MAM 3
Mathématiques pour l'Ingénieur 1 Partiel du 03-11-2008.

1. Soit $t > 0$. Montrer que la fonction $x \to x^{t-1} e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$ et que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n x^{t-1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx = \Gamma(t).$$

   Montrer que $\Gamma(t)$ est continue sur $]0, +\infty[$.
   Etablir la relation $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$. Calculer $\Gamma(n)$ pour n entier positif.

2. Soit $t > 0$. Montrer que la fonction $x \to e^{-tx} \frac{\sin x}{x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. On pose

$$F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

   Montrer que $F(t)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$. Calculer $F'(t)$.
   Montrer que $\lim_{n\to\infty} F(n) = 0$. En déduire que $F(t) = \frac{\Pi}{2} - \text{Arctan}\, t$.

3. On désigne par $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ le disque unité de $\mathbb{R}^2$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur le réel α pour que

$$I(\alpha) = \iint_D (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dx\, dy < \infty.$$

   Lorsque cette condition est vérifiée, calculer $I(\alpha)$.

4. On considère la fonction triangle $T(t)$ et la fonction porte $\Pi(t)$ définies par

$$T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0,2] \\ t & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 2-t & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases} \quad , \quad \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0,1] \end{cases} \ .$$

   Calculer $\Pi * \Pi$.
   Soit un système LTI (linéaire stationnaire) qui à l'entrée $\Pi(t)$ associe la sortie $T(t)$.
   Quelle est la réponse impulsionnelle de ce système ? Ce système est-il causal ?
   Calculer sa fonction de transfert.

Correction partiel du 03/10/08.

1. Montrons que pour tout $t > 0$ fixé, la fonction $f(x,t) = x^{t-1}e^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$:
   - sur $[0,1]$, $f(x,t) \leq x^{t-1} = 1/x^{1-t}$, avec $1-t < 1$. La fonction $1/x^{1-t}$ est intégrable sur $[0,1]$, il en est de même de la fonction $f(x,t)$ (prop. 2.4.1) **(1 point)**.
   - comme $x^{t-1}e^{-x/2}$ tend vers 0 lorsque x tend vers l'infini, il existe X tel que pour $x > X$, $x^{t-1}e^{-x} < e^{-x/2}$. Sur $[X,\infty]$, $f(x,t)$ est intégrable puisque $e^{-x/2}$ l'est **(1 point)**.
   Sur $[1,X]$, la fonction $x \to f(x,t)$ est continue donc intégrable sur un intervalle borné.
   On pose (le paramètre $t > 0$ est fixé)

$$f_n(x) = x^{t-1}\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x), \quad \textbf{(1 point)}$$

   et on utilise le théorème de convergence dominée :
   1) pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x^{t-1}e^{-x}$ (convergence ponctuelle). En effet, pour tout $n, n > x$ (il le faut pour pouvoir prendre le log), on a

$$\log\left(1 - \frac{x}{n}\right) = -x/n + x/n\,\epsilon(x/n),$$

   avec $\epsilon(h) \to 0$ lorsque $h \to 0$; et donc

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = e^{-x+x\,\epsilon(x/n)},$$

   qui tend bien vers e^{-x} lorsque n tend vers l'infini **(1 point)**.
   2) on a la majoration $|f_n(x)| \leq x^{t-1}e^{-x}, \quad x > 0$
   En effet, pour $x < n$, $\log\left(1 - \frac{x}{n}\right) \leq -x/n$, ce qui implique l'inégalité sur l'intervalle $[0,n]$; sur $[n,\infty]$, $f_n(x)$ est nulle.
   Le théorème de convergence dominée s'applique et on a le résultat **(1 point)**.

   Continuité de $\Gamma(t)$: On utilise la proposition 2.5.2 **(énoncé: 1 point)** avec $I = [a,b] \subset]0,\infty[$:
   1) pour tout $t \in I$, la fonction $x \to f(x,t)$ est continue p.p. donc mesurable
   2) pour presque tout x, la fonction $t \to f(x,t)$ est continue.
   3) pour $t \in [a,b]$
   - si $x > 1$, on a $x^{t-1} < x^{b-1}$, et donc $f(x,t) \leq e^{-x}x^{b-1}$,
   - si $x < 1$, on a $x^{t-1} < x^{a-1}$,et donc $f(x,t) \leq e^{-x}x^{a-1}$.
   On prend donc

$$g(x) = \begin{cases} e^{-x}x^{b-1}, & 0 < x < 1 \\ e^{-x}x^{b-1}, & x \geq 1 \end{cases} \qquad \textbf{(1 point)}$$

La fonction $g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. La fonction $\Gamma(t)$ est continue pour tout $t \in [a,b]$ et donc sur $\mathbb{R}^+$.

$$\Gamma(t+1) = \int_0^\infty x^t e^{-x}\, dx$$

On pose $u(x) = x^t$ et $v'(x) = e^{-x}$. On a donc

$$\Gamma(t+1) = [-x^t e^{-x}]_0^\infty + \int_0^\infty t x^{t-1} e^{-x}\, dx = t\Gamma(t) \quad \textbf{(1 point)}$$

Donc, par récurrence, pour tout $n \geq 1$: $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$, et $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x}\, dx = 1$. Donc $\Gamma(n+1) = n!$ ou $\Gamma(n) = (n-1)!$ **(1 point)**.

2. On pose $f(x,t) = e^{-tx}\frac{\sin x}{x}$ pour $x \geq 0$ et $t > 0$. A t fixé $|f(x,t)| < e^{-tx}$. La fonction $x \to e^{-tx}$ est integrable sur $\mathbb{R}^+$, donc $f(x,t)$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}^+$ **(1/2 point)**.
On applique la proposition 2.3.5 **(énoncé: 1 point)**:
- pour tout $t > 0$, $x \to f(x,t)$ est integrable sur $\mathbb{R}^+$
- pour tout $x > 0$, $t \to f(x,t)$ est continument dérivable :

$$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t} = -xe^{-tx}\frac{\sin x}{x}.$$

- pour $t > a$,

$$|xe^{-tx}\frac{\sin x}{x}| \leq xe^{-ax} = g(x), \quad \textbf{(1 point)}$$

et $g(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
La fonction $F(t)$ est donc dérivable pour tout $t > a > 0$ et on a

$$F'(t) = \int_0^\infty -e^{-tx} \sin x\, dx.$$

Comme $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix})$, et

$$\left(\int_0^\infty -e^{(i-t)x}\, dx\right) = \left[\frac{-e^{(i-t)x}}{(i-t)}\right]_0^\infty = \frac{1}{i-t} = \frac{-i-t}{1+t^2},$$

on a $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$ **(1 point)**.

Pour calculer $\lim_{n\to\infty} F(n)$, on utilise la convergence dominée avec $f_n(x) = e^{-nx}\frac{\sin x}{x}$:
1) pour tout $x > 0$ $\lim_{n\to\infty} e^{-nx}\frac{\sin x}{x} = 0$.
2) pour $n \geq 1$, $|e^{-nx}\frac{\sin x}{x}| < e^{-x}|\frac{\sin x}{x}|$, fonction intégrable d'après ce qui précède.
On a donc $\lim_{n\to\infty} F(n) = 0$ **(1 point)**.

Comme $F'(t) = -\frac{1}{1+t^2}$, $F(t) = -\mathrm{Arctan}\, t + C$ ou C est une constante. Pour déterminer C, on applique la formule pour $t = n$ et on fait tendre n vers l'infimi. Comme $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Arctan}\, n = \frac{\Pi}{2}$, on obtient $C = \frac{\Pi}{2}$ **(1 point)**.

3. On effectue un changement de variable **(1 point)**

$$\begin{array}{rrcl}\Phi: &]0,+\infty[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_- \\ & (r,\theta) & \to & (x = r\cos\theta, y = r\sin\theta)\end{array}$$

$$\iint_D (x^2+y^2)^{-\frac{\alpha}{2}}\, dx\, dy = \iint_D r^{-\alpha}\, rdr\, d\theta = 2\pi \int_0^1 r^{1-\alpha}\, dr.$$

(Fubini s'applique car la fonction est positive). La fonction $r^{1-\alpha}$ est intégrable sur $[0,1]$ si et seulement si $\alpha - 1 < 1$, i.e. $\alpha < 2$ **(1 point)**. Dans ce cas,

$$I(\alpha) = 2\pi \left[\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha}\right]_0^1 = \frac{2\pi}{2-\alpha} \quad \textbf{(1 point)}$$

4. $\Pi * \Pi = T$: cf cours **(1 point)**.

Un système linéaire stationnaire est décrit par un produit de convolution:

$$u(t) \to y(t) = h(t) * u(t),$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système. Comme $T(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, le système de convolution qui à $u(t) = \Pi(t)$ associe $y(t) = T(t)$ a pour réponse impulsionnelle

$$h(t) = \Pi(t) \quad \textbf{(1/2 point)}$$

Ce système est causal puisque $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Sa fonction de transfert $H(s)$ est la transformée de Laplace de $h(t)$:

$$H(s) = \int_0^1 e^{-st}\, dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-s}}{s} \quad \textbf{(1 point)}$$