mesurable et E_a est la réunion de deux ensembles mesurables et donc mesurable. De plus f est intégrable $\Leftrightarrow |f|$ est intégrable et on a
$$\infty > \int |f(x)| \, dx \geq \int_{E_a} |f(x)| \, dx \geq a \times m(E_a).$$
donc E_a est de mesure finie $(a > 0)$.

2. Par l'absurde: supposons que E ne soit pas de mesure nulle. Alors,

$$\int |f(x)|\, dx \geq \int_E |f(x)|\, dx = \infty \times m(E) = \infty,$$

et f n'est pas intégrable. Donc E est de mesure nulle.