EPU - MAM 3
Mathématiques pour l'ingénieur 1

Examen partiel du 06 Novembre 2009
Durée 2 heures
Aucun document autorisé
Les calculatrices sont interdites

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Ainsi toute justification floue sera considérée comme fausse.

Rappel : Soit X une application de : $\Omega \to \Omega'$. Soient $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ deux tribus de Ω et Ω' respectivement. L'application X est dite mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega', \mathcal{A}')$ si :

$$\forall\, A' \in \mathcal{A}',\ X^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

Exercice 1 (*2 points*)

Montrer que

1) $f \in L^1(\mathbb{R})$ et $g \in L^\infty(\mathbb{R}) \Rightarrow \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

2) $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $g \in L^2(\mathbb{R}) \Rightarrow \|f * g\|_\infty \leq \|f\|_2 \|g\|_2$.

Exercice 2 (*5 points*)

1) Enoncer le théorème de convergence dominée.

2) Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définies sur $I =]0, +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{(\frac{x^5}{n} + x + 1)\sqrt{x}}\ e^{-nx}.$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.

3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_I f_n(x)\ dx$.

Exercice 3 (*6 points*)

On désigne par $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Soit $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}); A = -A\}$ où $-A = \{-x; x \in A\}$.

1) Montrer que $\mathcal{F}$ est une tribu.

2) Caractériser les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont $(\mathbb{R}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables. De même caractériser celles qui sont $(\mathbb{R}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{F})$ mesurables.

3) Applications : On définit deux applications f et g de la manière suivante : $f(x) = e^x$ et $g(x) = x$. Ces applications sont-elles $(\mathbb{R}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurables ? Sont-elles $(\mathbb{R}, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{F})$ mesurables ?

Exercice 4 (*7 points*)

On définit $I = \int_0^\infty e^{-u^2}\, du$.

1) Justifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx\right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\, dy\right)$.

2) Calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\, dxdy$ et en déduire I.

Pour $x \geq 0$, on pose

$$F(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{t^2+1}\, dt.$$

3) Etablir la continuité de F.

4) Montrer que F est dérivable pour $x > 0$ et qu'elle satisfait une équation différentielle d'ordre 1 faisant intervenir I.

5) Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$F(x) = e^x \left(\frac{\pi}{2} - 2I \int_0^{\sqrt{x}} e^{-t^2}\, dt \right).$$

Retrouver la valeur de I calculée à la question 2).

Exercice hors barême

Commenter le dessin suivant