EPU-MAM 1ère année
Mathématiques pour l'ingénieur 1 Examen du 29-01-2007.

Exercice 1 (5 points)
Soit $f(t)$ une fonction causale. On suppose que $f(t)$ a une abscisse de sommabilité négative. Que peut-on dire de sa transformée de Fourier?
Discuter l'existence d'une transformée de Fourier et d'une transformée de Laplace pour les fonctions suivantes:

$$e^{t^2+4}\,u(t), \quad e^{2t}\,u(t), \quad t^3 e^{-t}\,u(t), \quad \cos(t)\,u(t),$$

où $u(t)$ est la fonction de Heaviside: $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

Exercice 2 (7 points)
Soit $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$. On suppose de plus que la transformée de Fourier de f, que l'on notera $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$ satisfait: $\hat{f}(\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \notin [-\lambda_c, \lambda_c], \lambda_c > 0$.

1. Expliquer pourquoi la fonction f admet une transformée de Fourier. Si $\bar{\mathcal{F}}$ désigne la transformée de Laplace inverse, a-t-on $\bar{\mathcal{F}}(\hat{f}) = f$? Montrer que pour tout x réel,

$$\mathcal{F}(\hat{f})(x) = f(-x).$$

2. Soit a un réel fixé tel que $0 < a \leq \frac{1}{2\lambda_c}$. On appelle g la fonction de période $\frac{1}{a}$ qui coincide avec $\hat{f}$ sur l'intervalle $[-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]$. Démontrer que les coefficients de Fourier de g vérifient

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(g) = af(-na).$$

3. Soit t un réel fixé et h la fonction de période $\frac{1}{a}$ telle que $h(\lambda) = e^{2i\pi t\lambda}$ pour $\lambda \in [-\frac{1}{2a}, \frac{1}{2a}]$. Montrer que les coefficients de Fourier de h sont donnés par: $c_n(h) = s(t - na)$ où $s(x)$ est la fonction sinus cardinal:

$$s(x) = \begin{cases} \frac{\sin \frac{\pi}{a}x}{\frac{\pi}{a}x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

En utilisant la transformée de Fourier inverse, montrer que $f(t) = \frac{1}{a}c_0(gh)$.

4. En admettant la formule suivante (coefficients de Fourier d'un produit)

$$c_k(gh) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{k-n}(g)c_n(h),$$

montrer la formule de Shannon: pour tout réel t,

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na)s(t - na).$$

Exercice 3 (8 points)
1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes:

$$tu(t),\ t^2u(t),\ te^{-t}u(t),\ t^2e^{-t}u(t),$$

où $u(t)$ désigne la fonction de Heaviside: $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$.
2. En utilisant la transformée de Laplace résoudre les équations différentielles suivantes:
(a) $y''(t) + y(t) = t, \quad t \geq 0, \ \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0,$
(b) $y''(t) + 2y'(t) + y(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0, \ \ y(0) = 1, \ \ y'(0) = 0.$

EPU-MAM 1ère année
Mathématiques pour l'ingénieur 1 Correction du partiel du 29-01-2007.

Exercice 1

Si $f(t)$ a une abscisse de sommabilité négative, pour $\mathrm{Re} s = 0$, $|f(t)e^{-st}| = |f(t)|$ est intégrable. Donc $f(t)$ admet une transformée de Fourier:

$$\mathcal{F}(f)(\nu) = \int_0^\infty f(t)e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \mathcal{L}(f)(2i\pi\nu).$$

- pour tout x réel, la fonction $e^{t^2+4}e^{-xt}$ n'est pas intégrable sur $[0, \infty]$, et donc, aucune transformée existe.
- $e^{2t}u(t)$ admet une transformée de Laplace. Son abscisse de sommabilité est 2. Elle n'admet donc pas de transformée de Fourier.
- t^3e^{-t} est intégrable sur $[0, +\infty]$. Elle admet donc une transformée de Fourier et une transformée de Laplace.
- $\cos t$ n'est pas intégrable sur $[0, +\infty]$, et donc n'admet pas de transformée de Fourier. Par contre elle admet une transformée de Laplace.

Exercice 2

1. La fonction f est intégrable, elle admet donc une transformée de Fourier. D'autre part $\hat{f}$ est intégrable car elle est continue et à support borné. La formule d'inversion est vraie en tout point où f est continue, donc partout. Pour tout réel x on a donc

$$f(x) = \int_0^\infty e^{2i\pi\lambda x}\hat{f}(\lambda)\, d\lambda,$$

et donc

$$f(-x) = \int_0^\infty e^{-2i\pi\lambda x}\hat{f}(\lambda)\, d\lambda = \mathcal{F}(\hat{f})(x).$$

2. Les coefficients de Fourier de g sont donnés par:

$$c_n(g) = a\int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} g(t)e^{-2i\pi nat}\, dt = a\int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \hat{f}(t)e^{-2i\pi nat}\, dt = af(-na)$$

d'après la question précédente.

3. Les coefficients de Fourier de h sont donnés par:

$$c_n(h) = a\int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} h(\lambda)e^{-2i\pi na\lambda}\, d\lambda = a\int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{2i\pi t\lambda}e^{-2i\pi na\lambda}\, d\lambda = a\int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} e^{2i\pi(t-na)\lambda}d\lambda.$$

On reconnait la transformée de Fourier de la fonction caractéristique $\chi_{[-1/2a,1/2a]}$ au point $t - na$, ce qui donne le résultat d'après la table.

$$c_0(gh) = a\int g(x)h(x)\, dx = a\int_{\frac{-1}{2a}}^{\frac{1}{2a}} \hat{f}(x)e^{2i\pi tx}\, dx = a\bar{\mathcal{F}}(\hat{f})(t) = af(t).$$

4. D'après la question précédente:

$$f(t) = \frac{1}{a} c_0(gh) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{-n}(g) c_n(h)$$

D'après la question 2., $c_{-n}(g) = af(na)$ et d'après 3., $c_n(h) = s(t - na)$. On a donc

$$f(t) = \frac{1}{a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} af(na)s(t - na) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(na)s(t - na).$$

Exercice 3 1. Pour Re $s > 0$,

$$\mathcal{L}(tu(t))(s) = \int_0^{\infty} te^{-st}\, dt = \left[t\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s}\, dt = -\left[\frac{e^{-st}}{s^2} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s^2}.$$

En utilisant la transformée de Laplace de la primitive:

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(x)\, dx \right) = \frac{\mathcal{L}f(s)}{s},$$

on obtient pour $f(t) = tu(t)$, $\int_0^t x\, dx = [x^2/2]_0^t = t^2/2$,

$$\mathcal{L}(t^2/2)(s) = \frac{1}{s^3}.$$

Soit

$$\mathcal{L}(t^2)(s) = \frac{2}{s^3}.$$

En utilisant la propriété du décalage dans le plan de Laplace:

$$\mathcal{L}(e^{-s_0 t} f(t))(s) = \mathcal{L}f(s + s_0),$$

on en déduit que

$$\mathcal{L}(te^{-t}u(t))(s) = \mathcal{L}(tu(t))(s + 1) = \frac{1}{(s+1)^2}.$$

$$\mathcal{L}(t^2 e^{-t}u(t))(s) = \mathcal{L}(t^2 u(t))(s + 1) = \frac{2}{(s+1)^3}.$$

2. On note $Y(s)$ la transformée de Laplace de $y(t)$.
(a) On a

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - s$$

$$\mathcal{L}(tu(t))(s) = \frac{1}{s^2}$$

L'équation devient

$$s^2 Y(s) - s + Y(s) = \frac{1}{s^2}$$

soit

$$Y(s)(s^2+1) = s + \frac{1}{s^2}$$

ou encore

$$Y(s) = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2(s^2+1)} = \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+1}.$$

Comme

$$\frac{s}{s^2+1} = \mathcal{L}\cos(t)u(t) =, \quad \frac{1}{s^2+1} = \mathcal{L}\sin(t)u(t), \quad \frac{1}{s^2} = \mathcal{L}(tu(t))(s),$$

on a donc

$$y(t) = (\cos(t) - \sin(t) + t)\, u(t).$$

(b) On a

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s$$
$$\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$
$$\mathcal{L}(e^{-t}u(t)) = \frac{1}{s+1}$$

L'équation devient

$$s^2Y(s) - s + 2(sY(s) - 1) + Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

soit

$$Y(s)(s^2+2s+1) = s + 2 + \frac{1}{s+1}$$

ou encore

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{s+2}{s^2+2s+1} + \frac{1}{(s+1)(s^2+2s+1)} \\ &= \frac{s+2}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} \\ &= \frac{1}{(s+1)} + \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3}. \end{aligned}$$

Comme

$$\frac{1}{(s+1)} = \mathcal{L}(e^{-t}u(t)),$$

et d'après la question précédente:

$$\frac{1}{(s+1)^2} = \mathcal{L}(te^{-t}u(t))(s), \quad \frac{1}{(s+1)^3} = \mathcal{L}\left(\frac{t^2}{2}e^{-t}u(t)\right)(s).$$

On a donc

$$y(t) = \left(1 + t + \frac{t^2}{2}\right) e^{-t}u(t).$$