EPU-MAM 1ère année
Mathématiques pour l'ingénieur 1 Examen partiel du 06-11-2006.

Exercice 1

1. Donner l'énoncé du théorème de convergence dominée.

2. On considère la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies par

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } 0 < |x| \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   Examiner le théorème de convergence dominée sur cet exemple.

3. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty e^{-nx} x^{-\frac{1}{2}}\, dx.$$

Exercice 2

1. Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R}^2)$ telle que $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dxdy = 1$. Calculer

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} f(2x+y, x-y)\, dxdy.$$

2. On désigne par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2+y^2 \leq 1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que

$$I(\alpha) = \iint_D (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dx\, dy < \infty.$$

   Lorsque cette condition est vérifiée, calculer $I(\alpha)$.

Exercice 3

1. Pour $t > 0$, montrer que la fonction

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\, dx$$

   est bien définie.

2. Montrer que
$$\Gamma(t) = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2} u^{2t-1}\, du.$$
En utilisant le théorème de Fubini, établir pour $p > 0$ et $q > 0$, la relation
$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q)B(p,q)$$
où $B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\, d\theta$.
3. Calculer $B(1/2, 1/2)$. En déduire la valeur de $\int_0^{\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Exercice 4

Soit f une fonction positive définie sur un ensemble mesurable E et $\alpha > 0$.
Montrer que
$$m\{x \in E,\ f(x) \geq \alpha\} \leq \frac{1}{\alpha}\int_E f\, dm.$$
(utiliser $E = F \cup (E \setminus F)$ où $F = \{x \in E,\ f(x) \geq \alpha\}$ pour minorer l'intégrale)

EPU-MAM 1ère année
Mathématiques pour l'ingénieur 1 — Correction du partiel du 06-11-2006.

Exercice 1

1. cf. cours
2. On a, pour tout x, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$:
en effet, pour tout x tel que $|x| > 0$, il existe $N > 0$ tel que pour tout $n > N$, $1/n < 1/N < |x|$ et donc, pour tout $n > N$, $f_n(x) = 0$. De plus, pour tout n, $f_n(0) = 0$.
Donc $\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = 0$. D'autre part,
$$\int f_n(x)\ dx = 2\int_0^{1/n} 1/|x|\ dx \geq 2\int_0^{1/n} n\ dx = 2$$
et donc $\lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\ dx \geq 2$. Le théorème de convergence dominée ne s'applique pas car la suite f_n n'est pas dominée. La plus petite fonction qui domine les f_n est la fonction $1/|x|$ qui n'est pas intégrable sur $[0,1]$.
3. On pose $f_n(x) = \chi_{[0,\infty]}(x)e^{-nx}x^{-\frac{1}{2}}$. La fonction f_n est mesurable comme produit d'une fonction mesurable $\chi_{[0,\infty]}$ et d'une fonction continue.
Pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.
D'autre part, pour $0 \leq x \leq 1$,
$$|f_n(x)| \leq x^{-\frac{1}{2}},$$
qui est intégrable sur $[0,1]$. Pour $1 < x$,
$$|f_n(x)| \leq e^{-nx} \leq e^{-x},$$
qui est intégrable sur $[1,\infty[$. On pose donc
$$g(x) = \begin{cases} x^{-1/2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$
La fonction $g(x)$ étant intégrable, le théorème de convergence s'applique et on a
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\ dx = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\ dx = 0.$$

Exercice 2

1. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$: $(x,y) \to (X = 2x+y, Y = x-y)$. C'est un difféomorphisme d'inverse $\Phi : (X,Y) \to (x = \frac{X+Y}{3}, y = \frac{X-2Y}{3})$. Prenons Φ comme changement de variable. La matrice Jacobienne est
$$\text{Jac }\Phi = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$
et la valeur absolue du déterminant $|J_\Phi| = \frac{1}{3}$. On a donc
$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} f(2x+y, x-y)\; dxdy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(X,Y)|J_\Phi|\; dXdY = \frac{1}{3}.$$
2. On effectue un changement de variable
$$\begin{array}{rrcl} \Phi : &]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \\ & (r,\theta) & \to & (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) \end{array}$$
$$\iint_D (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\; dx\; dy = \iint_D r^{-\alpha}\; rdr\; d\theta = 2\pi \int_0^1 r^{1-\alpha}\; dr.$$
(Fubini s'applique car la fonction est positive). La fonction $r^{1-\alpha}$ est intégrable sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, i.e. $\alpha < 2$. Dans ce cas,
$$I(\alpha) = 2\pi \left[\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{2-\alpha}.$$

Exercice 3

1. Il faut montrer que la fonction
$$x \to f(t,x) = e^{-x}x^{t-1}$$
est intégrable sur $[0,+\infty]$. Elle est mesurable car continue. Rappelons que x^α a pour primitive $x^{\alpha+1}/(\alpha+1)$ et est donc intégrable sur $[0,1]$ pour $\alpha > -1$ et intégrable sur $[1,\infty]$ pour $\alpha < -1$.
Pour $0 < x < 1$, on
$$f(t,x) < x^{t-1}.$$
La fonction x^{t-1} est intégrable sur $[0,1]$ pour $t > 0$, il en est de même de la fonction $x \to f(t,x)$, d'après la proposition 2.4.1.
Comme $e^{-x/2}x^{t-1} \to 0$ lorsque $x \to \infty$, il existe $M > 0$ tel que pour $x > M$, $f(x,t) \leq e^{-x/2}$. Comme $e^{-x/2}$ est intégrable sur $[M,\infty]$, il en est de même de $x \to f(t,x)$. D'autre part, sur l'intervalle borné $[1,M]$, la fonction $x \to f(x,t)$ est continue donc intégrable.

2. On fait le changement de variable $x = u^2$ d'où $dx = 2u\ du$

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1}\ dx = 2\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2t-1}\ du$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\int_0^\infty e^{-u^2} u^{2p-1}\ du \int_0^\infty e^{-v^2} v^{2q-1}\ dv,$$

et comme la fonction $u \to \chi_{[0,\infty]} e^{-u^2} u^{2t-1}$ est positive, le théorème de Fubini s'applique:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4\iint_D e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1}\ dm,$$

où $D =]0,\infty[\times]0,\infty[$. On effectue maintenant un passage en coordonnées polaires

$$\begin{array}{rrcl} \Phi: & \Omega =]0,+\infty[\times]0,\pi/2[& \to & D =]0,\infty[\times]0,\infty[\\ & (r,\theta) & \to & (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= 4\iint_D e^{-(u^2+v^2)} u^{2p-1} v^{2q-1}\ dm \\ &= 4\iint_\Omega e^{-r^2} (r\ \cos\theta)^{2p-1} (r\ \sin\theta)^{2q-1}\ rdr\ d\theta \\ &= 4\int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1}\ dr \int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1}\ d\theta, \end{aligned}$$

en utilisant à nouveau le théorème de Fubini, la fonction

$$(r,\theta) \to r^{2(p+q)-1} (\cos\theta)^{2p-1} (\sin\theta)^{2q-1}$$

étant positive sur le domaine considéré. On a donc

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p,q).$$

3. $B(1/2,1/2) = 2\int_0^{\pi/2}\ d\theta = \pi$. D'après la question précédente,

$$\Gamma(1/2)^2 = \Gamma(1) B(1/2,1/2).$$

Or $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\ dx = [-e^{-x}]_0^\infty = 1$, donc $\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}$, d'où

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}/2.$$

Exercice 4 On a

$$\int_E f(x)\ dx = \int_F f(x)\ dx + \int_{E\setminus F} f(x)\ dx.$$

Or, sur F, on a $f(x) \geq \alpha$ et donc

$$\int_F f(x)\; dx \geq \alpha \int_F \; dx = \alpha m(F).$$

D'autre part, comme F est positive,

$$\int_{E\setminus F} f(x)\; dx \geq 0.$$

Donc,

$$\int_E f(x)\; dx \geq \alpha m(F).$$