MAM 3
Mathématiques pour l'Ingénieur 1 Examen du 21-01-2008.

On désigne par $u(t)$ la fonction de Heaviside $u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$.

Exercice 1.
1) Soit Π l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $\Pi(t) = 1$ si $|t| \leq \frac{1}{2}$, $\Pi(t) = 0$ si $|t| > \frac{1}{2}$ (fonction porte) ; calculer la transformée de Fourier $\hat{\Pi}$ de Π.
2) On pose $\Lambda = \Pi * \Pi$; calculer Λ.
3) Calculer la transformée de Fourier $\hat{\Lambda}$ de Λ.
4) Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(t) = 1$ si $|t| < 1$, $f(t) = 2 - |t|$ si $1 \leq |t| \leq 2$, $f(t) = 0$ si $|t| > 2$; exprimer f comme somme de Λ et de deux de ses translatées (fonctions de la forme $\Lambda_a(t) = \Lambda(t - a)$, $a \in \mathbb{R}$).
5) A partir de 4), calculer la transformée de Fourier $\hat{f}$ de f.
6) Exprimer la dérivée f' de f en fonction de deux translatées de la fonction Π. Calculer la transformée de Fourier $\hat{f'}$ de f'. En déduire $\hat{f}$.

Exercice 2.
Une masse m est suspendue à un point fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k. Le déplacement $y(t)$ de la masse satisfait l'équation différentielle

$$my''(t) + ky(t) = f(t),$$

où $f(t)$ est la force appliquée à la masse. On considère le système $\Sigma : f(t) \to y(t)$. On pose $\omega = \sqrt{k/m}$.
1) On suppose que $f(t) \in \mathcal{E}$ (ensemble des fonctions causales, i.e. nulles pour $t < 0$, et localement intégrables) et on cherche $y(t) \in \mathcal{E}$ satisfaisant les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$. En utilisant la transformée de Laplace, calculer la fonction de transfert $H(s)$, puis la réponse impulsionnelle $h(t)$ du système. La fonction $h(t)$ est-elle intégrable? Le système est-il stable? Exprimer $y(t)$ en fonction de $f(t)$.
2) On suppose maintenant le système soumis à une entrée sinusoïdale : $f(t) = \sin(\omega_0 t)u(t)$. Calculer la solution $y(t)$ satisfaisant $y(0) = y'(0) = 0$, lorsque $\omega_0 \neq \omega$ et lorsque $\omega_0 = \omega$. Dans ce dernier cas, la solution est-elle bornée ?

Correction

Exercice 1. 1)

$$\hat{\Pi}(\nu) = \int_{-1/2}^{1/2} e^{-2i\pi\nu t}\, dt = \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\right]_{-1/2}^{1/2} = \frac{e^{-i\pi\nu} - e^{i\pi\nu}}{-2i\pi\nu} = \frac{\sin \pi\nu}{\pi\nu}.$$

2)

$$\begin{aligned} \Lambda(t) &= \int \Pi(s)\Pi(t-s)\, ds = \int_{-1/2}^{1/2} \Pi(t-s)\, ds = \int_{[-1/2,1/2]\cap[t-1/2,t+1/2]} ds \\ &= m([-1/2,1/2] \cap [t-1/2, t+1/2]), \end{aligned}$$

ou m désigne la mesure de Lebesgue de cet ensemble. Donc,

$$\Lambda(t) = \begin{cases} t+1 & \text{si } -1 \leq t < 0 \\ -t+1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{si } |t| > 1 \end{cases}$$

3) Comme $\Lambda = \Pi * \Pi$, on a $\hat{\Lambda} = \hat{\Pi}^2$.
Pour ceux qui ont fait le calcul :

$$\begin{aligned} \hat{\Lambda}(\nu) &= \int_{-1}^{0} e^{-2i\pi\nu t}(t+1)\, dt + \int_0^1 e^{-2i\pi\nu t}(-t+1)\, dt \\ &= \int_{-1}^{0} e^{-2i\pi\nu t} t\, dt - \int_0^1 e^{-2i\pi\nu t} t + \int_{-1}^{1} e^{-2i\pi\nu t}\, dt \\ &= \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}t}{-2i\pi\nu}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} \frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\, dt - \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}t}{-2i\pi\nu}\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\, dt + \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-2i\pi\nu}\right]_{-1}^{1} \\ &= \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-4\pi^2\nu^2}\right]_0^1 - \left[\frac{e^{-2i\pi\nu t}}{-4\pi^2\nu^2}\right]_{-1}^{0} \\ &= \frac{e^{-2i\pi\nu}}{-4\pi^2\nu^2} + \frac{1}{4\pi^2\nu^2} + \frac{1}{4\pi^2\nu^2} - \frac{e^{2i\pi\nu}}{4\pi^2\nu^2} \\ &= \frac{1-\cos(2\pi\nu)}{2\pi^2\nu^2} \\ &= \frac{\sin(\pi\nu)^2}{\pi^2\nu^2}. \end{aligned}$$

4) Si l'on trace $f(t)$, on voit que

$$f(t) = \Lambda(t) + \Lambda(t-1) + \Lambda(t+1).$$

Pour le vérifier le plus simple est de faire un tableau. On pose $\Sigma(t) = \Lambda(t) + \Lambda(t-1) + \Lambda(t+1)$.

t	$\Lambda(t+1)$	$\Lambda(t)$	$\Lambda(t-1)$	$\Sigma(t)$
$\|t\| > 2$	0	0	0	0
$-2 < t < -1$	$t+2$	0	0	$t+2$
$-1 < t < 0$	$-t$	$t+1$	0	1
$0 < t < 1$	0	$-t+1$	t	1
$1 < t < 2$	0	0	$-t+2$	$-t+2$

On obtient bien $\Sigma(t) = f(t)$

5)
$$\hat{f}(\nu) = \hat{\Lambda}(\nu) + \hat{\Lambda}_1(\nu) + \hat{\Lambda}_{-1}(\nu).$$

En utilisant le théoréme du retard, on obtient

$$\hat{\Lambda}_1(\nu) = e^{-2i\pi\nu}\hat{\Lambda}(\nu), \;\; \hat{\Lambda}_{-1}(\nu) = e^{2i\pi\nu}\hat{\Lambda}(\nu)$$

soit

$$\begin{aligned}\hat{f}(\nu) &= (1 + e^{2i\pi\nu} + e^{-2i\pi\nu})\frac{\sin(\pi\nu)^2}{\pi^2\nu^2} \\ &= (1 + 2cos(2\pi\nu))\frac{\sin(\pi\nu)^2}{\pi^2\nu^2}.\end{aligned}$$

6) On a
$$f'(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leq |t| < 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

soit $f'(t) = \Pi_{-3/2}(t) - \Pi_{3/2}(t)$. Donc $\hat{f}'(\nu) = (e^{3i\pi\nu} - e^{-3i\pi\nu})\hat{\Pi}(\nu)$. Soit $\hat{f}'(\nu) = 2i\sin(3\pi\nu)\hat{\Pi}(\nu)$. En utilisant la dérivation temporelle $\hat{f}'(\nu) = (2i\pi\nu)\hat{f}(\nu)$, on obtient

$$\hat{f}(\nu) = \frac{\sin(3\pi\nu)}{\pi\nu}\hat{\Pi}(\nu) = \frac{\sin(3\pi\nu)}{\pi\nu}\frac{\sin\pi\nu}{\pi\nu}$$

On vérifie que les expressions obtenues en 5) et 6) sont égales.

Exercice 2.

Comme f et y sont dans $\mathcal{E}$, elles admettent une transformée de Laplace. D'aprs le cours, et en tenant compte des conditions initiales ($y(0) = y'(0) = 0$).

$$\begin{aligned} f(t) &\to F(s) \\ y(t) &\to Y(s) \\ y''(t) &\to s^2Y(s) - sy(0^+) - y'(0^+) = s^2Y(s) \end{aligned}$$

L'équation différentielle devient $Y(s)(ms^2 + k) = F(s)$, soit

$$Y(s) = H(s)F(s), \quad H(s) = \frac{1}{m(s^2 + \omega^2)}.$$

où $H(s)$ est la fonction de transfert du système. Par transformée inverse, on obtient un produit de convolution $y = h * f$ où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du sytème, donnée par (cf. tableau des transformées de Laplace)

$$h(t) = \frac{1}{m\omega} \sin(\omega t) u(t).$$

La fonction $h(t)$ n'est pas intégrable car la fonction sinus n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Par conséquent, le système n'est pas stable.

$$y(t) = h * f(t) = \int_0^\infty h(t-s) f(s)\, ds = \frac{1}{m\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-s)) f(s)\, ds.$$

On intègre seulement à partir de 0 parce que f est causale, on s'arrête à t parce que h est causale ($u(t-s) = 0$ pour $s > t$). 2) Pour calculer la réponse à $f(t) = \sin(\omega_0 t) u(t)$, on utilise le produit de convolution:

$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-s)) f(s)\, ds = \frac{1}{m\omega} \int_0^t \sin(\omega(t-s)) \sin(\omega_0 s)\, ds.$$

En utilisant la formule $\sin p \sin q = \frac{1}{2}[\cos(p-q) - \cos(p=q)$, on obtient:
- pour $\omega \neq \omega_0$

$$y(t) = \frac{1}{m\omega} \frac{\omega_0 \sin(\omega t) - \omega \sin(\omega_0 t)}{\omega_0^2 - \omega^2},$$

- pour $\omega = \omega_0$

$$y(t) = \frac{1}{2m\omega} \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} - t \cos(\omega t) \right).$$

A cause de la pésence du facteur t, cette solution n'est pas bornée. C'est le phénomène de résonnance. On retrouve le fait que le système n'est pas stable.