EPU-MAM 1ère année
Mathématiques pour l'ingénieur 1 Examen du 23-01-2006.

Exercice 1 (7 points)
On considère la fonction triangle $T(t)$ et la fonction porte $\Pi(t)$ définies par

$$T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \notin [0,2] \\ t & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 2-t & \text{si } 1 < t < 2 \end{cases}, \quad \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [0,1] \\ 0 & \text{si } t \notin [0,1] \end{cases}.$$

1. Tracer $T(t)$ et calculer sa transformée de Fourier en utilisant la définition.
2. Sachant que $T(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, en déduire une autre façon de calculer sa transformée de Fourier.
3. Soit un système LTI (linéaire stationnaire) qui à l'entrée $\Pi(t)$ associe la sortie $T(t)$. Quelle est la réponse impulsionnelle de ce système? Ce système est-il causal? Calculer sa fonction de transfert.

Exercice 2 (8 points)
On cherche une fonction $u(x,t) : [0,1] \times [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ qui satisfait l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \tag{1}$$

avec les conditions aux limites (dites conductrices)

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{2}$$

et la condition initiale

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{3}$$

où $\kappa > 0$ est une constante et $f(x)$ une fonction donnée, telle que $f(0) = f(1) = 0$.

1. Montrer que $u_n(x,t) = \exp(\alpha_n t) \sin(n\pi x), n \geq 1$ est solution de (1) et (2) pour α_n convenablement choisi, que l'on déterminera.

2. On cherche maintenant une solution de (1), (2) et (3) de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t).$$

En supposant que cette série converge et définit une application continue, déterminer les coefficients a_n pour que (3) soit satisfaite.

3. On suppose que $f(x)$ est de classe C^1. Que peut-on dire de ses coefficients de Fourier? En déduire que

$$\forall t \geq 0, \quad \forall x \in [0,1], \quad |a_n u_n(x,t)| \leq |b_n|,$$

ou $b_n \in \mathbb{R}$ est le terme d'une série absolument convergente $\sum_{i=1}^{n} |b_n| < \infty$.

4. Calculer la solution $u(x,t)$ pour $f(x) = \sin(\pi x)$. Donner la limite de $u(x,t)$ quand $t \to \infty$.

Exercice 3 (5 points)
En utilisant la transformée de Laplace, résoudre l'equation différentielle:

$$y''(t) - 3y'(t) + 2y(t) = e^{-t}, \quad t \geq 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Exercice 1

1. En utilisant la formule et en intégrant par parties:

$$\begin{aligned}
\hat{T}(\nu) &= \int_0^1 te^{-2i\pi\nu t}\,dt + \int_1^2 (2-t)e^{-2i\pi\nu t}\,dt \\
&= \left[t\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\,dt + \left[(2-t)\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\right]_1^2 + \int_1^2 \frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\,dt \\
&= -\frac{e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu} - \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{(2i\pi\nu)^2}\right]_0^1 + \frac{e^{-2i\pi\nu}}{2i\pi\nu} + \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{(2i\pi\nu)^2}\right]_1^2 \\
&= \frac{1-2e^{-2i\pi\nu}+e^{-4i\pi\nu}}{(2i\pi\nu)^2} \\
&= e^{-2i\pi\nu}\frac{e^{-2i\pi\nu}-2+e^{2i\pi\nu}}{(2i\pi\nu)^2} \\
&= e^{-2i\pi\nu}\frac{(e^{-i\pi\nu}+e^{i\pi\nu})^2}{(2i\pi\nu)^2} = e^{-2i\pi\nu}\frac{(\sin\pi\nu)^2}{(\pi\nu)^2}
\end{aligned}$$

2. La transformée de $\Pi(t) = \chi_{[0,1]}(t)$ est

$$\hat{\Pi}(\nu) = \frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}e^{-i\pi\nu}.$$

Donc, $\mathcal{F}(T) = \mathcal{F}(\Pi * \Pi) = \mathcal{F}(\Pi)^2 = e^{-2i\pi\nu}\frac{(\sin\pi\nu)^2}{(\pi\nu)^2}$.

3. Un système linéaire stationnaire est décrit par un produit de convolution:

$$u(t) \to y(t) = h(t) * u(t),$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du système. Comme $T(t) = \Pi(t) * \Pi(t)$, le système de convolution qui à $u(t)$ associe $y(t) = T(t)$ a pour réponse impulsionnelle

$$h(t) = \Pi(t).$$

Ce système est causal puisque $h(t) = 0$ pour $t < 0$. Sa fonction de transfert $H(s)$ est la transformée de Laplace de $h(t)$:

$$H(s) = \int_0^1 e^{-st}\,dt = \left[\frac{e^{-st}}{-s}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-s}}{s}$$

Exercice 2

1. Pour $n \geq 1$, $u_n(x,t) = \exp(\alpha_n t)\sin(n\pi x), n \geq 1$. Il est clair que $u_n(x,t)$ satisfait les

conditions aux limites (2). Par ailleurs,

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t} = \alpha_n u_n(x,t).$$

$$\frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x} = n\pi \exp(\alpha_n t)\cos(n\pi x)$$

$$\frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2} = -(n\pi)^2 \exp(\alpha_n t)\sin(n\pi x) = -(n\pi)^2 u_n(x,t),$$

et (1) est vérifiée si et seulement si

$$\alpha_n = -\kappa n^2 \pi^2.$$

2. On doit avoir

$$\lim_{t\to 0} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \pi n x = f(x), \quad 0 \le x \le 1.$$

Cela signifie que a_n est le coefficient de Fourier d'une fonction $\tilde{f}(x)$ impaire de période $T = 2$ qui coincide avec $f(x)$ sur $[0,1]$:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(x) \sin \frac{2n\pi x}{T}\ dx = 2\int_0^1 f(x) \sin n\pi x\ dx.$$

3. Si on suppose que $f(x)$ est de classe C^1, alors ses coefficients de Fourier vérifient

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty,$$

et comme

$$|a_n u_n(x,t)| < |a_n|,$$

on peut prendre $b_n = a_n$.

Remarque: On utilise des majorations de ce type pour montrer que la série qui définit $u(x,t)$ peut être différentiée terme à terme et est donc bien solution de l'équation de la chaleur (ce n'était pas demandé dans l'examen). La série $\sum a_n u_n(x,t)$ est uniformément convergente pour $t \ge 0$ et $x \in [0,1]$ puisque majorée par $\sum |a_n|$. On en déduit que $u(x,t)$ est continue. D'autre part comme les coefficients de Fourier sont bornés $|a_n| < K$ (th.5.1.1), pour $x \in [0,1]$ et $t \ge t_0 > 0$,

$$\left| a_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t) \right| \le M|\alpha_n||u_n(x,t)| \le K|\alpha_n| e^{\alpha_n t_0}$$

Comme $n^2|\alpha_n|e^{\alpha_n t_0} = \kappa n^4 \pi^2 e^{-\kappa n^2 \pi^2 t_0} \to 0$ quand $n \to \infty$, pour n assez grand

$$|\alpha_n| e^{\alpha_n t_0} \le M/n^2, M > 0.$$

La série $\sum |\alpha_n| e^{\alpha_n t_0}$ converge et donc la série $\sum a_n \frac{\partial u_n}{\partial t}(x,t)$ est uniformément convergente pour $x \in [0,1]$ et $t \geq t_0$. On montre de même que $\sum a_n \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}(x,t)$ est uniformément convergente, ce qui prouve que $u(x,t)$ est $\mathcal{C}^2$.

4. Pour $f(x) = \sin \pi x$ on a $a_1 = 1$ et $a_n = 0$, pour $n > 1$. Donc

$$u(x,t) = \exp(-\kappa \pi^2 t) \sin \pi x,$$

et $\lim_{t \to \infty} u(x,t) = 0$.

Exercice 3 Soit $Y(s)$ la transformée de Laplace de $y(t)$.

$$\mathcal{L}(y')(s) = sY(s) - y(0) = sY(s)$$

$$\mathcal{L}(y'')(s) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s) - 1$$

$$\mathcal{L}(e^{-t} u(t)) = \frac{1}{s+1}$$

L'équation devient

$$s^2 Y(s) - 1 - 3sY(s) + 2Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

soit

$$Y(s)(s^2 - 3s + 2) = 1 + \frac{1}{s+1} = \frac{s+2}{s+1}$$

ou encore

$$Y(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2 - 3s + 2)}$$

Or

$$s^2 - 3s + 2 = (s-2)(s-1)$$

et donc en décomposant en éléments simples,

$$Y(s) = \frac{1}{6(s+1)} - \frac{3}{2(s-1)} + \frac{4}{3(s-2)}$$

Comme

$$\mathcal{L}\left(e^{-at} u(t)\right) = \frac{1}{s+a}, \quad a \in \mathbb{C}, \quad \text{Re } (s+a) \geq 0,$$

on a

$$y(t) = \left(\frac{1}{6} e^{-t} - \frac{3}{2} e^{t} + \frac{4}{3} e^{2t} \right) u(t).$$