MAM 3
MI1 Examen du 15-01-2009.

Exercice 1. Soit $f(x) = \max(\sin x, 0)$. Donner son développement en séries de Fourier. En déduire les sommes

$$S_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{4p^2-1}, \quad S_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(-1)^p}{4p^2-1}, \quad S_3 = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{1}{(4p^2-1)^2}$$

Exercice 2. Soit f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$ avec $f(0) = f(\pi) = 0$. On prolonge f sur $\mathbb{R}$ en une fonction g impaire 2π pèriodique. En utilisant l'égalité de Parseval, montrer que

$$\int_0^{\pi} |f'|^2 \, dm \geq \int_0^{\pi} |f|^2 \, dm.$$

Exercice 3. a) Soit $f(x) = e^{-\pi x^2}$. On rappelle que $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$
Vérifier que $f'(x) + 2\pi x f(x) = 0$. Calculer la transformée de Fourier de $f(x)$. Utiliser ce résultat pour calculer

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos \omega x \, dx.$$

b) Soit $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $\sigma > 0$. Calculer la transformée de Fourier de f.
Vérifier que $f_\sigma * f_\tau = f_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}$.

Exercice 4. Trouver la solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dy_1}{dx} &= 4y_1 + 4y_2 \\ \frac{dy_2}{dx} &= y_1 + 4y_2 \end{cases}$$

telle que $y_1(0) = 0$ et $y_2(0) = 1$.

Exercice 5. Soit g une fonction nulle en dehors d'un intervalle $[0,T]$ et f la fonction de pèriode T qui coincide avec g sur $[0,T]$. On suppose que g appartient à L^2. On note $\hat{g}$ la transformée de Fourier de g.
Démontrer que les coefficients de Fourier de f vérifient

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\hat{g}\left(\frac{n}{T}\right).$$

Expliquer pourquoi la suite des nombres $\hat{g}\left(\frac{n}{T}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$, détermine complètement la fonction $\hat{g}$.

Corrigé du partiel du 15 Janvier 2009

Exercice 1

f est clairement C^1 par morçeaux, 2π périodique et continue. On en déduit donc que la série de Fourier de f converge uniformément vers f. Pour $n \neq 0$, on a :

$$\begin{aligned}
c_n(f) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} f(t)dt = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} e^{-int}\sin(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{e^{-int}}{in}\sin(t)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{e^{-int}}{in}\cos(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\left[-\frac{e^{-int}}{n^2}\cos(t)\right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{e^{-int}}{n^2}\sin(t)dt\right)
\end{aligned}$$

Donc il reste, en calculant l'expression entre crochets :

$$c_n(f)\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(-1)^{n+1}-1}{n^2}\right)$$

soit finalement

$$c_n(f) = \begin{cases} \frac{(-1)^{n+1}-1}{2\pi(n^2-1)} \text{ pour } n \neq 0 \text{ et } n \neq \pm 1 \\ \frac{1}{\pi} \text{ pour } n = 0 \\ \frac{-i}{4} \text{ pour } n = 1 \text{ et } \frac{i}{4} \text{ pour } n = -1 \end{cases}$$

Comme $c_n(f)$ est nul pour $|n|$ impair > 1, on peut écrire finalement, en posant $n = 2p$

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f)e^{inx} \\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{i}{4}e^{ix} + \frac{i}{4}e^{-ix} + \sum_{p=1}^{+\infty}\left(\frac{-1}{\pi(4p^2-1)}\right)(e^{2ipx}+e^{-2ipx}) \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin(x) - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{\cos(2px)}{4p^2-1}
\end{aligned}$$

En calculant en des valeurs particulières, on obtient les deux premières sommes demandées :

$$x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{1}{\pi} - \frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} \Rightarrow \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2-1} = \frac{1}{2}$$

$$x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow 1=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}-\frac{2}{\pi}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{4p^2-1}\Rightarrow\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{4p^2-1}=\frac{1}{2}-\frac{\pi}{4}$$

Pour la troisième somme, il faut utiliser l'inégalité de Parseval :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\sin^2(t)dt=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2\Rightarrow\frac{1}{2\pi}\left[\frac{t}{2}-\frac{\sin(2t)}{4}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{4}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(f)|^2$$

soit

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{8}+2\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{\pi^2(4p^2-1)^2}\Rightarrow\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{(4p^2-1)^2}=\frac{\pi^2}{16}-\frac{1}{2}$$

Exercice 2

Par définition et imparité, g est bien C^1 par morçeaux et 2π périodique. On peut dès lors utiliser l'égalité de Parseval pour g

$$\begin{aligned}\|g\|_2^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|^2\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}|f|^2dm\end{aligned}$$

ainsi que pour g' puisque cette dernière est continue par morceaux

$$\begin{aligned}\|g'\|_2^2 &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g')|^2\\ &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2|c_n(g)|^2\\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f'^2dm\end{aligned}$$

On a donc les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f^2dm &= \sum_{n\in\mathbb{Z}}|c_n(g)|^2=|c_0(g)|^2+\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}|c_n(g)|^2\\ &\leq |c_0(g)|^2+\sum_{n\in\mathbb{Z},n\neq 0}n^2|c_n(g)|^2\\ &= |c_0(g)|^2+\sum_{n\in\mathbb{Z}}n^2|c_n(g)|^2\\ &= |c_0(g)|^2+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f'^2dm\end{aligned}$$

Finalement
$$\int_0^\pi f'^2 dm \geq \int_0^\pi f^2 dm - |c_0(g)|^2$$
mais comme g est impaire, $c_0(g) = 0$, et on a l'inégalité souhaitée.

Exercice 3

On a $f'(x) = -2\pi x e^{-\pi x^2} = -2\pi x f(x)$ et $f(x)$ vérifie donc
$$f'(x) + 2\pi x f(x) = 0.$$
Or f appartient à L^1, f' est continue et dans L^1, et $xf(x)$ est dans L^1 ; on a donc par transformée de Fourier
$$\begin{array}{rcl} f(x) & \rightarrow & \hat{f} \\ f'(x) & \rightarrow & (2i\pi\nu)\hat{f}(\nu) \text{ (dérivation temporelle 5.1.2)} \\ 2\pi x f(x) & \rightarrow & i\hat{f}'(\nu) \text{ (dérivation fréquentielle 5.1.2)} \\ f'(x) + 2\pi x f(x) = 0 & \rightarrow & (2i\pi\nu)\hat{f}(\nu) + i\hat{f}'(\nu) = 0 \end{array}$$
La transformée de Fourier de $f(x)$ vérifie donc :
$$\hat{f}'(\nu) + 2\pi\nu\hat{f}(\nu) = 0.$$
Soit $\hat{f}(\nu) = Ce^{-\pi\nu^2}$ ou C est déterminé par
$$C = \hat{f}(0) = \int f(x)\, dx = 1.$$
Comme $e^{-x^2}\cos\omega x$ est une fonction paire, on a
$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(\omega x)\, dx &= 1/2 \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\cos(\omega x)\, dx \\ &= \sqrt{\pi}/2 \int_{-\infty}^\infty e^{-\pi t^2}\cos(\omega\sqrt{\pi}t)\, dt \\ &= \sqrt{\pi}/2 \,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^\infty e^{-\pi t^2} e^{i\omega\sqrt{\pi}t}\, dt\right) \\ &= \sqrt{\pi}/2 \,\mathrm{Re}\left(\hat{f}\left(-\frac{\omega}{2\sqrt{\pi}}\right)\right) = \sqrt{\pi}/2\, e^{-\frac{\omega^2}{4}}. \end{aligned}$$

On a $f_\sigma(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} f(ax)$ avec $a = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$. D'après la propriété de changement d'échelle de temps :
$$\hat{f}_\sigma(\nu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\frac{1}{a}\hat{f}(\nu/a) = e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}.$$

On a

$$\mathcal{F}(f_\sigma * f_\tau)(\nu) = \hat{f}_\sigma(\nu)\hat{f}_\tau(\nu) = e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2}e^{-2\pi^2\tau^2\nu^2} = e^{-2\pi^2(\sigma^2+\tau^2)\nu^2} = \mathcal{F}(f_{\sqrt{\sigma^2+\tau^2}}),$$

d'ou le résultat en prenant les transformées de Fourier inverse.

Exercice 4

Comme on a des conditions initiales, on utilise la transformée de Laplace. En posant

$$Y_1 = \mathcal{L}(y_1), \;\; Y_2 = \mathcal{L}(y_2),$$

on obtient

$$\left\{ \begin{array}{rcl} sY_1(s) & = & 4Y_1(s) + 4Y_2(s) \\ sY_2(s) - 1 & = & Y_1(s) + 4Y_2(s) \end{array} \right.$$

c'est-à-dire

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (s-4)Y_1(s) - 4Y_2(s) & = & 0 \\ (s-4)Y_2(s) - Y_1(s) & = & 1 \end{array} \right.$$

soit

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_1(s) & = & \frac{4}{s^2-8s+12} = \frac{4}{(s-6)(s-2)} \\ Y_2(s) & = & \frac{s-4}{s^2-8s+12} = \frac{s-4}{(s-6)(s-2)} \end{array} \right.$$

En décomposant en éléments simples

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Y_1(s) & = & \frac{1}{s-6} - \frac{1}{s-2} \\ Y_2(s) & = & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-6} + \frac{1}{s-2}\right) \end{array} \right.$$

soit en prenant les originales :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y_1(x) & = & e^{6x} - e^{2x} \\ y_2(x) & = & \frac{1}{2}\left(e^{6x} + e^{2x}\right) \end{array} \right.$$

Exercice 5

Comme la restriction de f à $[0,T]$ appartient à $L^2(0,T)$, les coefficients de Fourier de f sont bien définis et donnés par :

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\int_0^T \tilde{g}(t)e^{-2i\pi nt/T}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T g(t)\,e^{-2i\pi nt/T}\,dt$$

Par ailleurs la transformée de Fourier de g existe (g est dans L^2) et donnée par

$$\hat{g}(\nu) = \int g(t)\,e^{-2i\pi\nu t}\,dt = \int_0^T g(t)\,e^{-2i\pi\nu t}\,dt.$$

On a donc bien la relation

$$c_n(f) = \frac{1}{T}\hat{g}\left(\frac{n}{T}\right).$$

Par ailleurs, f est déterminée p.p. par ses coefficients de Fourier (Th. 4.2.1 et remarque) et donc par les nombres $\hat{g}\left(\frac{n}{T}\right)$. Il en est donc de même de g qui coincide avec f sur $[0, T]$ et par suite de $\hat{g}$ que l'on peut calculer connaissant g.