MAM 3
Mathématiques pour l'Ingénieur 1 Partiel du 05-11-2007.

1. Quelle est la mesure de Lebesgue de l'ensemble E des rationnels de $[0,1]$?
   De l'ensemble F des irrationnels de $[0,1]$?
   Soit $f(x)$ la fonction définie sur $[0,1]$, qui vaut 1 pour $x \in E$ et -1 pour $x \in F$.
   Cette fonction est-elle L-intégrable sur $[0,1]$? R-intégrable? Qu'en est-il de $|f|$?

2. Montrer que la fonction $x \to e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ pour tout $t > 0$.
   Vérifier que $I(t) = \int_0^\infty e^{-tx}\,dx$ est indéfiniment dérivable:
   (a) en calculant $I(t)$
   (b) en appliquant le théorème de dérivation d'une intégrale dépendant d'un paramètre.

   En déduire que
   $$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$$

3. (a) Montrer que si f et g sont dans $L^2(I)$, I intervalle de $\mathbb{R}$, le produit fg est intégrable. Donner un exemple où f et g sont dans $L^1(I)$ et fg est non intégrable sur I.
   (b) Montrer que si f et g sont dans $L^1(\mathbb{R})$ alors $h(x,y) = f(x)g(y)$ est dans $L^1(\mathbb{R}^2)$.

4. (a) Pour $p > 0$ et $q > 0$ réels, on pose
   $$B(p,q) = 2\int_0^{\pi/2} (\cos\theta)^{2p-1}(\sin\theta)^{2q-1}\,d\theta.$$
   En effectuant le changement de variable $t = (\cos\theta)^2$, montrer que
   $$B(p,q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt.$$
   En déduire la valeur de
   $$\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t(1-t)}}.$$
   (b) On définit les fonctions
   $$f(t) = \begin{cases} t^{p-1} & \text{si } 0 < t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad g(t) = \begin{cases} t^{q-1} & \text{si } 0 < t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
   Montrer que $f * g$ existe et que $f * g(t) = B(p,q)\,t^{p+q-1}$ pour $t \geq 0$ et $f * g(t) = 0$ pour $t < 0$.

5. Soit $a > 0$ un réel. Montrer que si $f \in L^1(\mathbb{R})$ alors $g_a = \frac{1}{2a}\chi_{[-a,a]} * f$ est continue (on pourra exprimer g_a en fonction de $F(x) = \int_0^x f(s)\,ds$). Que vaut $\lim_{a\to 0} g_a(x)$?
   Montrer que si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ alors g_a est dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et calculer g_a'.