EPU - MAM 3
Mathématiques pour l'ingénieur 1

**Examen partiel du 13 Janvier 2010**
**Durée 2 heures**
**Aucun document autorisé**
**Les calculatrices sont interdites**

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Ainsi toute justification floue sera considérée comme fausse.

**Cours** (*2 points*)

1) Quelle est la structure de l'espace $L^2(0,T)$ ? En donner une base.

2) Une fonction admettant une transformée de Fourier admet-elle toujours une transformée de Laplace ? Contre-exemple ?

**Exercice 1** (*4 points*)
Le but de cet exercice est de montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (\bigstar)$$

1) Trouver des coefficients réels $a$ et $b$ satisfaisant : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^\pi (at^2 + bt)\cos(nt)\, dt = \frac{1}{n^2}$.

2) En ayant pris soin de réunir tous les éléments du théorème de Dirichlet pour une fonction judicieusement choisie, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\cos(x)}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire la relation $(\bigstar)$.

**Exercice 2** (*9 points*)
Soit $s(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ un signal *réel*. On appelle *fonction d'autocorrélation* de $s(t)$ la fonction

$$C(\theta) = \int s(t)s(t-\theta)\, dt.$$

1) Montrer que $C(\theta)$ est bien définie.

2) Que représente $C(0)$ ?

3) Montrer que $C(\theta)$ est une fonction paire.

4) Utiliser la formule de Parseval (conservation du produit scalaire) pour exprimer $C(\theta)$ en fonction de $\hat{s}(\nu)$ la transformée de Fourier de $s(t)$.

5) Montrer que pour tout $\theta$, $|C(\theta)| < |C(0)|$ (utiliser l'inégalité de Schwarz).

6) Calculer la fonction d'autocorrélation dans les deux cas suivants :

$$s(t) = \begin{cases} (1/\tau)e^{-t/\tau} & \text{si} \quad t > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t \leq 0 \end{cases}, \quad s(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si} \quad |t| \geq 1/2 \end{cases}$$

**Exercice 3** (*5 points*)
Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de corps $A, B$ et $C$ lors de réactions chimiques différentes.

1) **Réaction d'ordre 1**

Soit la réaction :

$$A \xrightarrow{k} B$$

Soient $a(t)$ et $b(t)$ les concentrations des corps $A$ et $B$ à l'instant $t$. La réaction décrite ci-dessus traduit que les concentrations sont les solutions du système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} & = & -ka(t) \\ \\ \frac{db(t)}{dt} & = & ka(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $a(0) = a_0$ et $b(0) = 0$.

Trouver l'évolution des concentrations de $A$ et $B$ en fonction du temps.

2) **Réaction successives**

Soient désormais 3 corps $A$, $B$ et $C$ soumis aux réactions suivantes :

$$A \xrightarrow{k_1} B \xrightarrow{k_2} C$$

A l'aide du formalisme utilisé dans 1), écrire le système différentiel vérifié par les concentrations de $A$, $B$ et $C$. Trouver ces dernières sachant que $a(0) = a_0$ et $b(0) = c(0) = 0$.

2) **Réaction parallèles**

Soient à nouveau 3 corps $A$, $B$ et $C$ soumis aux réactions suivantes :

$$A \xrightarrow{k_1} B$$

$$A \xrightarrow{k_2} C$$

Ecrire le système différentiel vérifié par les concentrations de $A$, $B$ et $C$. Trouver ces dernières sachant que $a(0) = a_0$ et $b(0) = c(0) = 0$.