

Examen partiel du 13 Janvier 2010
Durée 2 heures
Aucun document autorisé
Les calculatrices sont interdites

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction. Ainsi toute justification floue sera considérée comme fautive.

Cours (2 points)

- 1) Quelle est la structure de l'espace $L^2(0, T)$? En donner une base.
- 2) Une fonction admettant une transformée de Fourier admet-elle toujours une transformée de Laplace? Contre-exemple?

Exercice 1 (4 points)

Le but de cet exercice est de montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \quad (\star)$$

- 1) Trouver des coefficients réels a et b satisfaisant : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^\pi (at^2 + bt) \cos(nt) dt = \frac{1}{n^2}$.
- 2) En ayant pris soin de réunir tous les éléments du théorème de Dirichlet pour une fonction judicieusement choisie, calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(x)}{n^2}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. En déduire la relation (\star).

Exercice 2 (9 points)

Soit $s(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ un signal réel. On appelle *fonction d'autocorrélation* de $s(t)$ la fonction

$$C(\theta) = \int s(t)s(t - \theta) dt.$$

- 1) Montrer que $C(\theta)$ est bien définie.
- 2) Que représente $C(0)$?
- 3) Montrer que $C(\theta)$ est une fonction paire.
- 4) Utiliser la formule de Parseval (conservation du produit scalaire) pour exprimer $C(\theta)$ en fonction de $\hat{s}(\nu)$ la transformée de Fourier de $s(t)$.

5) Montrer que pour tout θ , $|C(\theta)| < |C(0)|$ (utiliser l'inégalité de Schwarz).

6) Calculer la fonction d'autocorrélation dans les deux cas suivants :

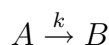
$$s(t) = \begin{cases} (1/\tau)e^{-t/\tau} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}, \quad s(t) = \Pi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{si } |t| \geq 1/2 \end{cases}$$

Exercice 3 (5 points)

Le but de cet exercice est d'étudier l'évolution de corps A, B et C lors de réactions chimiques différentes.

1) Réaction d'ordre 1

Soit la réaction :



Soient $a(t)$ et $b(t)$ les concentrations des corps A et B à l'instant t . La réaction décrite ci-dessus traduit que les concentrations sont les solutions du système d'équations différentielles suivant :

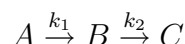
$$\begin{cases} \frac{da(t)}{dt} = -ka(t) \\ \frac{db(t)}{dt} = ka(t) \end{cases}$$

avec les conditions initiales $a(0) = a_0$ et $b(0) = 0$.

Trouver l'évolution des concentrations de A et B en fonction du temps.

2) Réaction successives

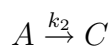
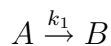
Soient désormais 3 corps A, B et C soumis aux réactions suivantes :



A l'aide du formalisme utilisé dans 1), écrire le système différentiel vérifié par les concentrations de A, B et C . Trouver ces dernières sachant que $a(0) = a_0$ et $b(0) = c(0) = 0$.

2) Réaction parallèles

Soient à nouveau 3 corps A, B et C soumis aux réactions suivantes :



Ecrire le système différentiel vérifié par les concentrations de A, B et C . Trouver ces dernières sachant que $a(0) = a_0$ et $b(0) = c(0) = 0$.