(3.2) **Déf:** Une suite $\{a_1, \dots, a_s\}$ d'éléments dans un anneau commutatif R est dite régulière si

i) $(a_1, \dots, a_s) \neq R$

(ii) a_i est non diviseur de zéro dans $R/(a_1, \dots, a_{i-1})$ $\forall i = 1 \dots s$

Rq: En géométrie, cela correspond à la notion d'intersection complète.

En général, une suite régulière n'est pas stable par permutation : dans $\mathbb{C}[x, y, z]$, la suite
$$(x, y(1-x), z(1-x))$$
est régulière, mais la suite
$$(y(1-x), z(1-x), x)$$
ne l'est pas car $z(1-x)$ divise zéro dans $\mathbb{C}[x,y,z]/y(1-x)$.

Cependant une suite régulière d'élts homogène dans un anneau gradué est stable par permutation (mais aussi dans un anneau local noethérien).

Nous allons le montrer. Pour cela, nous aurons besoin de deux lemmes.

Lemme : Soit $(a_1, \dots, a_s)$ une suite régulière dans R. La suite obtenue en permutant deux élt consécutifs a_i, a_{i+1} est régulière si et seult si a_{i+1} ne divise pas zéro dans $R/(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Preuve : Il suffit de montrer que a_i n'est pas diviseur de zéro dans $R/(a_1, \dots, a_{i-1}, a_{i+1})$. Soit donc $a \in R$ tq

$$a . a_i = b_1 a_1 + \dots + b_{i-1} a_{i-1} + b_{i+1} a_{i+1} \quad , \quad b_j \in R.$$

Puisque a_{i+1} non-diviseur de zéro ds $R/(a_1, \dots, a_i)$, $\exists\, c_j \in R$ tq $b_{i+1} = c_1 a_1 + \dots + c_i a_i$

Par suite $a_i(a - c_i a_{i+1}) \in (a_1, \dots, a_{i-1})$

donc $a - c_i a_{i+1} \in (a_1, \dots, a_{i-1})$ car a_i non div de zéro dans $R/(a_1, \dots, a_{i-1})$

Finalement $a = 0$ dans $R/(a_1, \dots a_{i-1}, a_{i+1})$. $\square$

Lemme (Nakayama gradué) : Soit $R = \bigoplus R_i$ un anneau gradué et M un R-module gradué tel que $M_i = 0$ pour i suffisamment négatif. On pose $R_+ = \bigoplus_{i>0} R_i$ (idéal des élts de dg >0)

Si $R_+ M = M$ alors $M = 0$.

Preuve : Soit i_0 le plus petit i tel que $M_i \neq 0$.

On a $R_+ M_i \subset M_{i+1}$ en général, donc si $R_+ M = M$ un tel i_0 n'existe pas, i.e $M = 0$. $\square$

Proposition. Soit $(a_1, \dots, a_s)$ une suite régulière d'élts homogènes dans un anneau gradué R, alors toute permutation de cette suite est encore une suite régulière.

Preuve: Il suffit de le montrer pour une permutation de deux entiers successifs. D'après le lemme précédent, i.e que a_{i+1} ne divise pas zéro dans $R/(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Soit a tel que $a \cdot a_{i+1} \in (a_1, \dots, a_{i-1})$

Comme a_{i+1} non div de zéro dans $(a_1, \dots, a_i)$, $\exists\, b_j \in R$ tq

$a = b_1 a_1 + \dots + b_{i-1} a_{i-1} + b_i a_i$.

Par suite $a a_{i+1} = b_1 a_1 a_{i+1} + \dots + b_{i-1} a_{i-1} a_{i+1} + b_i a_i a_{i+1}$

$\in (a_1, \dots, a_{i-1})$.

Donc $b_i a_i a_{i+1} \in (a_1, \dots, a_{i-1})$, donc $b_i a_{i+1} \in (a_1, \dots, a_{i-1})$ car a_i non div de zéro dans $R/(a_1, \dots, a_{i-1})$.

Soit donc $M = \mathrm{ann}_{R/(a_1, \dots, a_{i-1})} (a_{i+1}) = \{ a \in R/(a_1 \dots a_{i-1}) \text{ tq } a \cdot a_{i+1} = 0_{R/(a_1 \dots a_{i-1})} \}$

On vient de voir que $M \subset (a_i) M \subset R_+ M$ (cf $\underset{M}{a} = a_i \cdot b_i$ dans $R/(a_1 \dots a_{i-1})$)

On a tjs $R_+ M \subset M$ donc il vient $M = R_+ M$ et donc $M = 0$, i.e. a_{i+1} ne divise pas zéro dans $R/(a_1 \dots a_{i-1})$ $\square$

<u>Application</u> $f_i(X_1,\dots X_n) = \sum_{\alpha=1,\dots r}' U_{i,\alpha} X^\alpha$ dans ${}_kA[X]$ (cas générique).

Si $r \leq n$ alors $(f_1,\dots,f_r)$ est une suite ${}_kC$ régulière.

En effet, notons $f_i = \varepsilon_i X_i^{d_i} + \dots \quad \forall i=1,\dots, r \leq n$

On construite la suite S' : ($U_{1,\alpha}$ tous sauf ε_1, .., $U_{r,\alpha}$ tous sauf ε_r)

Dans le quotient $\frac{{}_kC}{(S')}$ On a $\overline{f_i} = \varepsilon_i X_i^{d_i}$.

On poursuit maintenant S' en ajoutant $(\varepsilon_1 - X_1, \dots, \varepsilon_r - X_r)$

Maintenant $\overline{f_i} = X_i^{d_i+1}$.

Si l'on montre que $(X_1^{d_1},\dots, X_r^{d_r})$ est régulière de $k[X_1,\dots X_n]$ $(*)$

alors $(S', f_1,\dots,f_r)$ est régulière, de reste par permutation

et donc $(f_1,\dots,f_r, S')$ est régulière, donc $(f_1,\dots f_r)$ l'est.

$(*)$ se voit en l'écrivant : (exo)

Si $X_k^{d_k} P(X_1,\dots X_n) \in (X_1^{d_1},\dots, X_{k-1}^{d_{k-1}})$ alors $P(X_1,\dots X_n) \in (X_1^{d_1} \dots X_{k-1}^{d_{k-1}})$

En fait si $Q(X_1,\dots X_n) \in (X_1^{d_1},\dots, X_{k-1}^{d_{k-1}})$

alors $Q = \sum' Q_i X_i^{d_i}$ donc tout monôme de

Q est divisible par un $X_i^{d_i}$.

<u>Il</u> est clair que la multiplication par $X_k^{d_k}$ ne change pas

cette propriété.

$\square$

Proposition : Soit $(a_1, \dots, a_s)$ une suite régulière dans R anneau comm. alors pour tout

$$g \in Rel(a_1, \dots, a_s) = \{(h_1, \dots, h_s) \in R^s \text{ tq } \sum h_i a_i = 0\}$$

il existe une matrice antisymétrique M dans R tq $g = M \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}$.

Preuve : Par récurrence sur "s".

- $s=1$: $Rel(a_1) = \{0\}$ (cf a_1 non div de zéro) donc $M = (0)$.

- $s=2$: Soit $g = (g_1, g_2)$ tq $g_1 a_1 + g_2 a_2 = 0$.

On a $g_2 a_2 = 0$ ds $R/(a_1)$ donc $g_2 = 0$ ds $R/(a_1)$ i.e

$g_2 = \overline{g_2} a_1$. Par suite $a_1 (g_1 + \overline{g_2} a_2) = 0$ donc

$g_1 + \overline{g_2} a_2 = 0$, i.e. $g_1 = -\overline{g_2} a_2$.

Ainsi : $\begin{pmatrix} g_1 \\ g_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\overline{g_2} \\ \overline{g_2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$.

- On suppose que c'est vrai au cran $s-1$.

Soit $g = (g_1, \dots, g_s)$ tq $\sum g_i a_i = 0 = g_1 a_1 + \dots + g_s a_s$

$g_s a_s \in (a_1, \dots, a_{s-1})$ et donc $g_s \in (a_1, \dots, a_{s-1})$ car a régulière.

Posons $g_s = h_1 a_1 + \dots + h_{s-1} a_{s-1}$. On obtient

$$g_1 a_1 + \dots + g_s a_s = 0 = (g_1 + h_1 a_s) a_1 + \dots + (g_{s-1} + h_{s-1} a_s) a_{s-1}$$

Par hypothèse de récurrence, il existe N antisymétrique tq

$$\begin{pmatrix} g_1 + h_1 a_s \\ \vdots \\ g_{s-1} + h_{s-1} a_s \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}, \text{ soit}$$

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{s-1} \end{pmatrix} = N \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix} - a_s \begin{pmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_{s-1} \end{pmatrix}.$$ Par suite, on obtient :

$$\begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_{s-1} \\ g_s \end{pmatrix} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -h_1 \\ & \vdots \\ & -h_{s-1} \\ h_1 \cdots h_{s-1} & 0 \end{pmatrix} \right]}_{M \text{ antisymétrique}} \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_s \end{pmatrix}$$

$\square$.

3.3 On est maintenant prêt pour démontrer le th d'Hurwitz.

<u>Th</u>: si $r < n$ alors $TF_{m_1}(I) = I$ dans $k G_i$ (cas générique).

<u>Preuve</u>: Soit donc $f \in TF_{m_1}(I)$ et montrons que $f \in I$.

Par hyp, $\exists s$ tq $X_n^s f \in I$. Si $s = 0$ c'est fini.

Sinon, on se ramène à montrer que si $X_n f \in I$ alors $f \in I$ (en effet $X_n^k f = X_n(X_n^{k-1} f)$).