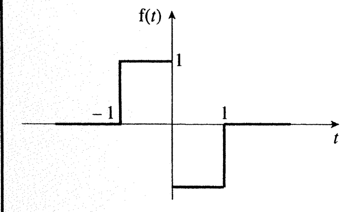
■ SOLUTION

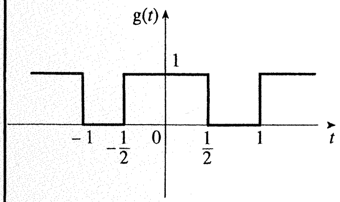
1)



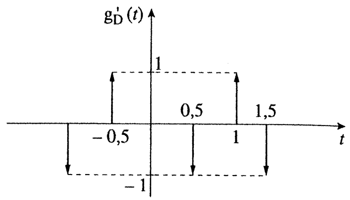
- En tout point t où f est continue, $f'(t) = 0$.
- Au point $t = -1$, la dérivée au sens des distributions est un Dirac d'amplitude 1 centré en –1.
- en $t = 0$, la dérivée est $-2\delta(t)$.
- en $t = 1$, la dérivée est $\delta(t-1)$.

Finalement $f'_D(t) = \delta(t+1) - 2\delta(t) + \delta(t-1)$

2)



fonction g



fonction g'

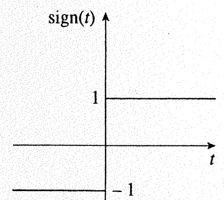
7 Fonction « sign »

On définit la fonction « sign » par $\mathrm{sign}(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t > 0 \\ -1 \text{ si } t < 0 \end{cases}$

1) Représentation graphique de la fonction « sign ».
2) Calculer sa dérivée.
3) Soit f une fonction définie ℝ, continue sur ℝ et F une primitive de f telle que $\lim_{t \to \pm\infty} F(t) = 0$.
Démontrer que $(\mathrm{sign} * f)(t) = 2\,F(t)$.

■ SOLUTION

1)



2) Dérivée : nulle sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, non dérivable en 0.
Au sens des distributions, la dérivée est égale à $2\,\delta(t)$(traduisant ainsi la variation brutale de – 1 à 1 en 0).

3) $(\mathrm{sign} * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{sign}(x)\, f(t-x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} -1\, f(t-x)\, dx + \int_{0}^{+\infty} 1\, f(t-x)\, dx$

Effectuons le changement de variable $t - x = u$:

$$(\mathrm{sign} * f)(t) = \int_{+\infty}^{t} f(u)\, du - \int_{t}^{-\infty} f(u)\, du = F(t) - F(+\infty) - F(-\infty) + F(t) = 2\,F(t)$$

17 TRANSFORMÉE DE FOURIER

Un signal **périodique** se décompose en **série de Fourier**. Ainsi, il apparaît comme une somme d'harmoniques de fréquences $\nu_n = \frac{n}{T}$, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

Ces fréquences ν_n sont des **valeurs isolées** dans ℝ. La représentation graphique des amplitudes des harmoniques en fonction des fréquences ν_n, appelé spectre du signal, est donc une représentation fréquentielle, dans ce cas, un diagramme en bâtons.

Les fréquences présentes dans un signal **non périodique**, ne sont pas isolées. Elles prennent toutes les valeurs d'un intervalle. La décomposition fréquentielle d'un tel signal est possible grâce à **la transformation de Fourier**. La décomposition et la reconstitution se calculent par des intégrales.

Les fonctions considérées dans ce chapitre sont à variable réelle, de carré sommable, (ou encore à énergie finie), c'est-à-dire telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt < \infty$$

DÉFINITIONS – EXEMPLES

1. Transformée de Fourier

On appelle **transformée de Fourier** de f la fonction :

$$F : \nu \to F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2j\pi\nu t}\, dt$$

L'application $\mathcal{F}$ **: f → F est la transformation de Fourier.**

2. Théorème d'inversion

Il est possible de recomposer $f(t)$ à partir de $F(\nu)$; c'est la **transformée de Fourier inverse**.

$$\mathcal{F}^{-1} : F(\nu) \to f(t)$$

En tout point t où **f est continue**, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, e^{2j\pi\nu t}\, d\nu = f(t)\,.$$

En tout point t où **f est discontinue** :

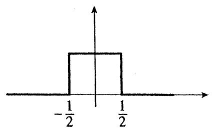
$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, e^{2j\pi\nu t}\, d\nu = \frac{1}{2}\,[f(t^+) + f(t^-)]\,.$$

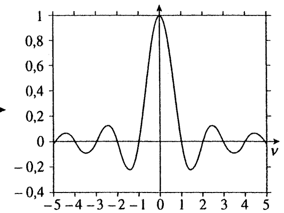
$f(t^+)$ et $f(t^-)$ désignant respectivement les limites à droite et à gauche de f au point t.

3. Exemples fondamentaux

• **Fonction « porte »** (ou fenêtre rectangulaire)

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| < 1/2 \\ 0 \text{ si } |t| > 1/2 \end{cases} \longleftrightarrow F(\nu) = \mathrm{Si}\,(\pi\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

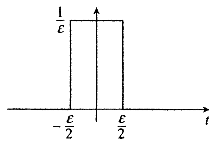


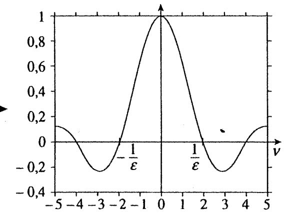


Remarque : la fonction $\mathrm{Si}(x) = \frac{\sin x}{x}$ est appelée sinus cardinal, elle joue un rôle important en analyse harmonique.

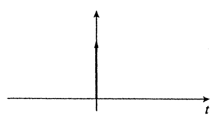
• **Impulsion unité de durée ε**

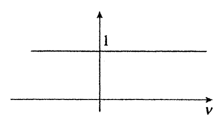
$$\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon \text{ si } |t| < \varepsilon/2 \\ 0 \text{ si } |t| > \varepsilon/2 \end{cases} \longleftrightarrow F(\nu) = \mathrm{Si}\,(\pi\nu\varepsilon) = \frac{\sin(\pi\nu\varepsilon)}{\pi\nu\varepsilon}$$





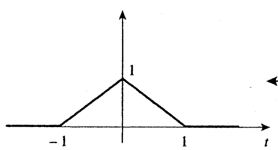
• **Dirac : $\mathcal{F}(\delta) = 1$**

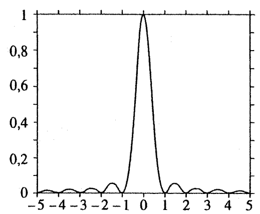




• **Fonction triangle** (ou fenêtre triangulaire)

$$\Lambda(t) = \begin{cases} -t+1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ t+1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases} \longleftrightarrow F(\nu) = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$$





Propriétés de la transformation de Fourier

Signal f(t)	**Transformée de Fourier F(ν)**
Symétrie : F(t)	f(− ν)
Parités : • Si f est paire • Si f est impaire	 • F(ν) est à valeurs réelles et : $F(\nu) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\nu t)\,dt$ • F(ν) est imaginaire pur et : $F(\nu) = 2j\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\nu t)\,dt$
Linéarité : $\lambda f + \mu g$	$\lambda F + \mu G$
Dilatation temporelle : $f(at)$	$\frac{1}{\vert a\vert}F\left(\frac{\nu}{a}\right)$
Décalage temporel = *déphasage fréquentiel* $f(t-a)$	$e^{-2j\pi\nu a}F(\nu)$
Changement affine d'échelle des temps : $f(at-b)$	$\frac{1}{\vert a\vert}F\left(\frac{\nu}{a}\right)e^{-2j\pi\nu b/a}$
Décalage fréquentiel = *déphasage temporel :* $e^{2j\pi at}f(t)$	$F(\nu-a)$
Dérivation temporelle : 1. Si f est dérivable sur R au sens des fonctions $f'(t)$ $f^{(n)}(t)$ 2. Si f est discontinue au point a, la **dérivée de f au sens des distributions est :** $f'_D(t) = f'(t) + (f(a^+) - f(a^-))\,\delta_a$	 $2j\pi\nu F(\nu)$ $(2j\pi\nu)^n F(\nu)$ $2j\pi\nu F(\nu) + (f(a^+) - f(a^-))\,e^{-2j\pi\nu a}$
Dérivation fréquentielle : Si F est dérivable : $(-2j\pi t)\,f(t)$ Produit de convolution : $f*g$	 $F'(\nu)$ $F(\nu).G(\nu)$

SPECTRES

1. Définitions

La transformée de Fourier d'une fonction f est, dans le cas général une fonction **à valeurs complexes** que l'on peut écrire $F(\nu) = A(\nu)\, e^{j\varphi(\nu)}$ avec :

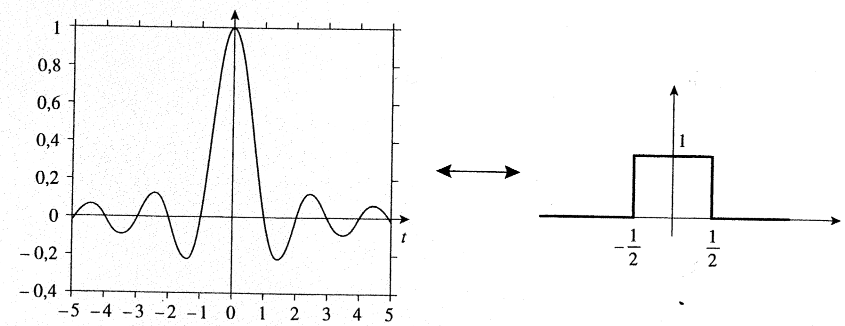
$A(\nu) = |F(\nu)|$: **spectre de module**
$\varphi(\nu) = \arg(F(\nu))$: **spectre de phase**
$A^2(\nu) = |F(\nu)|^2$: **spectre de puissance**

2. Signaux à bande limitée

Un signal $f(t)$ est **à bande limitée** si son spectre de module est à support borné, c'est-à-dire :

$$F(\nu) = 0 \text{ en dehors d'un intervalle } [-\nu_c, \nu_c]$$

Exemple :



$f(t) = \dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$ $\qquad$ $F(\nu) = \Pi(\nu)$

3. Cas des signaux à valeurs réelles

Pour les signaux réels, le spectre de module est une fonction paire. Autrement dit :

$$\forall t \in \mathbb{R},\quad f(t) \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall \nu \in \mathbb{R},\quad |F(\nu)| = |F(-\nu)|$$

4. Le théorème de Parseval

L'énergie d'un signal est conservée par la transformée de Fourier :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\nu)|^2\, d\nu$$

Plus généralement :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \overline{g(t)}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\nu)\, \overline{G(\nu)}\, d\nu$$

UTILISATION DES DISTRIBUTIONS

1. Transformée de Fourier de quelques distributions

Certains signaux qui n'ont pas de transformée de Fourier au sens des fonctions, en ont une au sens des distributions ; citons notamment :

Distributions	Transformées de Fourier
$\delta(t)$	1
$\delta_a(t)$	$e^{-2j\pi\nu a}$
$e^{2j\pi at}$	$\delta_a(\nu)$
$\cos(2\pi at)$	$1/2\,(\delta_a + \delta_{-a})(\nu)$
$\sin(2\pi at)$	$\frac{1}{2j}(\delta_a - \delta_{-a})(\nu)$
$\Psi_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty} e^{j(n/T)2\pi t}$	$\frac{1}{T}\Psi_{1/T}(\nu) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\nu - \frac{n}{T})$

2. Transformée de Fourier des fonctions échantillonnées

Soit $f_e(t) = f(t).\Psi_T(t)$ l'échantillonnage à la période T, de la fonction f :

$$\mathcal{F}(f_e(t)) = F(\nu) * \mathcal{F}(\Psi_T(t))$$
$$\mathcal{F}(f_e(t)) = F(\nu) * \frac{1}{T}\Psi_{1/T}(\nu)$$

Théorème de Shannon : si la fréquence d'échantillonnage d'un signal $f(t)$ est supérieure à 2 fois la fréquence maximale contenue dans ce signal. Alors :

- le spectre du signal échantillonné est périodique de période $\frac{1}{T}$, de motif $\frac{1}{T}F(\nu)$;
- il est possible de reconstituer le signal à partir de ses échantillons. L'opération se fait en utilisant **La formule d'interpolation de Shannon** :

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT_e)\, \frac{\sin \pi f_e(t - nT_e)}{\pi f_e(t - nT_e)}$$

T_e et f_e désignant respectivement la période et la fréquence d'échantillonnage.

3. Transformée de Fourier des fonctions périodiques

Soit $f_P(t) = f_0(t) * \Psi_T(t)$ une fonction périodique de période T, de motif f_0, de transformée de Fourier F_0 :

$$\mathcal{F}(f_P(t)) = F_0(\nu) \times \mathcal{F}(\Psi_T(t))$$
$$\mathcal{F}(f_P(t)) = F_0(\nu) \times \frac{1}{T}\Psi_{1/T}(\nu)$$

La transformée de Fourier est échantillonnée à la période $\frac{1}{T}$, son amplitude est multipliée par $\frac{1}{T}$. On retrouve la série de Fourier de la fonction périodique grâce à la formule de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f_0(x - nT) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} F_0\left(\frac{n}{T}\right)e^{2j\pi n}$$

LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE

Pour le traitement des signaux numériques, on utilise alors **la transformée de Fourier discrète (T.F.D.) :**

1. On prélève N valeurs de la fonction $s(t)$ à intervalles de temps réguliers Δt ; on obtient ainsi une suite : $\{s_0, s_1, s_2, ..., s_{N-1}\}$ avec $s_k = s(k\,\Delta t)$; $0 \le k \le N-1$.

2. On construit une suite : $\{S_0, S_1, S_2, ..., S_{N-1}\}$ définie par :

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n\, e^{-2j\pi nk/N}$$

La transformation : $\{s_0, s_1, s_2, ..., s_{N-1}\} \to \{S_0, S_1, S_2, ..., S_{N-1}\}$ est **la transformation de Fourier discrète.**

Elle est **réversible**, autrement dit : $s_n = \dfrac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k\, e^{2j\pi nk/N}$.

De plus, elle vérifie **la formule de Parseval :**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N-1} |S_k|^2 = N \sum_{n=0}^{N-1} |s_n|^2}$$

La suite S_k constitue un échantillonnage de $S(\nu)$ aux fréquences $\nu = \dfrac{k}{N\Delta t}$ pour seulement **la moitié des valeurs de k.**

Soit pour $k = 1, 2, ...\ \dfrac{N}{2} - 1$ si n est pair (ou $\dfrac{N-1}{2}$ si n est impair) :

$$S_k = S\left(k\,\frac{1}{N\Delta t}\right)\ ;\quad S_{N-k} = S\left(-k\,\frac{1}{N\Delta t}\right)$$

La deuxième moitié de la séquence S_k correspond aux fréquences négatives.

L'algorithme de la F.F.T. permet un calcul rapide de ces coefficients. Il est rendu plus performant si N est une puissance de 2.

EXERCICES

1 Transformée de Fourier de la fonction triangle

La fonction triangle est définie par :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{si } |t| < 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

a) Représenter graphiquement cette fonction et calculer sa transformée de Fourier en utilisant la définition.

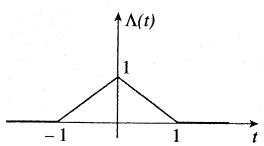
b) Calculer la dérivée de $\Lambda(t)$, lorsqu'elle est définie ; en déduire la transformée de Fourier de $\Lambda(t)$.

c) Sachant que : $\Lambda(t) = (\Pi * \Pi)(t)$, déduire une troisième méthode de calcul de la transformée de Fourier de $\Lambda(t)$.

■ SOLUTION

La fonction « triangle » est définie par :

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Appelons $F(\nu)$ la transformée de Fourier de $\Lambda(t)$.

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Lambda(t)\, e^{-2j\pi\nu t}\, dt = \int_{-1}^{0} (t+1)\, e^{-2j\pi\nu t}\, dt + \int_{0}^{1} (-t+1)\, e^{-2j\pi\nu t}\, dt$$

car la fonction Λ est nulle en dehors de l'intervalle $[-1, 1]$.

Une intégration par parties permet le calcul des deux intégrales. Posons :

$u = t+1 \Rightarrow du = dt$ et $dv = e^{-2j\pi\nu t}\, dt \Rightarrow v = \dfrac{-1}{2j\pi\nu} e^{-2j\pi\nu t}$

puis : $u = -t+1 \Rightarrow du = -dt$

$$F(\nu) = -\frac{1}{2j\pi\nu}\left[(t+1)\, e^{-2j\pi\nu t}\right]_{t=-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{1}{2j\pi\nu}\, e^{-2j\pi\nu t}\, dt$$
$$-\frac{1}{2j\pi\nu}\left[(1-t)\, e^{-2j\pi\nu t}\right]_{t=0}^{1} - \int_{0}^{1} \frac{1}{2j\pi\nu}\, e^{-2j\pi\nu t}\, dt$$

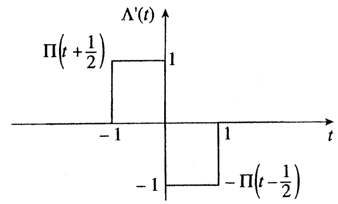
$$F(\nu) = -\frac{1}{2j\pi\nu} - \frac{1}{(2j\pi\nu)^2}\left[e^{-2j\pi\nu t}\right]_{t=-1}^{0} + \frac{1}{2j\pi\nu} + \frac{1}{(2j\pi\nu)^2}\left[e^{-2j\pi\nu t}\right]_{t=0}^{1}$$

$$F(\nu) = \frac{1}{(2j\pi\nu)^2}\left[e^{2j\pi\nu} + e^{-2j\pi\nu} - 2\right] = \frac{1}{(2j\pi\nu)^2}\left[e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}\right]^2$$

$$F(\nu) = \left[\frac{e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}}{2j\pi\nu}\right]^2 = \left[\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right]^2$$

b) Calculons la dérivée de $\Lambda(t)$:

$$\Lambda'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1 < x < 0 \\ -1 & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$



$\Lambda'(t)$ est la somme de deux fonctions « porte » décalées de 1/2 et – 1/2, la première étant de surcroît, inversée. On écrira donc :

$$\Lambda'(t) = \Pi(t + 1/2) - \Pi(t - 1/2)$$

Sachant que la transformée de Fourier de la fonction $\Pi(t)$ est $\dfrac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$ et compte tenu du théorème sur la transformée de Fourier des fonctions translatées :

$$\mathcal{F}(\Pi(t+1/2)) = e^{2j\pi\nu 1/2}\,\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu} \quad \text{et} \quad \mathcal{F}(\Pi(t-1/2)) = e^{-2j\pi\nu 1/2}\,\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

La linéarité de la transformation amène :

$$\mathcal{F}(\Lambda'(t)) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\left[e^{j\pi\nu} - e^{-j\pi\nu}\right] = 2j\,\frac{(\sin(\pi\nu))^2}{\pi\nu}$$

Par ailleurs le théorème sur la transformée de Fourier d'une dérivée donne :

$$\mathcal{F}(\Lambda'(t)) = 2j\pi\nu\,\mathcal{F}(\Lambda(t)) \quad \text{donc : } 2j\pi\nu\,\mathcal{F}(\Lambda) = 2j\,\frac{(\sin(\pi\nu))^2}{\pi\nu}$$

On retrouve bien :

$$\mathcal{F}(\Lambda) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$$

c) La transformée d'un produit de convolution est le produit des transformées, en particulier :

$$\mathcal{F}(\Lambda) = \mathcal{F}(\Pi)\,.\,\mathcal{F}(\Pi) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$$

2 Décalage et dilatation temporelle

Calculer les transformées de Fourier des fonctions suivantes :

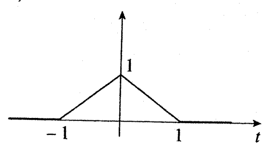
a) $\Lambda(t-1)$;

b) $\Lambda(t/2)$;

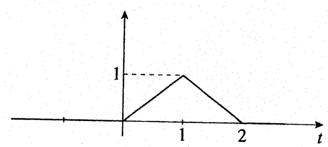
c) $\Lambda((t-1)/2)$

■ SOLUTION

a)



$\Lambda(t)$

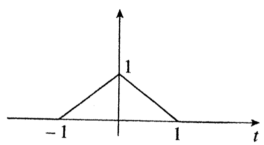


$\Lambda(t-1)$

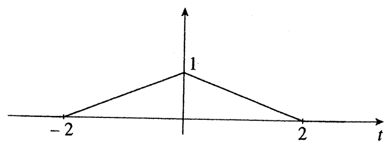
$$\mathcal{F}(f(t-a)) = F(\nu)\,.\,e^{-2j\pi\nu a}$$

Ici : $f(t) = \Lambda(t)$ donc $F(\nu) = \left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$ et $\mathcal{F}(\Lambda(t-1)) = e^{-2j\pi\nu}\left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right)^2$

b)



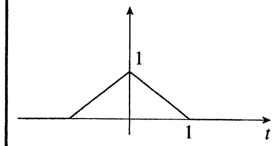
$\Lambda(t)$



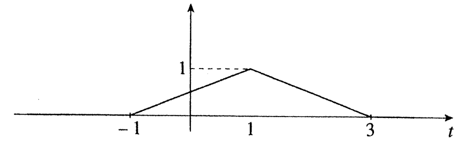
$\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)$

$\mathcal{F}\left(f\left(\frac{t}{a}\right)\right) = a\,F(a\nu)$; avec $a = 2$ on obtient : $\mathcal{F}\left(\Lambda\left(\frac{t}{2}\right)\right) = 2\left(\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}\right)^2$

c)



$\Lambda(t)$



$\Lambda\left(\frac{t-1}{2}\right)$

On passe de $\Lambda(t)$ à $\Lambda\left(\frac{t-1}{2}\right)$ par une transformation affine de l'échelle des temps.

Sachant que :

$$\mathcal{F}(f(at+b)) = \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\nu}{a}\right)e^{-2j\pi\nu(b/a)}$$

avec $a = 1/2$ et $b = 1/2$, on obtient : $\mathcal{F}\left(\Lambda\left(\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\right)\right) = 2\left(\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}\right)^2 e^{-2j\pi\nu}$

3 Somme d'une porte et d'un triangle

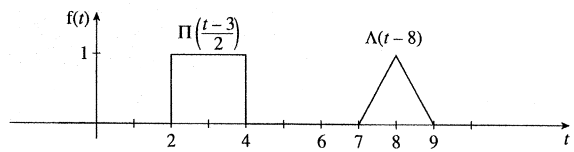
Soit f la fonction définie par :

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2 < t < 4 \\ t-7 & \text{si } 7 < t < 8 \\ -t+9 & \text{si } 8 < t < 9 \\ 0 & \text{autrement} \end{cases}$$

Exprimer f à l'aide de la fonction « porte Π » et de la fonction $\Lambda(t)$, puis calculer sa transformée de Fourier.

■ SOLUTION

Représentation graphique de la fonction f :



f est la somme d'une fonction « porte » décalée de 3 puis dilatée de 2 : $\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)$ et d'une fonction « triangle » décalée de 8 : $\Lambda(t-8)$.

Écrivons :

$$f(t) = \Pi\left(\frac{t-3}{2}\right) + \Lambda(t-8)$$

$$\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)\right) + \mathcal{F}(\Lambda(t-8))$$

$$\mathcal{F}(\Pi) = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \quad \text{donc : } \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{t-3}{2}\right)\right) = 2\,e^{-2j\pi\nu.3}\,\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}$$

D'autre part :

$$\mathcal{F}(\Lambda) = \left[\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right]^2 \quad \text{donc : } \mathcal{F}(\Lambda(t-8)) = e^{-16j\pi\nu}\left[\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right]^2$$

Au total :

$$\boxed{\mathcal{F}(f) = F(\nu) = 2\, e^{-6\pi\nu}\,\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu} + e^{-16j\pi\nu}\left[\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right]^2}$$

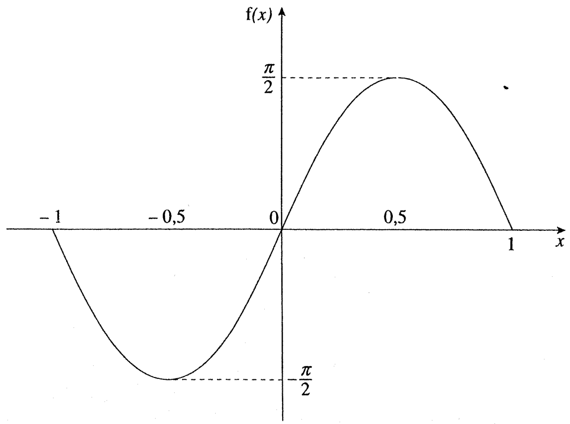
4 Dérivation fréquentielle

Représenter graphiquement la fonction : $f(x) = 2\,\pi x\,\Lambda(x)$ et calculer sa transformée de Fourier.

■ SOLUTION

$$f(x) = 2\pi x\,\Lambda(x) = \begin{cases} 2\pi x(1+x) & \text{si } -1 < x < 0 \\ 2\pi x(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

Ce qui nous donne la représentation graphique suivante :



On utilise, pour le calcul de $\mathcal{F}(f)$, la transformée de Fourier de la fonction Λ ainsi que le théorème sur la dérivation fréquentielle.

$$\mathcal{F}(\Lambda(x)) = F(\nu) = \left[\frac{\sin \pi \nu}{\pi \nu}\right]^2$$

et :

$$\mathcal{F}(-2j\pi x\,\Lambda(x)) = F'(\nu)$$

d'où :

$$\mathcal{F}(2\pi x\,\Lambda(x)) = -\frac{1}{j}\,F'(\nu) = jF'(\nu)$$

$$\mathcal{F}(f(x)) = 2j\left[\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right]\left[\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right]' = 2j\left[\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right]\left[\frac{\cos \pi\nu}{\nu} - \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu^2}\right]$$

5 Transformée de Fourier de distributions

Calculer les transformées de Fourier des distributions suivantes :

a) $f(x) = e^{6j\pi x}$

b) $g(x) = \cos(2\pi x)$

c) $h(x) = 1/2\,[\delta(x-1) + \delta(x-1/2) + \delta(x+1) + \delta(x+1/2)]$

d) $\text{sign}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

■ SOLUTION

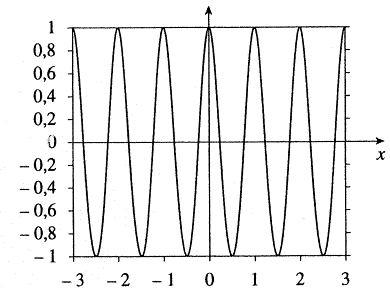
a) La propriété de symétrie de la transformation de Fourier est ici d'une grande utilité. Rappelons-la : si : $\mathcal{F}(f(x)) = F(\nu)$ alors : $\mathcal{F}(F(x)) = f(-\nu)$

Sachant que $\mathcal{F}(\delta) = 1$, on a : $\mathcal{F}(1) = \delta(\nu)$.

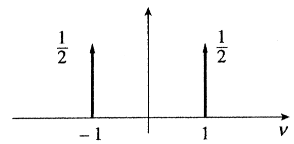
Le théorème sur le décalage fréquentiel nous donne :

$$\mathcal{F}(e^{6j\pi t}\,.\,1) = \delta(\nu - 3), \text{ Dirac centré en 3}$$

b) $\cos(2\pi x) = 1/2\,[e^{2j\pi x} + e^{-2j\pi x}] \Rightarrow \mathcal{F}(\cos 2\pi x) = 1/2\,[\mathcal{F}(e^{2j\pi x}) + \mathcal{F}(e^{-2j\pi x})]$
$= 1/2\,[\delta(\nu-1) + \delta(\nu+1)]$



cos(2πx)



$\frac{1}{2}\,[\delta(\nu-1) + \delta(\nu+1)]$

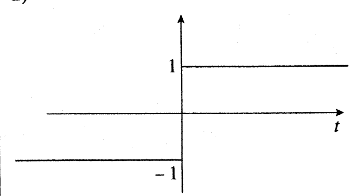
c) La transformée de Fourier de la fonction h s'obtient à partir de la transformée de Fourier de l'impulsion de Dirac : $\mathcal{F}(\delta) = 1$ et en utilisant le théorème sur le décalage temporel :

$\mathcal{F}(\delta(x-1)) = e^{-2j\pi\nu}\,.\,F(\delta) = e^{-2j\pi\nu}$ $\qquad \mathcal{F}(\delta(x+1/2)) = e^{j\pi\nu}$

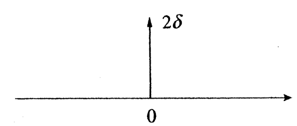
$\mathcal{F}(\delta(x-1/2)) = e^{-j\pi\nu}$ $\qquad \mathcal{F}(\delta(x+1)) = e^{2j\pi\nu}$

d'où : $\quad \mathcal{F}(h)\,(\nu) = 1/2\,[e^{2j\pi\nu} + e^{-2j\pi\nu} + e^{j\pi\nu} + e^{-j\pi\nu}] = \cos 2\pi\nu + \cos \pi\nu$

d)



fonction sign



dérivée au sens des distributions de la fonction sign

Posons $F(\nu) = \mathcal{F}(\text{sign})(\nu)$.

$$[\text{sign}(t)]' = 2\delta(t) \Rightarrow \mathcal{F}(\text{sign}'(t)) = \mathcal{F}(2\delta) = 2$$

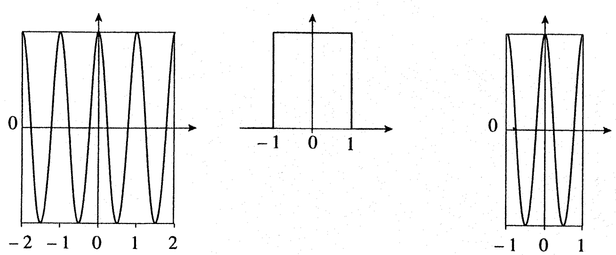
Or : $\mathcal{F}(\text{sign}'(t)) = 2j\pi\nu\,\mathcal{F}(\text{sign}(t)) = 2 \quad \Rightarrow F(\text{sign}) = \dfrac{1}{j\pi\nu}$

6 Fenêtre rectangulaire

Observer un signal sur une durée finie T revient à considérer le produit de ce signal par une porte de largeur T : $\Pi\left(\frac{x}{T}\right)$. C'est un filtrage temporel. Il en résulte des modifications sur la représentation fréquentielle.

Représenter la fonction : $f(x) = \cos(2\pi x)\ \Pi\left(\frac{x}{T}\right)$, puis calculer sa transformée de Fourier. Comparer avec la transformée de Fourier de $\cos(2\pi x)$ calculée dans l'exercice précédent.

■ SOLUTION



$\cos(2\pi x)$ × $\Pi(x/2)$ = $\cos(2\pi x).\ \Pi\left(\frac{x}{2}\right)$

La transformée de Fourier d'un produit est un produit de convolution.

$$\mathcal{F}[\cos(2\pi x)\ .\ \Pi\left(\frac{x}{2}\right)] = \mathcal{F}(\cos 2\pi x) * \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

D'après l'exercice précédent :

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi x))(\nu) = 1/2\,[\delta(\nu-1) + \delta(\nu+1)] \ \text{ et } \ \mathcal{F}\left(\Pi\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 2\,\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}$$

Par conséquent :

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi x)\ .\ \Pi\left(\frac{x}{2}\right)) = 1/2\,[\delta(\nu-1) + \delta(\nu+1)] * 2\,\frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}$$

Le produit de convolution est distributif sur l'addition. On peut donc écrire :

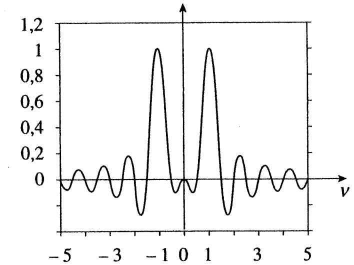
$$\mathcal{F}(\cos(2\pi x)\ .\ \Pi\left(\frac{x}{2}\right)) = [\delta(\nu-1) * \frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}] + [\delta(\nu+1) * \frac{\sin 2\pi\nu}{2\pi\nu}]$$

Le produit de convolution d'une fonction par une impulsion de Dirac décalée de ν_0, translate cette fonction de ν_0 ; on a donc :

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi x)\ .\ \Pi\left(\frac{x}{2}\right)) = \frac{\sin 2\pi(\nu-1)}{2\pi(\nu-1)} + \frac{\sin 2\pi(\nu+1)}{2\pi(\nu+1)}$$

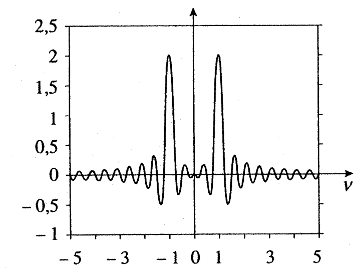
On obtiendra, deux lobes de sinus cardinal centrés sur – 1 et 1, comme le montre la figure ci-dessous :

$\mathcal{F}(\cos(2\pi x).\pi\left(\frac{x}{2}\right))$



Remarque : En multipliant par une porte plus large (par exemple $\Pi\left(\frac{x}{4}\right)$), les oscillations se resserrent. À la limite, on obtient les deux raies caractérisant le spectre de $\cos(2\pi x)$. Les amplitudes des deux lobes augmentent pour tendre vers des Dirac.

$$\mathcal{F}(\cos(2\pi x).\pi\left(\frac{x}{4}\right)) = 2\left[\frac{\sin 4\pi(\nu-1)}{4\pi(\nu-1)} + \frac{\sin 4\pi(\nu+1)}{4\pi(\nu+1)}\right]$$



7 Symétrie de la transformée de Fourier

a) Démontrer que : $\mathcal{F}(f(x)) = F(\nu) \Rightarrow \mathcal{F}(F(x)) = f(-\nu)$

b) Calculer la transformée de Fourier de : $F(x) = \left[\dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x}\right]^2$

c) En déduire la valeur de l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cos t\, dt$

■ SOLUTION

a) De la définition de $\mathcal{F}^{-1}(F) = f$: $\quad f(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)\, e^{2j\pi\mu x}\, d\mu$

Changeons x en ν : $\quad f(\nu) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} F(\mu)\, e^{2j\pi\mu\nu}\, d\mu$

Changeons μ en x : $$f(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{2j\pi x\nu}\, dx$$

Cette égalité est valable, quel que soit ν. En particulier en $-\nu$:

$$f(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{2j\pi(-\nu)x}\, dx\,; \quad f(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{-2j\pi\nu x}\, dx = \mathcal{F}^{-1}(F)(\nu)$$

donc : $$\mathcal{F}(F(x)) = f(-\nu))$$

b) La fonction $F(\nu) = \left[\dfrac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right]^2$ est la transformée de Fourier de la fonction :

$$\Lambda(x) = \begin{cases} -|x| + 1 & \text{si } x \in [-1, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

D'après ce qui précède, et compte tenu du fait que la fonction Λ est paire :

$$\mathcal{F}\left[\left(\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right)^2\right] = \Lambda(-\nu) = \Lambda(\nu)$$

c) Cette dernière égalité, ainsi que l'expression de la transformée de Fourier inverse d'une fonction paire nous amènent le résultat suivant :

$$\Lambda(\nu) = 2\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]^2 \cos(2\pi\nu x)\, dx$$

en particulier, pour $\nu = 1/2$, $\Lambda(1/2) = 1/2$.

Donc : $$2\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]^2 \cos \pi x\, dx = 1/2$$

soit : $$\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin \pi x}{\pi x}\right]^2 \cos \pi x\, dx = 1/4\,.$$

Le changement de variable : $t = \pi x\,;\ dt = \pi\, dx$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0 \ \text{ et } \ x = +\infty \Rightarrow t = +\infty$$

donne, $$\frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} \left[\frac{\sin t}{t}\right]^2 \cos t\, dt = 1/4$$

On obtient finalement :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 \cos t\, dt = \pi / 4$$

8 Spectre de module d'une fonction réelle

Démontrer que le spectre de module d'une fonction réelle, est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

■ SOLUTION

Il s'agit de démontrer que la fonction $|F|$ est paire, $F(\nu)$ désignant la transformée de Fourier de $f(t)$. Comparons $F(\nu)$ et $F(-\nu)$ en utilisant la définition de la transformée de Fourier :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2j\pi\nu x}\, dx$$

Prenons la quantité conjuguée des deux membres et utilisons le fait que f est une fonction réelle, c'est-à-dire $\bar{f} = f$:

$$\overline{F(\nu)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2j\pi\nu x}\, dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\,\overline{e^{-2j\pi\nu x}}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{2j\pi\nu x}\, dx$$

D'autre part :

$$F(-\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2j\pi(-\nu)x}\, dx = \overline{F(\nu)}$$

Enfin : $$|F(\nu)| = |\overline{F(\nu)}| = |F(-\nu)|\,.$$

La fonction $|F|$ est paire, son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

9 Transformée de Fourier d'une fonction périodique

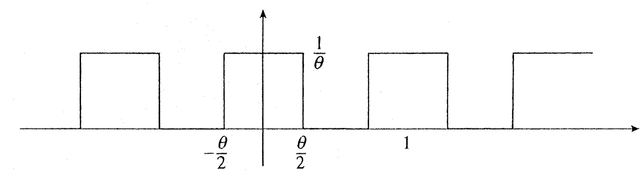
Déterminer le spectre du signal carré d'amplitude $1/\theta$, de durée θ, de période $T = 1$.

a) En calculant les coefficients de Fourier.

b) En calculant la transformée de Fourier.

■ SOLUTION

La représentation temporelle de ce train d'impulsions est la suivante :



L'impulsion de durée θ : $\Pi_\theta(x) = \begin{cases} 1/\theta & \text{si } -\theta/2 < x < \theta/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ en est le motif.

a) Calcul des coefficients de Fourier :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} \Pi_\theta(x)\, e^{-jn\omega x}\, dx = \int_{-\theta/2}^{\theta/2} \frac{1}{\theta}\, e^{-2\pi jnx}\, dx$$

$$c_n = -\frac{1}{2jn\pi\theta}\left[e^{-jn\pi\theta} - e^{jn\pi\theta}\right] = \frac{\sin(n\pi\theta)}{n\pi\theta}$$

b) La transformée de Fourier de $\Pi_\theta(x)$ est $F_0(\nu) = \dfrac{\sin(\pi\nu\theta)}{\pi\nu\theta}$.

$$F(\nu) = F_0(\nu)\,.\,\Psi_1(\nu) = F_0(\nu)\sum_{n=0}^{\infty} \delta(\nu - n) = \sum_{n=0}^{\infty} F_0(\nu)\,\delta(\nu - n)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} F_0(n)\delta(\nu - n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(\pi n\theta)}{\pi n\theta}\,\delta(\nu - n)$$

10 Propriétés de symétrie

a) Soit $F(\nu)$ la transformée de Fourier de $f(t)$, démontrer que la transformée de Fourier de $\overline{f(t)}$ est $\overline{F(-\nu)}$

b) En déduire que la transformée de Fourier d'une fonction réelle et paire est une fonction réelle et paire, puis que la transformée de Fourier d'une fonction réelle et impaire est imaginaire pur et impaire.

c) En utilisant ces propriétés, démontrer : $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$

■ SOLUTION

a) Soit $f(x)$ une fonction à valeurs complexes et $F(\nu)$ sa transformée de Fourier :

$$\mathcal{F}(\bar{f})(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)}\, e^{-2j\pi\nu x}\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f(x)\, e^{2j\pi\nu x}}\,dx$$

$$= \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2j\pi(-\nu)x}\,dx} = \overline{F(-\nu)}$$

b) La fonction $F(\nu)$ s'écrit :

$$\left.\begin{aligned} F(\nu) &= A(\nu) + j\,B(\nu) \\ \text{donc : } \overline{F(-\nu)} &= A(-\nu) - j\,B(-\nu) \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Nous avons démontré précédemment que :

si : $\mathcal{F}(f) = F(\nu)$ alors $\mathcal{F}(\bar{f}) = \overline{F(-\nu)}$

Si f est réelle, $f = \bar{f}$ donc : $\mathcal{F}(f) = \mathcal{F}(\bar{f})$ et par conséquent : $F(\nu) = \overline{F(-\nu)}$

D'après les égalités (1) : $A(\nu) + j\,B(\nu) = A(-\nu) - j\,B(-\nu)$

donc, en identifiant parties réelles et parties imaginaires :

$$\begin{cases} A(\nu) = A(-\nu) : \text{la partie réelle est paire} \\ B(\nu) = -B(-\nu) : \text{la partie imaginaire est impaire} \end{cases}$$

D'autre part :

$$F(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2j\pi\nu x}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos(2\pi\nu x)\,dx}_{A(\nu)} + j\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin(2\pi\nu x)\,dx}_{B(\nu)}$$

$$F(\nu) = A(\nu) + j\,B(\nu)$$

- Si f est paire, alors $B(\nu) = 0$ et $F(\nu) = A(\nu)$ qui est bien une fonction réelle et paire.
- Si f est impaire, alors $A(\nu) = 0$ et $F(\nu) = i\,B(\nu)$ qui est bien une fonction impaire et imaginaire pure.

c) On sait que $\mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\right) = \Pi(-t) = \Pi(t)$ (car la fonction « porte » est paire).

D'après la définition de $\mathcal{F}^{-1}$:

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[: \ \Pi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\, e^{2j\pi\nu t}\,d\nu$$

La fonction $\frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}$ est réelle et paire, l'intégrale se ramène à un cosinus :

$$\forall t \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right[: \ \Pi(t) = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu} \cos(2\pi\nu t)\,d\nu$$

En particulier pour $t = 0$:

$$\Pi(0) = 1 = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}\,d\nu$$

Effectuons le changement de variable $\pi\nu = x$:

$$1 = 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\frac{1}{\pi}\,dx$$

d'où :

$$\boxed{\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx}$$

11 Propriétés de la distribution de Dirac

1) En utilisant la transformée de Fourier, démontrer les relations suivantes :

a) $f(t)\,.\,\delta(t-a) = f(a)\,\delta(t-a)$

b) $f(t) * \delta(t-a) = f(t-a)$

2) En déduire l'expression du produit de f par un peigne de Dirac de période T, puis celle de leur produit de convolution.

■ SOLUTION

1.a) $G(\nu) = \mathcal{F}(f(t)\,.\,\delta(t-a)) = \mathcal{F}(f(t)) * \mathcal{F}(\delta(t-a)) = F(\nu) * e^{-2j\pi\nu a}$

Exprimons ce produit de convolution par l'intégrale qui le définit :

$$G(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{-2j\pi a(\nu - x)}\,dx = e^{-2j\pi\nu a}\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{2j\pi a x}\,dx$$

Par ailleurs, $\mathcal{F}(f(t)) = F(\nu)$ ou bien $\mathcal{F}^{-1}(F(\nu)) = f(t)$ se traduit par :

$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{2j\pi t x}\,dx$ en tout point t où f est continue. En particulier, en $t = a$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x)\, e^{2j\pi a x}\,dx = f(a)$$

Finalement, $G(\nu) = \mathcal{F}(f(t)\,.\,\delta(t-a)) = f(a)\, e^{-2j\pi\nu a}$

En prenant la transformée inverse :

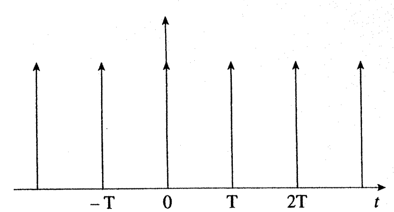
$$f(t)\,.\,\delta(t-a) = \mathcal{F}^{-1}(f(a)\, e^{-2j\pi\nu a}) = f(a)\,\mathcal{F}^{-1}(e^{-2j\pi\nu a}) = f(a)\,\delta(t-a)$$

b) Là aussi nous travaillons sur les transformées de Fourier, puis retour à l'original par la transformée inverse.

$$\mathcal{F}(f(t) * \delta(t-a)) = \mathcal{F}(f(t))\,.\,\mathcal{F}(\delta(t-a)) = F(\nu)\,.\,e^{-2j\pi\nu a}$$

D'où : $f(t) * \delta(t-a) = \mathcal{F}^{-1}(F(\nu)\,.\,e^{-2j\pi\nu a}) = f(t-a)$

2) Le peigne de Dirac de période T est une somme de Dirac décalés de T, comme le montre la figure ci-contre.



$$\Psi_T(t) = \delta(t) + \delta(t-T) + \delta(t-2T) + \dots \quad \Psi_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

$$f(t)\,.\,\Psi_T(t) = f(t)\,.\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t)\,\delta(t-nT)$$

D'après la question **a)** : $f(t)\,.\,\delta(t-nT) = f(nT)\,\delta(t-nT)$

$$f(t)\,.\,\Psi_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(nT)\,\delta(t-nT)$$

Cette somme permet d'exprimer la distribution qui résulte de l'échantillonnage d'une fonction f à la période T.

Calcul de $f(t) * \Psi_T(t)$:

$$f(t) * \Psi_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t) * \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t-nT)$$

$f(t) * \Psi_T(t)$ est la somme de fonctions $f(t)$ décalées de T, 2T, 3T, etc.

12 Signal analytique associé à un signal réel – Transformée de Hilbert

Le spectre d'un signal $x(t)$ contient en théorie des fréquences négatives. On cherche à modifier le signal pour n'obtenir que la partie du spectre correspondant aux fréquences positives.

Soit $x(t)$ un signal réel et $X(\nu)$ sa transformée de Fourier.

a) Soit : $z(t)$ le signal complexe défini par sa transformée de Fourier :

$$Z(\nu) = X(\nu) + X(\nu)\,\mathrm{Sign}(\nu)$$

(La fonction sign est traitée dans l'exercice 5.)

Montrer que $Z(\nu)$ ne contient que des fréquences positives.

b) Calculer $z(t)$ transformée de Fourier inverse de $Z(\nu)$. Quelle est sa partie réelle ?

c) On définit la transformée de Hilbert (T.H.) du signal $x(t)$ par :

$$\text{T.H.}\,(x(t)) = x(t) * \frac{1}{\pi t}$$

En utilisant la propriété de symétrie de la transformée de Fourier, démontrer que :

$$\mathcal{F}(\text{T.H.}\,(x(t))) = -\,\mathrm{j}X(\nu)\,\mathrm{sign}(\nu)$$

Le signal $z(t) = x(t) - \mathrm{j}\,\text{T.H.}(x(t))$ est appelé **signal analytique associé à $x(t)$**.

d) Application : calculer le signal analytique associé à $x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$.

■ SOLUTION

a) Si $\nu > 0$, $\mathrm{sign}(\nu) = 1$ donc : $Z(\nu) = X(\nu) + X(\nu)\,.\,1 = 2X(\nu)$

Si $\nu < 0$, $\mathrm{sign}(\nu) = -1$ donc : $Z(\nu) = X(\nu) - X(\nu) = 0$

b) Rappelons la propriété de symétrie de la transformation de Fourier :

$$\mathcal{F}(f(t)) = F(\nu) \Rightarrow \mathcal{F}(F(t)) = f(-\nu)$$

Si l'on applique cela à $f(t) = \mathrm{sign}(t)$, on obtient :

$$\mathcal{F}(\mathrm{sign}(t)) = -\frac{\mathrm{j}}{\pi\nu} \Rightarrow \mathcal{F}\left(-\frac{\mathrm{j}}{\pi t}\right) = \mathrm{sign}(-\nu)$$

or : $\qquad \mathrm{sign}(-\nu) = -\,\mathrm{sign}(\nu)$

donc : $\qquad \mathcal{F}\left(\frac{\mathrm{j}}{\pi t}\right) = \mathrm{sign}(\nu)$

Ce qui signifie aussi que : $\quad \frac{\mathrm{j}}{\pi t} = \mathcal{F}^{-1}(\mathrm{sign}(\nu))$.

Partant de l'égalité : $\quad Z(\nu) = X(\nu) + X(\nu)\,.\,\mathrm{sign}(\nu)$

en prenant la transformée de Fourier inverse :

$$\mathcal{F}^{-1}(Z(\nu)) = \mathcal{F}^{-1}(X(\nu)) + \mathcal{F}^{-1}(X(\nu)\,.\,\mathcal{F}^{-1}(\mathrm{sign}(\nu))$$

soit : $\qquad z(t) = x(t) + x(t) * \frac{\mathrm{j}}{\pi t} \quad$ et $\quad \mathrm{Re}(z(t)) = x(t)$

c) Soit $\mathrm{TH}(x(t)) = x(t) * \frac{1}{\pi t} = \mathrm{Im}(z(t))$, on a immédiatement, d'après la question précédente :

$$\mathcal{F}(\mathrm{TH}(x(t)) = \mathcal{F}(x(t) * \frac{1}{\pi t} = \frac{1}{\mathrm{j}}\mathcal{F}(x(t) * \frac{\mathrm{j}}{\pi t} = \frac{1}{\mathrm{j}}X(\nu)\,\mathrm{sign}(\nu) = -\,\mathrm{j}\,X(\nu)\,\mathrm{sign}(\nu)$$

Remarque : la transformée de Hilbert est un filtre quadrateur, c'est-à-dire un déphaseur de $\frac{\pi}{2}$.

d) Application : $x(t) = \cos(2\pi\nu_0 t)$

Le signal analytique associé à $x(t)$ est :

$$z(t) = \cos 2\pi\nu_0 t + \cos 2\pi\nu_0 t * \frac{\mathrm{j}}{\pi t}$$

Pour calculer le produit de convolution définissant la partie imaginaire, on passe par sa transformée de Fourier.

Sachant que $\mathcal{F}(\cos 2\pi\nu_0 t) = 1/2[\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)]$ et que d'autre part :

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{\pi t}\right) = \frac{1}{\mathrm{j}}\mathrm{sign}(\nu)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\mathcal{F}(\cos 2\pi\nu_0 t * \tfrac{1}{\pi t}) &= 1/2\mathrm{j}\,[\delta(\nu+\nu_0) + \delta(\nu-\nu_0)]\,.\,\mathrm{sign}(\nu)\\ &= 1/2\mathrm{j}\,[\delta(\nu+\nu_0)\,.\,\mathrm{sign}(\nu) + \delta(\nu-\nu_0)\,\mathrm{sign}(\nu)]\\ &= 1/2\mathrm{j}\,[\mathrm{sign}(-\nu_0)\,\delta(\nu+\nu_0) + \mathrm{sign}(\nu_0)\,\delta(\nu-\nu_0)]\end{aligned}$$

si $\nu_0 > 0$: $\mathrm{sign}(\nu_0) = 1$ et $\mathrm{sign}(-\nu_0) = -1$,

si $\nu_0 < 0$: $\mathrm{sign}(\nu_0) = -1$ et $\mathrm{sign}(-\nu_0) = +1$.

Donc :

si $\nu_0 > 0$: $\mathcal{F}(\cos 2\pi\nu_0 t * \frac{1}{\pi t}) = 1/2\mathrm{j}\,[\delta(\nu-\nu_0) - \delta(\nu+\nu_0)] = \mathcal{F}(\sin 2\pi\nu_0 t)$

si $\nu_0 < 0$: $\mathcal{F}(\cos 2\pi\nu_0 t * \frac{1}{\pi t}) = 1/2\mathrm{j}\,[-\,\delta(\nu-\nu_0) + \delta(\nu+\nu_0)] = \mathcal{F}(\sin(-\,2\pi\nu_0 t))$

d'où : $\quad \cos 2\pi\nu_0 t * \frac{1}{\pi t} = \sin 2\pi\,|\nu_0|\,t \quad$ et $\quad z(t) = \cos 2\pi\nu_0 t + \mathrm{j}\,\sin 2\pi\,|\nu_0|\,t$

13 Fonction d'autocorrélation d'un signal

Soit $s(t)$ un signal réel d'énergie finie (c'est-à-dire tel que : $\int_{-\infty}^{+\infty} (s(t))^2\,dt$ converge).

On appelle **fonction d'autocorrélation** de $s(t)$, la fonction $C(\theta)$ définie par :

$$C(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,s(t-\theta)\,dt$$

a) Que représente C(0) ?

b) Montrer que $C(t)$ est une fonction paire.

c) Utiliser la formule de Parseval (conservation du produit scalaire) pour exprimer $C(\theta)$ en fonction de $S(\nu)$, la transformée de Fourier de $s(t)$.

d) Montrer que $\forall\,\theta,\ |C(\theta)| \le |C(0)|$ (on utilisera l'inégalité de Schwarz).

Application : calculer la fonction d'autocorrélation des signaux dans les deux cas suivants :

e) $s(t) = \begin{cases} (1/\tau)\,e^{-t/\tau} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$ **f)** $s(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -1/2<t<1/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

■ SOLUTION

a) $C(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} (s(t))^2\,dt$. C(0) représente l'énergie du signal $s(t)$.

b) Montrons que : $\forall\,\theta, C(\theta) = C(-\theta)$. $C(-\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,s(t+\theta)\,dt$

Effectuons le changement de variable :

$$t+\theta = u \quad \text{soit} \quad t = u-\theta$$

on obtient :

$$C(-\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(u-\theta)\,s(u)\,du = C(\theta)$$

La courbe représentative de la fonction d'autocorrélation est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

c) La formule de Parseval énonce que la transformation de Fourier conserve le produit scalaire :
si $\mathcal{F}(s(t)) = S(\nu)$ et $\mathcal{F}(s_1(t)) = S_1(\nu)$, alors : $\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,.\,\overline{s_1(t)}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\,\overline{S_1(\nu)}\,d\nu$.

Posons $s_1(t) = s(t-\theta)$ qui est une fonction réelle. En utilisant les formules sur le décalage :

$$S_1(\nu) = e^{-2j\pi\theta\nu}\,S(\nu)$$

l'égalité de Parseval se traduit ainsi :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,s(t-\theta)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\,\overline{e^{-2j\pi\theta\nu}S(\nu)}\,d\nu = \int_{-\infty}^{+\infty} S(\nu)\,.\,\overline{S(\nu)}\,e^{2j\pi\theta\nu}\,d\nu$$

$$C(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} |S(\nu)|^2\,e^{2j\pi\theta\nu}\,d\nu$$

Ceci exprime que $C(\theta)$ est la transformée de Fourier inverse de $|S(\nu)|^2$ appelée densité spectrale de puissance.

d) Dans l'espace vectoriel des fonctions réelles définies et continues sur $\mathbb{R}$, sommables sur $\mathbb{R}$, on définit un produit scalaire par :

$$<f\,.\,g> = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,g(t)\,dt$$

La norme associée :

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt = <f\,.\,f>$$

L'inégalité de Schwarz donne :

$$|<f\,.\,g>| \le \|f\|\,.\,\|g\|$$

Ce qui se traduit par :

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,.\,g(t)\,dt\right| \le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)\,dt}\,.\,\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} g^2(t)\,dt}$$

Posons $f(t) = s(t)$ et $g(t) = s(t-\theta)$

$$|C(\theta)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,s(t-\theta)\,dt\right| \le \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt}\,.\,\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t-\theta)\,dt}$$

Mais $\int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} s^2(t-\theta)\,dt = C(0)$, donc $|C(\theta)| \le |C(0)|$

Le module de la fonction d'autocorrélation admet un maximum en 0 dont la valeur est l'énergie du signal.

e) $s(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}e^{-t/\tau} & \text{si } t>0 \\ 0 & \text{si } t<0 \end{cases}$ et $s(t-\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\tau}e^{-(t-\theta)/\tau} & \text{si } t>\theta \\ 0 & \text{si } t<\theta \end{cases}$

Calcul de la fonction d'autocorrélation :

$$C(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,s(t-\theta)\,dt = \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau}\,e^{-t/\tau}\,s(t-\theta)\,dt$$

$s(t-\theta)$ est non nulle seulement si $t>\theta$.

Il convient donc d'étudier plusieurs cas :

• 1er cas : $\theta<0$:

$$C(\theta) = \int_0^{\infty} \frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}\,\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t-\theta}{\tau}}\,dt = \frac{1}{\tau^2}e^{\frac{\theta}{\tau}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{2t}{\tau}}\,dt = \frac{1}{2\tau}e^{\frac{\theta}{\tau}}$$

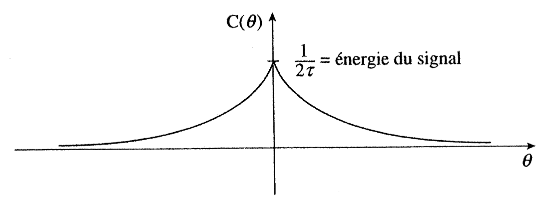
• 2ème cas : $\theta>0$:

$$C(\theta) = \int_{\theta}^{\infty} \frac{1}{\tau^2}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\,e^{-\frac{t-\theta}{\tau}}\,dt = \frac{1}{2\tau}e^{-\frac{\theta}{\tau}}$$

En résumé :

$$\begin{cases} \text{si } \theta<0,\ C(\theta) = \frac{1}{2\tau}e^{\frac{\theta}{\tau}} \\ \text{si } \theta>0,\ C(\theta) = \frac{1}{2\tau}e^{-\frac{\theta}{\tau}} \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{C(\theta) = \frac{1}{2\tau}e^{-\frac{|\theta|}{\tau}}}$$

La courbe a l'allure suivante :



f) $s(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{1}{2} \le t \le \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $s(t-\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \theta-\frac{1}{2} < t < \theta+\frac{1}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$$C(\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)\,s(t-\theta)\,dt = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} s(t-\theta)\,dt$$

Là encore, il faut considérer plusieurs cas suivant les positions relatives des intervalles $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ et $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}]$.

- 1[er] cas : $\theta + \frac{1}{2} < -\frac{1}{2}$ soit $\theta < -1$, l'intersection des deux intervalles est vide et $C(\theta) = 0$.

- 2[ème] cas : $\theta - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$ soit $\theta > 1$ même conclusion.

- 3[ème] cas : $-\frac{1}{2} < \theta - \frac{1}{2} < \frac{1}{2} < \theta + \frac{1}{2}$ soit $0 < \theta < 1$: $C(\theta) = \int_{\theta-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} dt = 1 - \theta$

- 4[ème] cas : $\theta - \frac{1}{2} < -\frac{1}{2} < \theta + \frac{1}{2} < \frac{1}{2}$ soit $-1 < \theta < 0$

$$C(\theta) = \int_{-\frac{1}{2}}^{\theta+\frac{1}{2}} dt = 1 + \theta$$

$C(\theta)$ est la fonction Λ, définie à l'exercice 1.

La fonction d'autocorrélation mesure, au moins qualitativement, l'influence de la valeur d'un signal à un instant t sur sa valeur à l'instant θ plus tard. Plus θ est grand, plus cette influence s'amenuise.

■ SOLUTION du 4) de l'exercice n° 6 page 270

4) Original de $\dfrac{1}{(p^2+p+1)^2}$: utiliser le produit de convolution.

$$L^{-1}\left(\frac{1}{p^2+p+1}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t \,.\, U(t)$$

Donc : $L^{-1}\left(\dfrac{1}{(p^2+p+1)^2}\right) = \left|\dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \,.\, U(t)\right| * \left|\dfrac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \dfrac{\sqrt{3}}{2}t \,.\, U(t)\right|$

Reste à calculer l'horrible intégrale !

18 TRANSFORMATION DE LAPLACE

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, nulle sur $\mathbb{R}^-$.
La transformée de Laplace de f est la fonction $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $F(p) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-pt}\, dt$
La **convergence absolue** de l'intégrale est assurée si :
- f est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;
- il existe des réels a et M tels que $f(x) < M\, e^{ax}$.

F est alors définie pour tout p tel que $Ré(p) > a$ (demi-plan complexe de frontière $x = a$).
La **transformation de Laplace** est l'application :

$$\mathcal{L} : f(t) \to F(p)$$

- **Valeurs limites**

1) Théorème de la valeur initiale : $\lim_{p\to\infty} pF(p) = f(0)$

2) Théorème de la valeur finale : Si $F(p)$ est définie dans le demi-plan constitué des nombres p tels que $Ré(p) > 0$, c'est-à-dire si les pôles de $F(p)$ ont tous une partie réelle négative, alors :

$$\lim_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty) - f(0^+)$$

TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE SIGNAUX ÉLÉMENTAIRES

f(t)	**F(p)**
Échelon unité $U(t)$	$\frac{1}{p}$
Dirac δ	1
$t^n\, U(t)$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{-at}\, U(t)$	$\frac{1}{p+a}$
$\cos(\omega t)\, U(t)$	$\frac{p}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t)\, U(t)$	$\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$\cos(\omega t+\varphi)\, U(t)$	$\frac{p\cos\varphi - \omega\sin\varphi}{p^2+\omega^2}$
$\sin(\omega t+\varphi)\, U(t)$	$\frac{p\sin\varphi + \omega\cos\varphi}{p^2+\omega^2}$