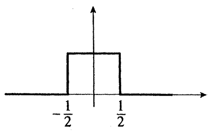
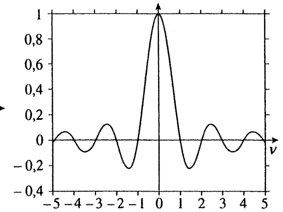
3. Exemples fondamentaux

• **Fonction « porte »** (ou fenêtre rectangulaire)

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |t| < 1/2 \\ 0 \text{ si } |t| > 1/2 \end{cases} \longleftrightarrow F(\nu) = \mathrm{Si}\,(\pi\nu) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}$$

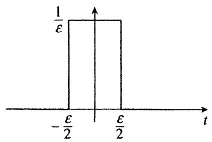


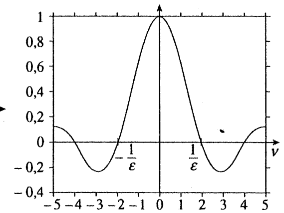


Remarque : la fonction $\mathrm{Si}(x) = \frac{\sin x}{x}$ est appelée sinus cardinal, elle joue un rôle important en analyse harmonique.

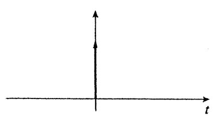
• **Impulsion unité de durée ε**

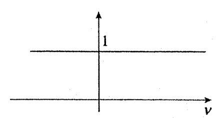
$$\Pi_\varepsilon(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon \text{ si } |t| < \varepsilon/2 \\ 0 \text{ si } |t| > \varepsilon/2 \end{cases} \longleftrightarrow F(\nu) = \mathrm{Si}\,(\pi\nu\varepsilon) = \frac{\sin(\pi\nu\varepsilon)}{\pi\nu\varepsilon}$$





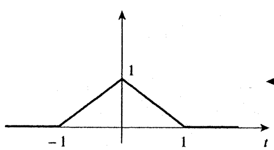
• **Dirac : $\mathcal{F}(\boldsymbol{\delta}) = 1$**

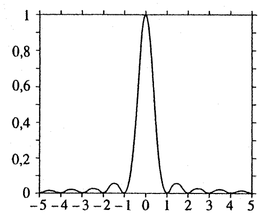




• **Fonction triangle** (ou fenêtre triangulaire)

$$\Lambda(t) = \begin{cases} -t+1 & \text{si } 0 < t < 1 \\ t+1 & \text{si } -1 < t < 0 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases} \longleftrightarrow F(\nu) = \left(\frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\right)^2$$





Propriétés de la transformation de Fourier

Signal f(t)	Transformée de Fourier F(ν)
Symétrie : F(t)	f(− ν)
Parités : • Si f est paire • Si f est impaire	 • F(ν) est à valeurs réelles et : $F(\nu) = 2\int_0^{+\infty} f(t)\cos(2\pi\nu t)\,dt$ • F(ν) est imaginaire pur et : $F(\nu) = 2j\int_0^{+\infty} f(t)\sin(2\pi\nu t)\,dt$
Linéarité : $\lambda f + \mu g$	$\lambda F + \mu G$
Dilatation temporelle : $f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\nu}{a}\right)$
Décalage temporel = *déphasage fréquentiel* $f(t-a)$	$e^{-2j\pi\nu a} F(\nu)$
Changement affine d'échelle des temps : $f(at-b)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F\left(\frac{\nu}{a}\right) e^{-2j\pi\nu b/a}$
Décalage fréquentiel = *déphasage temporel :* $e^{2j\pi at} f(t)$	F(ν − a)
Dérivation temporelle : 1. Si f est dérivable sur R au sens des fonctions $f'(t)$ $f^{(n)}(t)$ 2. Si f est discontinue au point a, la **dérivée de f au sens des distributions est :** $f'_D(t) = f'(t) + (f(a^+) - f(a^-))\,\delta_a$	 $2j\pi\nu F(\nu)$ $(2j\pi\nu)^n F(\nu)$ $2j\pi\nu F(\nu) + (f(a^+) - f(a^-))\,e^{-2j\pi\nu a}$
Dérivation fréquentielle : Si F est dérivable : $(-2j\pi t)\, f(t)$	F'(ν)
Produit de convolution : f∗g	F(ν) . G(ν)