Habilitation à diriger des recherches

présentée à l'Université de Nice Sophia–Antipolis

spécialité **Mathématiques**

Sujet du mémoire :

Approximation et interpolation par des classes de Hardy sur des sous–ensembles du cercle : problèmes extrémaux bornés et problèmes de Loewner

Juliette Leblond

Soutenance le 29 mai 1998 devant le jury composé de :

Jean-Pierre Kahane	président, rapporteur
Edward B. Saff	rapporteur
Nicholas Young	rapporteur
Daniel Alpay	
Laurent Baratchart	
Pierre Bernhard	

On frémit quand on songe à ce qu'il faut
de recherches pour arriver à la vérité
sur le détail le plus futile.

Stendhal, Promenades dans Rome

Table des matières

Le volume présenté en annexe contient les publications suivantes :

[1*] L. Baratchart, J. Leblond et J.R. Partington, Hardy approximation to L^∞ functions on subsets of the circle, *Constructive Approximation*, 12(3): 423-436, 1996, [19].

[2*] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington et N. Torkhani, Robust identification in the disc algebra from band-limited data, *IEEE Trans. on Automatic Control*, 42(9): 1318-1325, 1997, [22].

[3*] L. Baratchart et J. Leblond, Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle with $1 \leq p < \infty$, *Constructive Approximation*, 14(1): 41-56, 1998, [16].

[4*] D. Alpay, L. Baratchart et J. Leblond, Some extremal problems linked with identification from partial frequency data, *Actes de la 10^{me} Conf. Int. sur l'Analyse des Systèmes et l'Optimisation*, J.L. Lions, R.F. Curtain et A. Bensoussan éd., Sophia–Antipolis, Springer-Verlag, LNCIS 185:563-573, 1992, [4].

[5*] L. Baratchart et J. Leblond, Identification harmonique et traces des classes de Hardy sur un arc de cercle, *Actes de la Conf. pour le 60^{me} anniversaire du Prof. Jean Céa*, Sophia–Antipolis, p. 17-29, CEPADUES–Ed., 1992, [14].

[6*] L. Baratchart, J. Leblond et N. Torkhani, Best bounded H^2 extension of partial frequency data, *Actes de la 3^{me} Conférence Européenne de Contrôle, ECC*, Rome, p. 1330-1335, A. Isidori, S. Bittanti, E. Mosca, A. De Luca, M.D. Di Benedetto et G. Oriolo éd., 1995, [23].

[7*] J. Leblond et M. Olivi, Weighted H^2 approximation of transfer functions, *Math. Control Signals Systems (MCSS)*, 11:28–39, 1998, [78].

[8*] D. Alpay et J. Leblond, Traces of Hardy functions and reproducing kernel Hilbert spaces, *Archiv der Math.*, 64:490-499, 1995, [6].

1 Préface

Ce document présente une partie de nos travaux concernant l'approximation dans des classes de Hardy et ses applications à l'identification fréquentielle robuste de systèmes dynamiques qui sont au cœur de notre activité de recherche depuis plusieurs années. Outre les articles [p*], $p = 1, \cdots, 8$, listés ci-dessus et rassemblés en annexe, nous avons contribué sur ce thème aux publications [5, 15, 13, 18, 17, 20, 21] que nous référencerons au cours du texte.
De plus, conformément à l'usage en de telles circonstances, mentionnons ici pour n'y plus revenir deux autres périodes importantes de notre activité scientifique, l'une portant sur la stabilisation d'équations aux dérivées partielles modélisant le comportement dynamique de certaines structures flexibles par des commandes en boucle fermée de rang fini s'exerçant sur la frontière [38, 39, 40, 72, 73, 74, 75, 76, 77], l'autre sur l'étude et la caractérisation des plus

courts chemins dans le plan en présence d'une contrainte sur leur courbure ou sur sa dérivée [33, 34, 35, 36].

2 Introduction

2.1 Problèmes d'approximation et d'interpolation dans les espaces de Hardy

Les résultats établis dans les articles et communications rassemblés en annexe constituent autant d'éléments de réponse à une famille de questions concernant la possibilité d'approcher une fonction de la variable complexe donnée sur un sous–ensemble du cercle unité de $\mathbb{C}$ par une certaine classe de fonctions analytiques et bornées en norme L^p dans le disque unité $\mathbb{D}$ c'est à dire appartenant à l'espace de Hardy H^p du disque. Les notations introduites ici sont définies à la section 2.3.

Etant donnés un entier p, $1 \leq p \leq \infty$, une constante $M \geq 0$, un sous–ensemble K du cercle unité $\mathbb{T}$, une fonction f définie sur K et une fonction h définie sur $\mathbb{T} \setminus K$,

Q_1 : f est-elle la trace sur K d'une fonction appartenant à H^p et dont la norme L^p sur $\mathbb{T} \setminus K$ n'excède pas M ? Dans ce cas, comment reconstruire f dans $\mathbb{D}$?

Q_2 : sinon, peut-on quand même trouver un meilleur approximant g de f en norme L^p sur K parmi les fonctions de H^p dont la distance à h en norme L^p sur $\mathbb{T} \setminus K$ n'excède pas M ? Une telle fonction est-elle unique ? Comment la calculer ?

Q_3 : peut-on compléter f par une fonction κ dont la distance à h en norme L^p sur $\mathbb{T} \setminus K$ n'excède pas M et telle que la fonction concaténée $f \vee \kappa$ définie sur $\mathbb{T}$ soit la plus proche possible de H^p ? Une telle fonction est-elle unique ? Comment la calculer ? Comment sont reliées $f \vee \kappa$ et la fonction g issue de Q_2 ?

Q_4 : pour $p = 2$ et une mesure positive finie μ sur $\mathbb{T}$, comment généraliser Q_2 de façon à trouver un meilleur approximant g_μ de f en norme L^2_μ sur K parmi les fonctions de $H^2(\mu)$ dont la norme L^2_μ sur $\mathbb{T} \setminus K$ n'excède pas M ?

Q_5 : pour $p = \infty$, comment garantir que la solution de Q_2 soit aussi continue sur $\mathbb{T}$ (appartienne à l'algèbre du disque) ?

Outre leur intêret mathématique intrinsèque, ces questions sont motivées et enrichies par une gamme de problèmes provenant de l'automatique et concernant l'identification fréquentielle déterministe robuste de systèmes dynamiques contrôlés, stationnaires, causaux et stables. Des exemples d'applications sont donnés dans les sections 2.2 et 6.

Pour chacun des points Q_i ci–dessus, nous avons ainsi étudié et résolu des questions de nature fondamentale (existence et unicité des solutions, nécessité des conditions suffisantes) mais aussi des questions numériques (caractérisation des solutions, propriétés de convergence des schémas de calcul, majoration des erreurs d'approximation, robustesse face aux erreurs de mesures) et algorithmiques. Bien que nous n'abordions pas les secondes dans ce document, insistons sur le fait que si l'on peut se donner explicitement les fonctions f et h dans les exemples académiques, elles ne sont fournies que par l'intermédiaire de valeurs ponctuelles et bruitées lorsqu'il s'agit de résoudre un problème d'identification harmonique à partir de mesures expérimentales. La reconstruction robuste de f et h (de leurs coefficients de Fourier, plus précisément) nous a conduit à utiliser différents schémas d'interpolation (par des polynômes de Jackson ou de La Vallée Poussin, ou simplement par des splines) [1].

La reconstruction d'une fonction analytique depuis ses valeurs sur un sous–ensemble du bord de son domaine d'analycité, relative à la question Q_1, a été étudiée dès les années 1930 par K. Loewner [81] et par de nombreux auteurs depuis (voir [70, 95, 98, 101] et la bibliographie considérable de [3]). Nous avons abordé dans la publication [8*] la première partie de Q_1 pour $p = 2$ et des espaces de Hilbert de fonctions analytiques à noyaux reproduisants (ainsi que son extension au cas matriciel dans [5]). La seconde partie de Q_1 se résoud alors au moyen de formules intégrales qui remontent à T. Carleman [3] et, pour $1 \leq p < \infty$, nous exhibons dans [3*] et [18] des liens forts et surprenants entre ces questions d'*extrapolation* et les problèmes d'*approximation* de type Q_2. Ces résultats sont regroupés ici dans la section 5.

La question Q_2 est au centre de ce mémoire. Elle concerne une généralisation des problèmes extrémaux (duaux) sur les espaces de Hardy. Ces problèmes sont classiques lorsque l'approximation est effectuée sur tout $\mathbb{T}$; leur traitement systématique dans ce cas est dû à A.J. Macintyre et W.W. Rogosinski [83] dans les années 1950 et a été beaucoup développé depuis, voir [41, ch.8] ou [51, ch.IV], par exemple, et les travaux mentionnés dans les notes et bibliographies de ces ouvrages. Nous avons étendu certaines de leurs propriétés de base (rappelées à la remarque 1) au cas $K \subset \mathbb{T}$; plus précisément, lorsque K et $\mathbb{T} \setminus K$ sont de mesure de Lebesgue positive, nous avons abordé le problème Q_2 de la façon suivante, selon p.

- Pour $p = \infty$, nous étudions dans la publication [1*], ici en section 3.1, l'adhérence dans $L^\infty(K)$ des traces sur K des fonctions de H^∞ et obtenons des propriétés d'existence et d'unicité ainsi qu'une caractérisation des solutions de Q_2 par l'intermédiaire d'un problème de Nehari classique.
- L'existence et l'unicité des solutions de Q_2 lorsque $1 \leq p < \infty$ ont été établies dans [3*] et sont rapportées en section 3.2.
- Dans le cas hilbertien où $p = 2$, nous caractérisons dans [4*] les solutions de Q_2, voir section 3.2.2, ainsi que, dans [5*], celles d'un problème analogue dans un espace de Hardy–Sobolev pour lequel nous obtenons, asymptotiquement, des bornes de l'erreur d'approximation sur K, voir section 3.3.

1. Les procédures de résolution de Q_2, Q_3 pour $p = 2$ et $p = \infty$, de Q_4 et de Q_5 ont été implémentées grâce à des collègues et à des étudiants en thèse ou en stage ; elles donnent des résultats très satisfaisants sur des données provenant d'expérimentations réelles.

Pour $p = 2$, la résolution du problème de complétion Q_3 et l'étude de ses relations avec Q_2 ont fait l'objet de la communication [6*] et sont rassemblées en section 4. Pour $p = \infty$, l'étude des questions Q_2, Q_3 dans une version adaptée à l'approximation méromorphe généralisant le problème d'Adamjan-Arov-Krein (AAK, [2]) et des liens entre elles fait l'objet de [17, 20] soumis pour publication.

La question Q_4 consiste en une généralisation de Q_2 en présence d'un poids, généralisation qui semble particulièrement relevante en vue d'applications à l'identification. Elle est abordée ici dans la section 3.4 tout comme l'étape préliminaire visant à caractériser les mesures μ sur $\mathbb{T}$ telles que $H^2(\mu) = H^2$. Ces résultats, ainsi qu'un algorithme pour l'approximation rationnelle dans $H^2(\mu)$ dans le cas où μ est l'inverse du carré du module d'un polynôme ont été établis dans l'article [7*].

En utilisant les résultats de [1*] concernant Q_2 pour $p = \infty$, nous donnons dans [2*] une réponse à Q_5 que nous appliquons à un problème d'identification robuste dans l'algèbre du disque, voir section 6.

Nous énoncerons et commenterons dans les sections 3 à 6 les principaux résultats des travaux [p*], $p = 1, \cdots, 8$, et en donnerons éventuellement certains éléments de preuve.

2.2 Espaces de Hardy et théorie des systèmes

Nous voudrions donner ici, sans souci d'exhaustivité, une idée des relations entre les espaces de Hardy et la théorie des systèmes linéaires commandés, ainsi que des liens entre l'approximation des fonctions et certains problèmes d'automatique relatifs à l'identification ou à la réduction de l'ordre des modèles (en vue de leur contrôle).
Il s'agit d'illustrer la problématique dans laquelle se sont déroulées nos recherches au sein du projet (équipe) Miaou de l'INRIA à Sophia–Antipolis. En effet, si les questions Q_i soulèvent d'intéressants problèmes d'approximation et de théorie des fonctions, elles sont aussi fortement connectées à des questions d'identification fréquentielle déterministe robuste visant à modéliser un système à partir de mesures expérimentales en respectant le traditionnel et difficile compromis précision / complexité.

Le comportement dynamique d'un système linéaire stationnaire causal monovariable en temps discret est décrit par un opérateur de convolution T_h qui, à une suite $u = (u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en entrée, associe une suite $y = (y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ en sortie :

$$y = T_h\, u \Longleftrightarrow y_k = \sum_{p=0}^{k} h_{k-p}\, u_p\,,$$

où $h = (h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définit la réponse impulsionnelle du système (ou la suite de ces paramètres de Markov) et le caractérise. De manière générale, les propriétés de stabilité du système s'expriment au travers de conditions de bornitude de la relation d'entrée–sortie $u \mapsto y$ (c'est à dire de l'opérateur T_h) ou de contraintes sur le comportement de la réponse impulsionnelle

h. La connexion avec l'analyse complexe s'effectue alors par le biais de la transformée en z de h [45, ch.8] :

$$H(z) = \sum_{k\in\mathbb{N}} h_k\, z^k\,,$$

fonction analytique à l'intérieur d'un disque du plan complexe dont le rayon dépend des propriétés de sommabilité de h et qui définit la fonction de transfert du système[2].

L'opérateur T_h est borné $l^\infty \to l^\infty$ si et seulement si $h \in l^1$ – voir [11, ch.1] ou [94, th.3.2.1]. Dans ce cas, la fonction de transfert H appartient à l'algèbre de Wiener $\mathcal{W}$ $(\cap\, H^\infty)$ et

$$\|T_h\| = \sup_{u\in l^\infty} \frac{\|y\|_{l^\infty}}{\|u\|_{l^\infty}} = \sum_{k\in\mathbb{N}} |h_k| = \|H\|_{\mathcal{W}}\,.$$

Cette propriété de stabilité des systèmes est baptisée *entrée bornée / sortie bornée.*

L'opérateur T_h est borné $l^2 \to l^2$ si et seulement si $H \in H^\infty$ [94, th.3.2.1]. Dans ce cas,

$$\|T_h\| = \sup_{u\in l^2} \frac{\|y\|_{l^2}}{\|u\|_{l^2}} = \|H\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\,,$$

et cette propriété de stabilité, probablement la plus répandue, correspond aux systèmes dits d'*énergie finie.* L'opérateur de Hankel Γ_H de symbole H est alors identiquement nul cependant que, si

$$\check{H}(z) = \frac{1}{z}\, H(\frac{1}{z})\,,$$

l'opérateur de Hankel $\Gamma_{\check{H}}$ de symbole $\check{H}$ vérifie :

$$\|\Gamma_{\check{H}}\| = \|\check{H}\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \|H\|_{L^\infty(\mathbb{T})}\,.$$

C'est dans ce contexte que l'approximation en norme de Hankel et la théorie de Nehari et de AAK prêtent main forte à l'automatique, que ce soit pour fournir un modèle causal reflétant au mieux le comportement d'un système qui ne l'est pas ou pour réduire l'ordre du modèle disponible [2*], [94, ch. 3, 4], [53, 85, 112], ainsi que pour bâtir une loi de commande en boucle fermée stabilisant le système en résolvant le problème dit “standard” du contrôle H^∞ [10, 47].

L'opérateur T_h est borné $l^1 \to l^2$ ou $l^2 \to l^\infty$ si et seulement si $H \in H^2$ [5, th.5.1], [11, 109]. Dans ces deux cas, la norme H^2 de la fonction de transfert est encore égale au gain entrée–sortie du système :

$$\|T_h\| = \sup_{u\in l^1} \frac{\|y\|_{l^2}}{\|u\|_{l^1}} = \sup_{u\in l^2} \frac{\|y\|_{l^\infty}}{\|u\|_{l^2}} = \|H\|_{L^2(\mathbb{T})}\,.$$

Du point de vue stochastique, la norme H^2 du transfert est aussi égale à la variance de la sortie lorsque l'entrée est un bruit blanc ; ceci se généralise au cas d'un processus de Wiener

2. Traditionnellement, la fonction de transfert est définie par $\sum_{k\in\mathbb{N}} h_k\, z^{-k}$ et est analytique à l'*extérieur* d'un disque de $\mathbb{C}$. Mais c'est une simple convention et l'on se ramène à la présente situation par la transformation $z \mapsto 1/z$.

en entrée, la variance de la sortie étant alors donnée par la norme $H^2(\mu)$ du transfert pour une mesure positive finie μ sur $\mathbb{T}$ déterminée par la densité spectrale de l'entrée [8, 56, 102]. Ainsi, l'approximation L^2_μ d'une fonction de transfert, voir [7*], permet de bâtir un modèle approchant le système en considération au sens du *minimum de variance* (de l'erreur de sortie). C'est d'ailleurs la base des approches paramétriques classiques des problèmes d'identification, [80].
De plus, que ce soit en norme L^2, L^∞ ou Hankel, des critères d'approximation pondérés sont couramment utilisés en identification pour représenter la fiabilité des données dans une certaine bande de fréquence [71, 111] ou pour faire intervenir le contrôleur à bâtir sur le modèle [52].

Enfin, les inégalités de Hausdorff–Young (voir par exemple [41]) fournissent des relations entre les propriétés de bornitude de la réponse impulsionnelle h d'un système et l'appartenance à certains espaces de Hardy du transfert H associé [109].

Ainsi, les fonctions de transfert appartiennent aux espaces de Hardy H^p, la valeur de p spécifiant les propriétés de stabilité requises ou souhaitées des systèmes en considération (les choix $p = 2$ et $p = \infty$ représentant un intérêt particulier). On conçoit alors qu'interviennent en automatique des problèmes d'approximation au sens des différentes normes évoquées ci–dessus, normes reliées les unes aux autres par :

$$\|h\|_{l^2} = \|H\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq \|H\|_{L^\infty(\mathbb{T})} \leq \|H\|_{\mathcal{W}} = \|h\|_{l^1} .$$

Les procédures classiques d'identification harmonique constituent le point de départ des problèmes d'identification fréquentielle. Elles permettent de se doter d'un certain nombre de valeurs ponctuelles (bruitées) H_m de la fonction de transfert H (continue sur $\mathbb{T}$ si $h \in l^1$, par définition) aux points $e^{i\theta_m}$, ceci au moyen de mesures expérimentales des sorties y^s , y^c du système associées aux entrées $u^s = (\sin k\theta_m)_{k\geq 0}$ et $u^c = (\cos k\theta_m)_{k\geq 0}$. Il est aisé de voir que, lorsque k est assez grand, y^s_k et y^c_k se comportent respectivement comme les parties imaginaire et réelle de $e^{-ik\theta_m}\, H(e^{i\theta_m})$ et $H_m = e^{ik\theta_m}\,(y^c_k + i\, y^s_k)$.
Une approche de l'identification du système consiste alors à trouver une fonction appartenant à H^p interpolant approximativement au moins les données ponctuelles $(e^{i\theta_m}, H_m)$ sur $\mathbb{T}$. Nous utilisons pour ce faire des procédures en deux temps généralisant celles proposées dans [55, 60, 92] pour H^∞ lorsque les points de mesure sont répartis sur tout $\mathbb{T}$, hypothèse peu réaliste. En effet, les systèmes n'ont en général un comportement (presque) linéaire que dans une bande de fréquences limitée, et les mesures H_m ne sont disponibles qu'en des points $e^{i\theta_m}$ appartenant à un strict sous–ensemble de $\mathbb{T}$; à l'extérieur de celui–ci, certaines informations concernant le comportement de H sont parfois accessibles. C'est le cas de bien des problèmes de modélisation en traitement du signal où, par exemple, les caractéristiques d'un dispositif sont données de manière stricte dans sa bande passante et, en dehors, sous forme du voisinage d'un gabarit.

Ainsi, si l'on suppose $e^{i\theta_m} \in K \subset \mathbb{T}$, l'étape préliminaire consiste à se doter d'une fonction $f \in C(K)$ interpolant $(e^{i\theta_m}, H_m)$ (de façon robuste, voir section 6) ; ceci s'effectue à l'aide de splines ou de polynômes trigonométrique de Jackson ou de La Vallée Poussin [91, 93, 109].

La deuxième étape consiste alors à trouver une fonction $g \in H^p$ approchant f dans $L^p(K)$ fournissant un modèle de dimension infinie (grande, numériquement) du système. Or, en l'absence de contrainte supplémentaire sur la fonction g cherchée, ce problème est mal posé en général, comme le montrent la proposition 1 et [94, th.3.5.2], par exemple. Pour venir à bout de cette difficulté, et pour prendre en compte d'éventuelles informations sur le comportement du système à l'extérieur de la bande de fréquences K, nous formulons ce problème au travers de la question Q_2 (ou Q_3, Q_4, Q_5).
La fonction g de H^p ainsi obtenue est la fonction de transfert d'un système de dimension infinie, et une étape supplémentaire d'approximation de dimension finie et / ou de réduction de l'ordre de ce modèle est alors nécessaire dans bien des cas. Ceci peut s'effectuer au moyen d'une approximation de type AAK déja évoquée plus haut, mais aussi en utilisant certaines réalisations[3] (représentations internes du systèmes ou modèles dans l'espace d'état) de g (voir entre autres [37, 47, 53, 57, 87, 111]), ou encore en exhibant un approximant rationnel de g de degré borné selon une norme convenable. Le degré du dénominateur d'une fonction de transfert rationnelle majore en effet la dimension des matrices de dynamique de ses réalisations, la dimension minimale correspondant au degré de MacMillan du système.
Le problème de l'approximation rationnelle en norme L^2 de fonctions de H^2 est à l'origine du projet Miaou. De nombreux résultats concernant le comportement ou l'unicité de ces approximants rationnels ont été obtenus, voir par exemple [11, 24, 25, 27, 30], ainsi que des algorithmes de résolution dans le cas scalaire [12, 26], [7*], comme dans le cas multivariable (entrée et sortie du système à valeurs vectorielles) [48, 49, 50]. Ceux–ci sont implémentés dans le logiciel *Hyperion* [54] au sein duquel la procédure de résolution de Q_2 pour $p = 2$ est une étape préliminaire. De même, un programme résolvant Q_2 pour $p = \infty$ et Q_5 a été mis au point [109].

Finalement, les considérations précédentes restent valables pour les systèmes en temps continu auxquels sont associés les espaces de Hardy du demi–plan droit, la transformée de Laplace remplaçant alors la transformée en z. Les problèmes d'identification, les questions Q_i et les problèmes d'approximation présentés ici se résolvent de manière analogue dans ce contexte, les résultats se traduisant dans le contexte du demi–plan par le biais d'une transformation de Möbius.

2.3 Notations et définitions

On désignera par $\mathbb{D}$ le disque unité ouvert du plan complexe $\mathbb{C}$, par $\mathbb{T}$ le cercle unité et par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$ pour laquelle *tous les sous–ensembles de* $\mathbb{T}$ *considérés ici seront supposés mesurables.*
Pour $1 \leq p \leq \infty$, $L^p(\mathbb{T})$ est l'espace de Lebesgue classique muni de la norme $\| \ \|_{L^p(\mathbb{T})}$ et H^p l'espace de Hardy du disque, ensemble des fonctions analytiques dans $\mathbb{D}$ et bornées en norme L^p sur les cercles centrés en 0 et de rayon $r < 1$. Muni de la norme $\| \ \|_{L^p(\mathbb{T})}$, l'espace H^p est un

3. En vue de ces applications à l'automatique, dans la mesure où l'identification d'un système est généralement suivie de sa régulation ou de son contrôle, différentes procédures de résolution des problèmes de type AAK au moyen de réalisations de la fonction de transfert plutôt que par une décomposition en valeurs singulières de l'opérateur de Hankel associé (voir remarque 1) ont été élaborées.

espace de Banach que l'on peut identifier au sous-espace fermé de $L^p(\mathbb{T})$ des fonctions dont les coefficients de Fourier d'indice négatif sont nuls. On trouvera dans [41, 51, 61, 66, 103] les définitions et propriétés précises des espaces de Hardy. Pour $1 < p < \infty$, on notera P_{H^p} la projection orthogonale de $L^p(\mathbb{T})$ sur H^p et, pour p = 2, si $\bar{H}_0^2$ désigne le complémentaire orthogonal de H^2 dans $L^2(\mathbb{T})$, la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur $\bar{H}_0^2$ sera notée $P_{\bar{H}_0^2}$. Pour $f \in L^\infty(\mathbb{T})$, soient Γ_f l'opérateur de Hankel de symbole f :

$$\begin{array}{rccl} \Gamma_f : & H^2 & \to & \bar{H}_0^2 \\ & g & \mapsto & P_{\bar{H}_0^2}(f\,g) \end{array} ,$$

et Φ_f l'opérateur de Toeplitz de symbole f :

$$\begin{array}{rccl} \Phi_f : & H^2 & \to & H^2 \\ & g & \mapsto & P_{H^2}(f\,g) \end{array} .$$

Soit $A(\mathbb{D}) = H^\infty \cap C(\mathbb{T})$, l'algèbre du disque.
On notera d_∞ et d_2 les distances (induites par les normes) dans $L^\infty(\mathbb{T})$ et $L^2(\mathbb{T})$.
Soit R_N le sous–ensemble de $L^\infty(\mathbb{T})$ constitué des fonctions rationnelles sans pôle sur $\mathbb{T}$ et admettant au plus N pôles dans $\mathbb{D}$. Dans tous les cas, on notera $\| \ \|$ la norme d'opérateur et I l'opérateur identité.
Pour tout $E \subset \mathbb{T}$, $C(E)$ désigne l'espace des fonctions continues sur E, χ_E la fonction caractéristique de E, $L^p(E) = \{f\,,\ \chi_E\, f \in L^p(\mathbb{T})\}$, muni de la norme $\|f\|_{L^p(E)} = \|\chi_E\, f\|_{L^p(\mathbb{T})}$ et, pour $p = 2$, du produit scalaire $(\ ,\ )_{L^2(E)}$. La fonction concaténée valant f sur E et h sur $\mathbb{T} \setminus E$ sera notée $f \vee h = \chi_E\, f + \chi_{\mathbb{T}\setminus E}\, h$ (E étant précisé dans le contexte). Le sous–ensemble $H^p_{|_E} \subset L^p(E)$ est défini par les traces sur E des fonctions de H^p.
Si μ étant une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$, l'espace de Hilbert $L^2_\mu(\mathbb{T})$ est celui des fonctions f telles que

$$\|f\|_{L^2_\mu(\mathbb{T})} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(e^{i\theta})|^2 d\mu(\theta) < \infty\,,$$

l'espace de Hardy pondéré $H^2(\mu)$ est l'adhérence de $A(\mathbb{D})$ dans $L^2_\mu(\mathbb{T})$ et, si $E \subset \mathbb{T}$, $L^2_\mu(E) = \{f\,,\ \chi_E\, f \in L^2_\mu(\mathbb{T})\}$ muni de la norme $\|f\|_{L^2_\mu(E)} = \|\chi_E\, f\|_{L^2_\mu(\mathbb{T})}$ (lorsque la mesure μ considérée est la mesure de Lebesgue λ, on notera pour simplifier $L^2_\lambda(E) = L^2(E)$ et aussi $d\lambda(\theta) = d\theta$).

3 Problèmes extrémaux bornés

Soient $K \subset \mathbb{T}$ et $1 \leq p \leq \infty$. Pour $f \in L^p(K)$, $h \in L^p(\mathbb{T} \setminus K)$, et $M \geq 0$, introduisons le sous–ensemble $\mathcal{B}^p_{M,h}$ de H^p :

$$\mathcal{B}^p_{M,h} = \{g \in H^p\,,\ \|h - g\|_{L^p(\mathbb{T}\setminus K)} \leq M\}\,.$$

La question Q_2 de la section 2.1 concerne la possibilité d'approcher f par une fonction de $\mathcal{B}^p_{M,h}$ et se formule comme le problème extrémal $\mathbf{PEB}_p$ suivant.

$\mathbf{PEB}_p$: si K est un sous–ensemble du cercle unité $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive, et pour p, f, h et M comme ci–dessus, on cherche une fonction $g_0 \in \mathcal{B}^p_{M,h}$ telle que

$$\|f - g_0\|_{L^p(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}^p_{M,h}} \|f - g\|_{L^p(K)} = \beta_p(f, h, M) . \tag{1}$$

Pour simplifier, il nous arrivera de noter $\beta_p = \beta_p(M) = \beta_p(f, h, M)$ selon le contexte.

Remarque 1 Lorsque $K = \mathbb{T}$, il s'agit d'approcher $f \in L^p(\mathbb{T})$ sur $\mathcal{B}^p_{M,h} = H^p$, et de résoudre le problème extrémal (dual) classsique $\mathbf{PE}_p$ dont les propriétés d'existence et d'unicité des solutions s'obtiennent comme conséquences de la relation de dualité

$$\min_{g \in H^p} \|f - g\|_{L^p(\mathbb{T})} = \sup_{\substack{\phi \in H^q \\ \|\phi\|_{L^q(\mathbb{T})} \leq 1}} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(z)\, \phi(z)\, dz \, , \tag{2}$$

où q est l'exposant conjugué de p ($1/p + 1/q = 1$). La relation (2) découle elle–même du théorème de Hahn–Banach (voir [41, ch.8] ou [51, ch.IV], par exemple) et son terme de droite correspond au problème extrémal à proprement parler. Dans ce cas,

– le problème $\mathbf{PE}_p$ admet toujours une solution.

– Pour $1 \leq p < \infty$, la solution de $\mathbf{PE}_p$ est unique. Si $p = 2$, la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T})$ sur H^2 coincide avec la projection de meilleure approximation et la solution de $\mathbf{PE}_2$ s'obtient simplement en tronquant les coefficients de Fourier d'indice négatif de f : $g = P_{H^2} f$. Pour $p \neq 2$, et même si $p > 1$, l'opérateur de meilleure approximation dans H^p n'est plus donné par la projection orthogonale. Il est cependant possible de décrire implicitement la solution de $\mathbf{PE}_p$ lorsque f est rationnelle, voir [41, 8.4] ; lorsque $p > 2$, et pour toute fonction f de $L^p(\mathbb{T})$, il semble que l'on puisse encore la construire au moyen des éléments singuliers d'un opérateur de type Hankel [28, 107]. Mentionnons aussi l'article [68] concernant les opérateurs de meilleure approximation de $L^1(\mathbb{T})$ sur certains sous–espaces fermés (et, entre autres, $\mathbf{PE}_1$) et les propriétés d'hérédité associées.

– $\mathbf{PE}_\infty$ est l'extension de Nehari dont la solution est unique et l'erreur est circulaire dès que la fonction f appartient à $H^\infty + C(\mathbb{T})$, condition nécessaire et suffisante pour que l'opérateur de Hankel Γ_f de symbole f soit compact, en vertu du théorème de Hartman [90, th.3.20]. La solution est alors caractérisée par la plus grande valeur singulière $\sigma_0(f)$ et la paire de Schmidt associée de Γ_f. Lorsque f est en plus rationnelle, on résoud $\mathbf{PE}_\infty$ au moyen d'une décomposition en valeurs singulières classique – *SVD* – de Γ_f, voir [90, ch.6] ou [112, ch.15,16]. D'après le théorème de Nehari, on obtient en particulier :

$$\beta_\infty(f) = \sigma_0(\Gamma_f) = \|\Gamma_f\| \, , \tag{3}$$

pour la distance de f à H^∞ (qui coincide avec sa norme de Hankel, voir [53]).

Bien que la relation de dualité (2) ne se généralise pas à l'approximation sur $\mathcal{B}^p_{M,h}$, nous avons obtenu pour $K \subset \mathbb{T}$ des propriétés de $\mathbf{PEB}_p$ et de ses solutions analogues à celles de $\mathbf{PE}_p$ rappelées ci–dessus. Les arguments de preuve reposent sur la compacité faible ou faible-* des boules des espaces de Banach impliqués et les propriétés de convexité des classes d'approximants. Cependant, ils diffèrent encore sensiblement selon que $p = 1$, que $1 < p < \infty$ (section 3.2), auquel cas la convexité uniforme de $L^p(\mathbb{T})$ tient le rôle de (2) ou $p = \infty$ (section 3.1).

Notons par ailleurs que, si $f \notin \mathcal{B}^p_{M,h}$, le problème $\mathbf{PEB}_p$ peut se ramener implicitement à un problème extrémal dual classique (sur $\mathbb{T}$) de type $\mathbf{PE}_p$ Du point de vue qualitatif, ceci ne nous est utile ici que pour $\mathbf{PEB}_\infty$ (voir théorème 3) ; en revanche, les procéures de calcul des solutions que nous proposons ici pour $p = 2, \infty$ et qui sont données dans [28, 107] pour $2 < p < \infty$ reposent toutes sur cette transformation et sur les propriétés de son caractère implicite.

Introduisons l'ensemble $\mathcal{C}^p_{M,h}$ des traces sur K des fonctions de $\mathcal{B}^p_{M,h}$:

$$\mathcal{C}^p_{M,h} = \{g_{|_K} \,,\ g \in \mathcal{B}^p_{M,h}\} \,.$$

3.1 Problème extrémal borné dans H^∞

Les résultats se rapportant à $\mathbf{PEB}_\infty$ sont établis dans l'article [1*]. Enonçons pour commencer un résultat de (non) densité (en contraste avec la proposition 2 relative à $p < \infty$) destiné, entre autres, à fournir des conditions suffisantes pour que $\mathcal{B}^\infty_{M,h} \neq \emptyset$:

Théorème 1 ([1*,th.1]) *Si $K \subset \mathbb{T}$ est tel que $\lambda(K) > 0$, alors :*
(i) $H^\infty_{|_K}$ n'est pas dense dans $L^\infty(K)$.
(ii) Si K est ouvert, l'adhérence de $H^\infty_{|_K}$ dans $L^\infty(K)$ est contenue dans $H^\infty_{|_K} + C(K)$.
(iii) Si K est un sous–ensemble fermé propre de $\mathbb{T}$, alors $A(\mathbb{D})_{|_K}$ est dense dans $C(K)$ et l'adhérence de $H^\infty_{|_K}$ dans $L^\infty(K)$ contient $(H^\infty + C(\mathbb{T}))_{|_K}$.

Observons cependant que le point (iii) du théorème 1 ne garantit pas l'existence d'une solution à $\mathbf{PEB}_\infty$; en effet, si $f \notin H^\infty_{|_K}$, la norme L^∞ de ses approximants uniformes (sur K) dans H^∞ diverge sur $\mathbb{T} \setminus K$ comme l'indique la proposition suivante.

Proposition 1 ([1*, prop.2], [3*, prop.3]) *Soient $1 \leq p \leq \infty$, $K \subset \mathbb{T}$, $\lambda(K) > 0$, et $f \in L^p(K)$. Soit (g_n) une suite de fonctions appartenant à H^p telle que ${g_n}_{|_K}$ converge vers f dans $L^p(K)$. Si f n'est pas la trace d'une fonction de H^p, alors $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{L^p(\mathbb{T}\setminus K)} = \infty$.*

Remarque 2 Il est intéressant de formuler la proposition 1 comme le principe suivant de caractérisation des traces sur K de fonctions de H^p :
soit $f \in L^p(K)$ et une famille (g_n) de fonctions de H^p telle que, lorsque $n \to \infty$,
(i) ${g_n}_{|_K}$ converge vers f dans $L^p(K)$,
(ii) g_n converge dans H^p si $f \in H^p_{|_K}$;
alors, $f \in H^p_{|_K}$ si (et seulement si) $\|g_n\|_{L^p(\mathbb{T}\setminus K)}$ reste bornée.

Des liens constructifs entre ce principe et certains problèmes d'interpolation et d'extrapolation, ainsi que les relations entre ceux–ci et $\mathbf{PEB}_p$ sont établis dans [3*] et [18] et décrits à la section 5.

On peut trouver dans [64, ch.11] le résultat de densité de $A(\mathbb{D})_{|K}$ dans $C(K)$ (point (iii) du théorème 1) ainsi qu'un analogue de la proposition 1 en vertu duquel les auteurs pointent la “bêtise fondamentale du contrôle H^∞” qui consiste à n'être préoccupé que par une bande de fréquences et donc à ne spécifier aucun comportement à l'extérieur de celle–ci.

En revanche, l'adjonction d'une contrainte sur $\mathbb{T} \setminus K$ rend le problème $\mathbf{PEB}_\infty$ bien posé :

Théorème 2 ([1*, th.2]) *Si $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$, alors :*
(i) $\mathbf{PEB}_\infty$ admet une solution g_0 dès que $\mathcal{B}^\infty_{M,h} \neq \emptyset$.
Si $f \notin \mathcal{C}^\infty_{M,h}$,
(ii) et si $\beta_\infty \neq d_\infty(f, H^\infty_{|K})$, toute solution g_0 vérifie

$$\|h - g_0\|_{L^\infty(\mathbb{T}\setminus K)} = M \, . \tag{4}$$

(iii) Lorsque $f \vee h$ appartient à $H^\infty + C(\mathbb{T})$, la solution g_0 est unique et les fonctions $f - g_0$ et $h - g_0$ sont de module constant égal à β_∞ et M p.p. sur K et $\mathbb{T} \setminus K$, respectivement.

Remarquons au passage que l'on obtient – en terme d'existence et d'unicité de la solution – des résultats comparables à ceux relatifs au problème de Nehari classique ($K = \mathbb{T}$) rappelés à la remarque 1.

La preuve du théorème 2, [1*, sec.3], repose sur les propriétés suivantes.

- Tout d'abord, l'existence d'une solution, point (i), est une conséquence de ce que $\mathcal{C}^\infty_{M,h}$ est convexe, ce qui se voit facilement, et faiblement–* fermé dans $L^\infty(K)$, comme établi dans [1*, th.3].
- La saturation de la contrainte, (ii), provient d'un argument simple de convexité.
- Enfin, le point (iii) repose sur une forme implicite d'équivalence entre $\mathbf{PEB}_\infty$ et le problème de Nehari classique $\mathbf{PN}$ garantie par le théorème 3 ci–dessous.

  Soient ρ une constante positive et w_ρ la fonction extérieure de H^∞ de module égal à 1 sur $\mathbb{T} \setminus K$ et à ρ sur K définie par :

$$w_\rho(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\,\pi}\,\log\rho\int_K \frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\,dt\right\} \, . \tag{5}$$

  $\mathbf{PN}$: avec les notations du problème $\mathbf{PEB}_\infty$ et si $f \notin \mathcal{C}^\infty_{M,h}$ (de sorte que $\beta_\infty > 0$), on cherche une fonction $v_0 \in H^\infty$ telle que

$$\|(f \vee h) w_{\frac{M}{\beta_\infty}} - v_0\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = \min_{v \in H^\infty} \|(f \vee h) w_{\frac{M}{\beta_\infty}} - v\|_{L^\infty(\mathbb{T})}. \tag{6}$$

  Les problèmes $\mathbf{PEB}_\infty$ et $\mathbf{PN}$ sont reliés l'un à l'autre de la façon suivante :

Théorème 3 ([1*, th.4]) *Toute solution v_0 du problème* **PN** *est telle que $g_0 = v_0\, w^{-1}_{\frac{M}{\beta_\infty}}$ est solution du problème* $\mathbf{PEB}_\infty$ *; inversement, toute solution g_0 du problème* $\mathbf{PEB}_\infty$ *donne lieu à une solution $v_0 = g_0 w_{\frac{M}{\beta_\infty}}$ du problème* **PN**.

Ainsi, puisque w_ρ est inversible dans H^∞ ($w_\rho^{-1} = w_{1/\rho}$) et que $H^\infty + C(\mathbb{T})$ est une sous–algèbre de $L^\infty(\mathbb{T})$, le point (iii) du théorème 2 s'obtient comme conséquence des propriétés d'unicité et de circularité de l'erreur pour le problème de Nehari classique **PN** de type $\mathbf{PE}_\infty$ rappelées à la remarque 1.

Si de plus K est une union finie d'arcs de cercle et si $f \vee h \in H^\infty + C(\mathbb{T})$ alors, en vertu du point (iii) du théorème 1, $\mathcal{B}^\infty_{M,h} \neq \emptyset$ et $d_\infty(f, H^\infty_{|K}) = 0 < \beta_\infty$. Dans ce cas, le théorème 3 fournit aussi en principe le moyen de résoudre constructivement $\mathbf{PEB}_\infty$ au moyen des éléments singuliers de l'opérateur de Hankel Γ de symbole $(f \vee h)w_{\frac{M}{\beta_\infty}}$. En effet, bien que **PN** soit implicite en β_∞, on peut déduire de (6) que la bonne valeur de β_∞ est celle qui rend la valeur de ce problème égale à M (elle coincide avec $\|\Gamma\|$ d'après le théorème de Nehari, voir (3)). Ceci nous permet de calculer β_∞ itérativement par dichotomie, voir section 6. Il faut cependant prendre garde au fait que ces calculs ne sont effectifs que lorsque Γ est de rang fini, donc si son symbole est rationnel ; l'approximation rationnelle de $(f \vee h)w_{\frac{M}{\beta_\infty}}$ n'est alors pas la principale difficulté qui réside ici dans le défaut de continuité de l'opérateur de meilleure approximation analytique ou méromorphe [88]. La résolution effective de $\mathbf{PEB}_\infty$ est étudiée dans [2*, sec.6] mais la convergence de l'algorithme n'est établie, génériquement, que pour une contrainte en module assez régulière sur $\mathbb{T} \setminus K$, voir [17, 109] et la présente conclusion.

Remarque 3 Lorsque $K = \mathbb{T}$, le théorème de Carleson–Jacobs [51, th.IV.2.1] garantit la continuité sur $\mathbb{T}$ de la solution du problème de Nehari $\mathbf{PE}_\infty$ si la fonction F à approximer est Dini–continue, c'est à dire si son module de continuité

$$\omega(\delta) = \sup_{|\theta - \phi| < \delta} |F(\theta) - F(\phi)| ,$$

vérifie

$$\int_0^\epsilon \frac{\omega(t)}{t} dt < \infty ,$$

pour un $\epsilon > 0$. En revanche, même si $f \vee h$ est très régulière, la solution g_0 de $\mathbf{PEB}_\infty$ est en général discontinue sur $\mathbb{T}$. En effet, supposons par exemple que K soit l'arc de cercle $(-\theta_0, \theta_0)$ et que $f \vee h$ soit Hölder d'ordre α sur $\mathbb{T}$, $0 < \alpha \leq 1$. Soit alors P un polynôme tel que $(f \vee h - P)(\pm\theta_0) = 0$; dans ce cas, $F = (f \vee h - P)\, w_{\frac{M}{\beta_\infty}}$ est encore Hölder d'ordre α et en particulier Dini–continue. La solution $u_0 \in H^\infty$ du problème de Nehari associé à F est alors continue sur $\mathbb{T}$ (et même Hölder d'ordre α). Cependant, d'après le théorème 3, on a $g_0 = P + u_0\, w^{-1}_{\frac{M}{\beta_\infty}}$ qui est discontinue en $\pm\theta_0$ en général (à moins que $M = \beta_\infty$, ce que nous ne savons pas garantir). Nous pallions en section 6 cette discontinuité de g_0 en lui imposant sur $\mathbb{T} \setminus K$ une contrainte (variable) en module plutôt qu'en norme.

Mentionnons enfin le contre–exemple à l'unicité établi dans [1*], généralisation d'un cas classique de non–unicité de la solution de $\mathbf{PE}_\infty$ ([41, 8.3(iii)], [51, IV.1.5], [69, VII.A.2]). Soient $K = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $M = 1$, $f \in L^\infty(K)$ définie par :

$$f = \begin{cases} -1 & \text{sur } [0, \frac{\pi}{2}]\,, \\ 1 & \text{sur } [-\frac{\pi}{2}, 0)\,, \end{cases}$$

et $h \equiv 0$ sur $\mathbb{T} \setminus K$. Le problème extrémal borné $\mathbf{PEB}_\infty$ admet alors au moins deux solutions, l'une d'entre elle étant $g_0 \equiv 0$.

3.2 Problèmes extrémaux bornés dans H^p, $1 \leq p < \infty$

Les résultats se rapportant à $\mathbf{PEB}_p$ pour $1 \leq p < \infty$ proviennent de la publication [3*]. Commençons par un résultat de densité, qui contraste avec le point (i) du théorème 1.

Proposition 2 *Soient $1 \leq p < \infty$ et $K \subset \mathbb{T}$ tel que $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$. Alors $H^p_{|_K}$ est dense dans $L^p(K)$.*

Ainsi, pour $p < \infty$, la proposition 2 garantit que $\mathcal{B}^p_{M,h} \neq \emptyset$ si $\lambda(K) > 0$; mais la proposition 1 indique qu'elle ne fournit pas pour autant de solution à $\mathbf{PEB}_p$, d'où la nécessité ici encore d'imposer une contrainte sur $\mathbb{T} \setminus K$.

3.2.1 Existence et unicité des solutions

Théorème 4 ([3*, th.2]) *Si $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$, le problème extrémal borné $\mathbf{PEB}_p$ admet une unique solution g_0 ; de plus, dès que $f \notin \mathcal{C}^p_{M,h}$,*

$$\|h - g_0\|_{L^p(\mathbb{T} \setminus K)} = M\,. \tag{7}$$

La preuve du théorème 4, voir [3*, sec.4], repose sur :

- le fait que $\mathcal{C}^p_{M,h}$ est un sous-ensemble convexe et fermé [3*, th.3] de l'espace de Banach $L^p(K)$. Celui-ci étant uniformément convexe lorsque $1 < p < \infty$, il existe dans ce cas une projection de meilleure approximation sur $\mathcal{C}^p_{M,h}$, voir par exemple [32, 3.II.1], d'où l'existence et l'unicité de g_0 si $p > 1$.

- Pour $p = 1$, on peut considérer H^1 comme un ensemble de mesures complexes sur $\mathbb{T}$ agissant sur $C(\mathbb{T})$ et l'existence de g_0 s'obtient en utilisant la représentation des fonctions de $L^\infty(\mathbb{T})$ comme quotient d'un élément de $H^\infty + C(\mathbb{T})$ par un produit de Blaschke [9] et des arguments de compacité faible-* [3*, lem.1].

- La saturation de la contrainte découle ici aussi de la convexité des normes L^p et de la proposition 2.

- La Gâteaux-différentiabilité de la norme L^1 en toute fonction non nulle, [3*, lem.2], [32, 3.I.2], nous permet alors de conclure à l'unicité de g_0 si $p = 1$.

Si la résolution de $\mathbf{PEB}_2$ est relativement aisée comme nous le montrons à la section 3.2.2, l'obtention d'une solution de $\mathbf{PEB}_p$ pour $2 < p < \infty$ est plus délicate [28, 107].

3.2.2 Résolution du problème extrémal borné dans H^2

L'existence et l'unicité de la solution g_0 de $\mathbf{PEB}_2$ sont des conséquences du théorème 4. Le problème $\mathbf{PEB}_2$ a été étudié dans [4*] lorsque $h = 0$ et dans [70] pour $f = 0$ (dans l'espace de Hardy du demi–plan complexe supérieur). Nous décrivons ici la procédure de calcul de g_0 établie dans [3*, sec.5] dans le cas général où $f \in L^2(K)$ et $h \in L^2(\mathbb{T} \setminus K)$. Soit $\Phi = \Phi_{\chi_{\mathbb{T}\setminus K}}$ l'opérateur de Toeplitz de symbole $\chi_{\mathbb{T}\setminus K}$.

Théorème 5 ([3*, th.4]) *Lorsque $f \notin \mathcal{C}^2_{M,h}$, la solution de $\mathbf{PEB}_2$ est donnée par l'équation implicite*

$$g_0 = (I + \ell\,\Phi)^{-1}\, P_{H^2}\ (f \vee (\ell + 1)\, h)\ , \tag{8}$$

pour l'unique $\ell \in (-1, +\infty)$ tel que $\|g_0 - h\|_{L^2(\mathbb{T}\setminus K)} = M$.

Le paramètre ℓ est un multiplicateur de Lagrange qui exprime la dépendance entre la dérivée du carré du critère $\xi(g) = \|f - g\|^2_{L^2(K)}$ et la normale au point g_0 à la sous–variété de H^2 définie par le bord $\delta\,\mathcal{B}^2_{M,h}$ de $\mathcal{B}^2_{M,h}$, voir [4*, sec.3]. Le spectre de Φ est égal à l'intervalle $[0, 1]$, voir par exemple [101, ch.3], de sorte que $I + \ell\,\Phi$ est inversible pour $\ell > -1$.

Le caractère monotone décroissant et régulier de la dépendance implicite du paramètre ℓ en fonction de la contrainte M, voir [4*, prop.4], permet de l'inverser et de noter lorsque cela s'avère utile $g_0 = g_0(f, \psi, \ell)$ la solution de $\mathbf{PEB}_2$ associée à f, ψ et $M(\ell)$ donnée par (8).

Le corollaire 1 de la section 5 fournit une expression équivalente de g_0 au moyen d'une formule intégrale de Carleman.

Nous prouvons le théorème 5 en trois étapes. Nous avons d'abord établi la caractérisation (8) de g_0 dans le cas où $h = 0$ dans [4*, (8)]. A cette fin, nous prouvons que g_0 est aussi une solution particulière de l'équation aux points critiques obtenue en dérivant ξ sur l'espace tangent en g à $\delta\,\mathcal{B}^2_{M,0}$. Un simple changement de variable entraîne alors la validité de (8) pour $h \in H^2_{|\mathbb{T}\setminus K}$. En utilisant la densité de $H^2_{|\mathbb{T}\setminus K}$ (proposition 2), nous l'obtenons enfin dans le cas général où $h \in L^2(\mathbb{T} \setminus K)$.

Dans le but de construire un algorithme de calcul de g_0 sur la base de son expression (8), nous avons prouvé que l'erreur

$$e_2(\ell) = \|f - g_0(\ell)\|_{L^2(K)} = \beta_2(f, h, M(\ell)) \tag{9}$$

décroît vers 0 lorsque ℓ décroît vers -1, [4*, sec.3]. Une dichotomie sur (8), nécessitant d'itérer l'inversion d'une matrice de Toeplitz de grande dimension[4], fournit donc la valeur de ℓ correspondant à la contrainte M imposée, et l'on calcule ainsi g_0 et la valeur de l'erreur e_2 obtenue ; si celle–ci semble trop importante, l'introduction d'une contrainte plus lâche ou le choix d'un meilleur gabarit h, une de nos motivations pour le problème de complétion de la section 4, permettront de la faire décroître.

4. Sur la base de Fourier en tous cas ; l'utilisation de bases de Szegö (et peut–être d'ondelettes analytiques) permet d'en limiter la taille.

Cette procédure a été implémentée et donne des résultats très satisfaisants sur des données expérimentales réelles fournies par le CNES Toulouse, département hyperfréquences, pour l'identification de filtres hyperfréquences embarqués, voir [13, 43, 106, 107] et le logiciel *Hyperion* [54].

Cependant, nos tentatives pour estimer le taux de convergence de e_2 et le comportement asymptotique de M en ℓ sans restriction sur f et h n'ont pas abouti. La difficulté provient de ce que, en général, une fonction de H^2 ou de $\bar{H}_0^2$ dont la trace sur $\mathbb{T} \setminus K$ (de mesure de Lebesgue positive) tend vers 0 en norme L^2 à une certaine vitesse possède une trace sur K qui, certes, tend vers 0 en norme L^2 mais arbitrairement lentement (voir [67]). Ainsi, nous ne savons pas à quelle vitesse tend vers 0 le dernier terme de :

$$e_2(\ell) \leq \frac{2}{M}\varepsilon(1/M) + \|P_{\bar{H}_0^2}\chi_K\,(f - g_0(\ell))\|_{L^2(\mathbb{T})}\,, \tag{10}$$

où $\varepsilon(1/M) \to 0$ lorsque $M \to \infty$. Cependant, $M \to \infty$ quand $\ell \to -1$, assez lentement pour que

$$\lim_{\ell \to -1} (\ell + 1)\, M^2 = 0\,,$$

sans que nous ne disposions d'estimations plus fines (voir [4*, prop.5]). Ceci nous a conduit à étudier des versions analogues de $\mathbf{PEB}_2$ sur des espaces de fonctions plus régulières.

3.3 Problème extrémal borné dans l'espace de Hardy–Sobolev $H^p \cap W^{1,p}$, résolution et estimations de l'erreur lorsque $p = 2$

Nous avons étudié dans [5*] un problème extrémal borné du type de $\mathbf{PEB}_p$ pour $1 < p < \infty$ et $h = 0$ dans l'espace de Hardy–Sobolev $\mathcal{D}_p = H^p \cap W^{1,p}(\mathbb{T})$.
Pour $E \subset \mathbb{T}$, $W^{1,p}(E)$ est l'espace de Sobolev des fonctions de $L^p(E)$ dérivables et dont la dérivée appartient à $L^p(E)$ muni de la norme standard $\|\ \|_{W^{1,p}(E)}$:

$$\|f\|^p_{W^{1,p}(E)} = \|f\|^p_{L^p(E)} + \|\frac{df}{d\theta}\|^p_{L^p(E)}\,.$$

La norme $\|\ \|_{W^{1,p}(\mathbb{T})}$ induit aussi une norme sur $\mathcal{D}_p$. Les propositions 1 et 2 se généralisent à ces espaces [5*, th.1, prop.1] et, pour $1 < p < \infty$, le problème $\mathbf{PEB}_p$ y est bien posé, en vertu du résultat suivant.

Théorème 6 ([5*, th.2]) *Soient $K \subset \mathbb{T}$ tel que $\lambda(K) > 0$ et $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$, $1 < p < \infty$ et $f \in W^{1,p}(K)$. Pour toute constante positive $M < \infty$, il existe une unique fonction $g_0 \in \mathcal{D}_p$ telle que $\|g_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{T}\setminus K)} \leq M$ et*

$$\|f - g_0\|_{W^{1,p}(K)} = \min_{\substack{g \in \mathcal{D}_p \\ \|g\|_{W^{1,p}(\mathbb{T}\setminus K)} \leq M}} \|f - g\|_{W^{1,p}(K)}\,. \tag{11}$$

De plus, si $f \neq g_0$ p.p. sur K, $\|g_0\|_{W^{1,p}(\mathbb{T}\setminus K)} = M$.

Le théorème 6 se prouve comme le théorème 4.
Lorsque $p=2$, nous obtenons l'expression [5*, (17)] du meilleur approximant g_0 dans l'espace de Hilbert $\mathcal{D}_2$, analogue à (8), et dans laquelle interviennent encore un paramètre de Lagrange et l'inverse d'un opérateur de type Toeplitz. L'erreur $\|f-g_0\|_{W^{1,2}(K)}$ n'est alors pas mieux estimée que e_2 dans la section 3.2.2.
Cependant, la convergence dans $W^{1,2}(K)$ entraîne évidemment la convergence pour des normes plus faibles comme $L^2(K)$ et $L^\infty(K)$. En ce qui concerne ces dernières, nous avons pu adapter les techniques de [31] non au problème (11) mais au problème modifié (12) ci–dessous, dans le cas $p=2$.

Pour $1<p<\infty$, $E\subset\mathbb{T}$ et $e^{i\theta_0}\in E$, soit $W_0^{1,p}(E)$ l'espace de Sobolev $W^{1,p}(E)$ muni de la norme suivante, équivalente à $\|\ \|_{W^{1,p}(E)}$:

$$\|f\|^p_{W_0^{1,p}(\Gamma)} = \|\frac{df}{d\theta}\|^p_{L^p(E)} + |f(e^{i\theta_0})|^p\,.$$

On considère alors pour $L\geq 0$:

$$\|f-g_1\|_{W_0^{1,p}(K)} = \min_{\substack{g\in\mathcal{D}_p \\ \|g\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{T}\setminus K)}\leq L}} \|f-g\|_{W_0^{1,p}(K)}\,. \tag{12}$$

Ici encore, pour $1<p<\infty$, $f\in W^{1,p}(K)$ et $L>0$, il existe une unique solution à (12) ; de plus, $\|g_1\|_{W_0^{1,p}(\mathbb{T}\setminus K)}=L$ si $f\neq g_1$ p.p. sur K, en particulier si $\frac{df}{d\theta}\notin\mathcal{C}^p_{L,0}$, voir [5*, rmq.4].

Lorsque $p=2$ et si $L>|f(e^{i\theta_0})|$, l'approximant g_1 est tel que $dg_1/d\theta=g_0$ est l'unique solution du problème $\mathbf{PEB}_2$ associée à $df/d\theta$, $h=0$ et $M=L-|f(e^{i\theta_0})|$. On construit alors g_1 comme étant la primitive en θ de g_0 vérifiant $g_1(e^{i\theta_0})=f(e^{i\theta_0})$.
En utilisant (10) et les estimations établies dans [31] permettant de borner la norme $L^2(\mathbb{T})$ ou $L^\infty(\mathbb{T})$ d'une fonction de $\mathcal{D}_2$ au moyen de sa norme $L^2(\mathbb{T}\setminus K)$, on obtient dans [5*, sec.4] les majorations suivantes des vitesses de convergence.
Supposons sans perte de généralité que $\|f\|_{W^{1,2}(K)}\leq 1$ et posons $l=\lambda(\mathbb{T}\setminus K)/2\,\pi$. Lorsque M est assez grand ($M\geq l^{-1/2}\,e^{1/l}\,\varepsilon(1/M)$) et pour des constantes c_l , C_l positives ne dépendant que de l, on obtient :

$$\|f-g_1\|_{L^2(K)} \leq 2\,c_l\,\frac{1}{M}\,\varepsilon(1/M) + C_l\,\frac{\log\left(l\log\frac{\sqrt{l}\,M}{\varepsilon(1/M)}\right)}{l\log\frac{\sqrt{l}\,M}{\varepsilon(1/M)}}\,.$$

On en déduit que pour tout $a<1/2$, il existe une constante $\kappa_a>0$, ne dépendant que de a, telle que :

$$\|f-g_1\|_{L^\infty(K)} \leq \kappa_a\,\left(2\,c_l\,\frac{1}{M}\,\varepsilon(1/M) + C_l\,\frac{\log\left(l\log\frac{\sqrt{l}\,M}{\varepsilon(1/M)}\right)}{l\log\frac{\sqrt{l}\,M}{\varepsilon(1/M)}}\right)^a\,.$$

3.4 Problème extrémal borné dans $H^2(\mu)$

Nous étudions ici la généralisation de $\mathbf{PEB}_2$ dans $L^2(\mu)$ et $H^2(\mu)$ pour une mesure positive finie μ sur $\mathbb{T}$ correspondant à la question Q_4 de l'introduction.
Le problème $\mathbf{PEB}_2^\mu$ est traité dans [7*] pour une mesure μ symétrique ($\mu(\bar{E}) = \mu(E)$ si $\bar{E} = \{\bar{z}\,,\ z \in E\}$ et $E \subset \mathbb{T}$) et les espaces de Banach *réels* associés (dont les éléments sont symétriques–réels ($f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$). Comme dans [2*] et la section 6, cette hypothèse est liée aux applications de $\mathbf{PEB}_2^\mu$ et du problème d'approximation rationnelle dans $H^2(\mu)$ [7*, sec.5] à l'identification fréquentielle des systèmes et au fait que les signaux sont à valeurs réelles et donc aussi la réponse impulsionnelle et la fonction de transfert d'un système monovariable, voir section 2.2. Cependant, nous donnons ici la transposition (instantanée) des résultats de [7*, sec.3,4] au cas général complexe.

Nous avons établi le résultat préliminaire suivant, conséquence assez directe des théorèmes de Szegö–Kolmogoroff–Krein et de Beurling ([61, ch.3], [66, ch.4], [51, cor.II.7.3]) mais que nous n'avons pas trouvé dans la littérature.

Lemme 1 ([7*, th.1, rem.1]) *Soit μ une mesure positive finie sur $\mathbb{T}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
(i) $L^2(\mathbb{T}) = L^2_\mu(\mathbb{T})$,
(ii) $H^2 = H^2(\mu)$,
(iii) il existe $\nu \in H^\infty$ inversible dans H^∞ telle que

$$d\mu(\theta) = |\nu(e^{i\theta})|^2\, d\theta\,. \tag{13}$$

Ce résultat reste vrai si (i) et (ii) sont énoncées pour un exposant p, $1 \le p < \infty$.

Nous supposons dans la suite de cette section que μ satisfait (13).

$\mathbf{PEB}_2^\mu$: si $K \subset \mathbb{T}$ est tel que $\mu(K) > 0$ et pour $f \in L^2(K)$, $h \in L^2(\mathbb{T} \setminus K)$, $M \ge 0$, on cherche une fonction

$$g_\mu \in \mathcal{B}^{2,\mu}_{M,h} = \{g \in H^2\,,\ \|h - g\|_{L^2_\mu(\mathbb{T}\setminus K)} \le M\}$$

telle que

$$\|f - g_\mu\|_{L^2_\mu(K)} = \min_{g \in \mathcal{B}^{2,\mu}_{M,h}} \|f - g\|_{L^2_\mu(K)}\,. \tag{14}$$

On déduit des théorèmes 4, 5 et par un simple changement de variable le

Théorème 7 ([7*, th.2]) *Pour toute mesure positive finie μ sur $\mathbb{T}$ vérifiant* (13), *et si $\mu(\mathbb{T} \setminus K) > 0$, le problème $\mathbf{PEB}_2^\mu$ admet une unique solution g_μ ; de plus, si f n'est pas la trace sur K d'une fonction de $\mathcal{B}^{2,\mu}_{M,h}$,*

$$\|h - g_\mu\|_{L^2_\mu(\mathbb{T}\setminus K)} = M\,, \tag{15}$$

et, si Φ *est l'opérateur de Toeplitz déja introduit page* 3.2.2*, on a*

$$g_\mu = \nu^{-1}\,(1+\ell\,\Phi)^{-1}\,P_{H^2}\,\left(\nu(f\vee(\ell+1)\,h)\right)\,,$$

pour l'unique $\ell \in (-1,+\infty)$ *tel que* (15) *soit vérifiée.*

Ainsi, $g_\mu(f,h,\ell) = \nu^{-1}\,g_0(\nu f, \nu h, \ell)$ de sorte que le corollaire 1 ci–dessous fournit aussi une expression intégrale équivalente de g_μ. De la même manière, la proposition 2 se généralise au cas pondéré, voir [7*, prop.1].

Dans la foulée, nous abordons dans [7*] un problème d'approximation dans $H^2(\mu)$ de g_μ par une fonction rationnelle p_m/q_n appartenant à $H^2(\mu)$ et telle que $d^o p_m \leq m$, $d^o q_n \leq n$, généralisant au cas pondéré certains résultats et un algorithme établis dans [11, 12, 26]. Dans [7*, sec.5], nous considérons le cas diagonal où $m = n-1$ pour lequel nous établissons une propriété de normalité (saturation de la contrainte en degré par les minima locaux) et, lorsque μ est donnée par l'inverse du carré du module d'un polynôme, un algorithme de calcul des solutions utilisant une base de polynômes orthogonaux de Szegö sur $\mathbb{T}$ et la formule de Christoffel–Darboux [108], en cours d'implémentation dans le logiciel *Hyperion* (le calcul des solutions pour des poids de petit degré a fait l'objet de plusieurs stages [44, 86, 110]).
De nombreux aspects des problèmes d'approximation rationnelle de type (m,n) dans $H^2(\mu)$ sont encore à l'étude, comme sa consistance (si la fonction à approximer est elle-même rationnelle du degré souhaité, est-elle l'unique point critique du critère associé ?), dans le travail en préparation [79], mais aussi les propriétés asymptotiques des solutions (comportement de l'erreur, répartition des pôles et zéros) ou l'existence de conditions suffisantes à l'unicité, [27, 30].

Pour conclure cette section, mentionnons la thèse [82] dans laquelle des problèmes extrémaux sont abordés sur des classes de fonctions dont la transformée de Fourier s'annule à l'extérieur ("band-limited" ou "low-pass") ou à l'intérieur ("high-pass") d'un intervalle de fréquences dans le but de mieux comprendre certains problèmes de traitement du signal, notamment d'analyser les effets de l'atténuation des basses fréquences de signaux. Plus précisément, la première de ces classes consiste en les restrictions à l'axe réel de fonctions de type exponentiel et est munie de la norme L^1 (ou L^p), la seconde est son annihilateur dans L^∞ (ou $L^{p/p-1}$). On trouve ainsi dans [82] une famille de problèmes extrémaux et leurs duaux pour lesquels sont obtenues des propriétés d'existence et d'unicité des solutions, des propriétés de l'erreur et des considérations de nature constructive pour $p = 1, 2, \infty$ (l'auteur est aussi naturellement conduit à étudier un problème d'interpolation / extrapolation, voir ici la section 5).

4 Problème de complétion borné dans H^2

Il s'agit ici de l'étude du problème $\mathbf{PCB}_2$ suivant, relatif au cas $p = 2$ de la question Q_3 de l'introduction, abordée dans [6*].

$\mathbf{PCB}_2$: si K est un sous–ensemble du cercle unité $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive et pour $f \in L^2(K)$, C une constante positive, on cherche une fonction

$$\kappa_0 \in \mathcal{D}^2_C = \{\kappa \in L^2(\mathbb{T} \setminus K)\,,\ \|\kappa\|_{L^2(\mathbb{T}\setminus K)} \le C\}\,,$$

telle que :

$$d_2(f \vee \kappa_0, H^2) = \min_{\kappa \in \mathcal{D}^2_C} d_2(f \vee \kappa, H^2)\,,$$

ou, de manière équivalente, telle que :

$$\|P_{\overline{H}^2_0}(f \vee \kappa_0)\|_{L^2(\mathbb{T})} = \min_{\kappa \in \mathcal{D}^2_C} \|P_{\overline{H}^2_0}(f \vee \kappa)\|_{L^2(\mathbb{T})}\,.$$

Le problème $\mathbf{PCB}_2$ est un compagnon de $\mathbf{PEB}_2$ pour au moins deux raisons. Tout d'abord il en donne une alternative en ce sens que $P_{H^2}(f \vee \kappa_0)$ concurrence la solution g_0 de $\mathbf{PEB}_2$ en vue d'approximer f dans $L^2(K)$ par une fonction de H^2 contrainte en norme sur $\mathbb{T} \setminus K$, voir (17). De plus, les solutions κ_0 de $\mathbf{PCB}_2$ fournissent des choix possibles du gabarit h pour la résolution de $\mathbf{PEB}_2$ lorsque celui–ci n'est pas imposé ou s'avère délicat.

Nous prouvons dans [6*, th.1], en utilisant des arguments de compacité faible et de stricte convexité analogue à ceux de la preuve du théorème 4, que $\mathbf{PCB}_2$ admet une unique solution κ_0 et que, si $f \notin \mathcal{C}^2_{C,0}$, alors $\|\kappa_0\|_{L^2(\mathbb{T}\setminus K)} = C$. De plus, nous obtenons la caractérisation suivante de κ_0, analogue à (8) ; si $f \notin \mathcal{C}^2_{C,0}$, la solution de $\mathbf{PCB}_2$ est donnée par l'équation implicite :

$$\kappa_0 = -\ell\,(1 + \ell\,\Phi)^{-1}\, P_{H^2}\ (f \vee 0)\ , \tag{16}$$

pour l'unique $\ell \in (-1, +\infty)$ tel que $\|\kappa_0\|_{L^2(\mathbb{T}\setminus K)} = C$ et où Φ est encore l'opérateur de Toeplitz introduit page 3.2.2.

Afin de préciser les connexions entre $\mathbf{PEB}_2$ et $\mathbf{PCB}_2$, et si l'on note $\kappa_0(f, C) = \kappa_0(f, \ell)$ la solution de $\mathbf{PCB}_2$ fournie par (16) pour f et $C(\ell)$ et $g_0(f, \psi, \ell)$ la solution de $\mathbf{PEB}_2$ associée à f, ψ et $M(\ell)$ et donnée par (8), on constate que, pour tout $\ell \in (-1, \infty)$:

$$\kappa_0(f, \ell) = -\ell g_0(f, 0, \ell) \ \text{ et } \ P_{H^2}(f \vee \kappa_0(f, \ell)) = g_0(f, \kappa_0(f, \ell), 0) = g_0(f, 0, \ell)\,, \tag{17}$$

avec la relation suivante entre les contraintes sur $\mathbb{T} \setminus K$:

$$C(\ell) = |\ell| M(\ell)\,,$$

pour $M(\ell) = \|g_0(f, 0, \ell)\|_{L^2(\mathbb{T}\setminus K)} = \|g_0(f, \kappa_0(f, \ell), 0) - \kappa_0(f, \ell)\|_{L^2(\mathbb{T}\setminus K)}$.
L'erreur relative à $\mathbf{PCB}_2$,

$$e^c_2(\ell) = \|P_{\overline{H}^2_0}(f \vee \kappa_0(\ell))\|_{L^2(\mathbb{T})}\,,$$

décroît bien sûr vers 0 lorsque ℓ décroît vers -1 et vérifie :

$$e^c_2(\ell) = \left[e^2_2(\ell) + (1+\ell)^2\, M^2(\ell)\right]^{1/2}\ .$$

si e_2 est l'erreur relative à $\mathbf{PEB}_2$ définie par (9), Dans le cas où la fonction gabarit $h = \kappa_0$ est imposée dans $\mathbf{PEB}_2$, il reste à tenter d'estimer e_2 et M en fonction de ℓ au moyen des relations ci–dessus et à étudier l'équation $e_2(\ell) = \beta_2(M(\ell)) = M(\ell)$.

On trouvera dans [20] une expression analogue à 16 de la solution d'une version un peu plus générale de $\mathbf{PCB}_2$ où l'on borne sa distance à une fonction de $L^2(\mathbb{T} \setminus K)$.
Nous avons obtenu des résultats numériques satisfaisants concernant la complétion de la trace sur l'arc $[e^{3i/2}, e^{i(2\pi-3/2)}]$ de la fonction $f(z) = 3(z^2+1)/(z^2+2z+5)$ classiquement utilisée comme test en identification par ce type de méthodes sur tout $\mathbb{T}$, voir [55, 92] et [4*] pour les simulations. Des résultats supplémentaires sont regroupés dans [109] dont certains concernent les données expérimentales fournies par le CNES pour l'identification de leurs filtres hyperfréquences.

Mentionnons enfin [17] dans lequel nous étudions les liens entre les généralisations de $\mathbf{PEB}_\infty$ et de l'analogue du problème de complétion ci-dessus pour $p = \infty$ à l'approximation méromorphe de type AAK. Si la relation entre les solutions respectives de ces problèmes est du type de (17), le traitement de son caractère implicite est nettement plus délicat à cause du défaut de continuité de l'opérateur de meilleure approximation associé. Cependant, il est remarquable que dans les cas $p = 2, \infty$, la meilleure complétion bornée coincide avec la trace sur $\mathbb{T} \setminus K$ d'une fonction de H^p comme le montrent la caractérisation (16) et celle établie dans [20]. Nous ne savons pas si ceci reste vrai pour tout p.

5 Interpolation, extrapolation et approximation sur $H^p_{|_K}$, $K \subset \mathbb{T}$

Nous explicitons ici un lien fort et inattendu entre les problèmes extrémaux bornés $\mathbf{PEB}_p$ et les problèmes de caractérisation et de reconstruction de fonctions analytiques depuis leur trace sur un sous-ensemble K de $\mathbb{T}$ soulevés à la question Q_1 de la section 2.1.
En présence d'une contrainte $M < \infty$ sur $\mathbb{T} \setminus K$, le diagnostic de l'appartenance à $\mathcal{C}^p_{M,0}$ d'une fonction de $L^p(K)$ est un problème de type Loewner, étudié pour $p = 2, \infty$ dans [98] dans les espaces de Hardy du demi–plan. Nous l'avons abordé dans l'article [8*] pour $p = 2$, $h = 0$ mais dans le contexte général des espaces espaces de Hilbert de fonctions analytiques à noyaux reproduisant. Nous décrirons plus loin dans cette section les résultats obtenus.
En l'absence de contrainte ($M = \infty$), la reconstruction de $f \in H^p_{|_K}$ dans $\mathbb{D}$ est un problème d'extrapolation étudié dans [3, 95]. Nous montrons ci-dessous comment ces questions se relient à des problèmes d'approximation. Des informations plus détaillées se trouvent dans [3*, sec.3,5] et [18].

Problèmes d'extrapolation et formules intégrales de Carleman

Pour $1 < p < \infty$, une approche constructive de la densité de $H^p_{|_K}$ dans $L^p(K)$ (proposition 2) et de la remarque 2 est fournie par la proposition 3 ci–dessous au moyen de formules intégrales de Carleman et des *quenching* fonctions[5]. Une fonction $\varphi \in H^\infty$ est une *quenching* fonction (sur K) si et seulement si $|\varphi| > 1$ dans $\mathbb{D}$ et $|\varphi| = 1$ p.p. sur $\mathbb{T} \setminus K$.

5. *To quench* [58] : éteindre (un incendie), étancher (sa soif)

A toute fonction $f \in H^p$ et à toute *quenching* fonction φ (sur K), on peut associer la famille de fonctions de H^p :

$$f_m(z) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_K \left(\frac{\varphi(\xi)}{\varphi(z)}\right)^m \frac{f(\xi)\,d\xi}{\xi - z}\,,\ \forall z \in \mathbb{D},\ \ m \geq 0. \tag{18}$$

Pour $1 < p < \infty$, (18) s'écrit aussi :

$$f_m = \frac{1}{\varphi^m}\, P_{H^p}\left(\varphi^m\, f \vee 0\right). \tag{19}$$

On a alors le résultat d'extrapolation suivant.

Théorème 8 ([3, thms 1.1,1.11]) *Soit $K \subset \mathbb{T}$ tel que $\lambda(K) > 0$. Pour $f \in H^p$ et une quenching fonction φ (sur K), la suite $(f_m)_{m\geq 0}$ de H^p définie par* (18) *est telle que :*
(i) si $1 < p < \infty$, f_m converge vers f dans H^p quand $m \to \infty$,
(ii) si $p = 1$, f_m converge vers f uniformément sur les sous–ensembles compacts de $\mathbb{D}$.

Le théorème 8 reste valable sur les espaces de Hardy de certains domaines simplement connexes, voir [3] et [3*].
Puisque (18) ne concerne que la trace de f sur K, elle s'applique à toute $f \in L^p(K)$, et nous avons étendu ce résultat d'*extrapolation* en une procédure d'*approximation* pour $p > 1$.

Proposition 3 ([3*, prop.2]) *Soit $K \subset \mathbb{T}$ tel que $\lambda(K) > 0$ et $\lambda(\mathbb{T} \setminus K) > 0$. Pour $1 < p < \infty$, soit $f \in L^p(K)$ et φ une quenching fonction de module constant p.p. sur K. Si $(f_m)_{m\geq 0}$ est la suite de H^p définie par* (18)*, alors $f_{m|_K}$ converge vers f dans $L^p(K)$ lorsque $m \to \infty$.*

La proposition 3 se déduit du théorème 8 et de la proposition 2 par l'intermédiaire du théorème de M. Riesz [66, ch.9],
En tant que fonction extérieure, la *quenching* fonction de module constant égal à $\varrho > 0$ sur K est uniquement déterminée à la multiplication par une constante de module 1 près par $\varphi = w_\varrho$, pour w_ϱ défini par (5) :

$$\varphi(z) = w_\varrho(z) = \exp\left\{\frac{\log \varrho}{2\,\pi} \int_K \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z}\, dt\right\}\,,\ z \in \mathbb{D}. \tag{20}$$

Le point (i) du théorème 8 avait à l'origine été établi dans [95, th.1] pour cette *quenching* fonction particulière.

La proposition 3 donne un caractère constructif au principe de caractérisation des traces sur K des fonctions de H^p énoncé à la remarque 2 puisqu'elle permet de choisir et de construire $g_n = f_m$; ceci est aussi illustré à plusieurs occurences dans la littérature (voir [18] pour plus de détails).
Tout d'abord, dans [95, th.2], la bornitude de la suite f_m définie par (18) et (20) est une condition nécessaire et suffisante pour que f appartienne à $H^p_{|_K}$.
Un exemple pour $p = 2$ se trouve aussi dans [99] qui propose une procédure de reconstruction des fonctions de l'espace de Hardy du demi–plan supérieur à partir de leur trace sur un borélien de l'axe réel ; celle–ci fournit à nouveau un schéma d'approximation, voir [18, prop.2].

On trouve dans [70, th.4.1] ou [3, th.27.23] une autre caractérisation de ce type, qui s'énonce comme suit moyennant une transformation conforme du demi–plan supérieur dans $\mathbb{D}$: une fonction $h \in L^2(\mathbb{T} \setminus K)$ est trace d'une fonction de H^2 si et seulement si la solution associée de $\mathbf{PEB}_2$ pour $f = 0$ reste bornée lorsque $M \to 0$. De façon duale, [98, th.1] revient au fait que $f \in H^2_{|_K}$ si et seulement si la solution associée de $\mathbf{PEB}_2$ reste bornée lorsque $M \to \infty$. Enfin, pour $p = 2$, ce principe se déduit aussi de la caractérisation de $L^2(K) \cap \{f \in H^2_{|_K},\ \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq m\}$ formulée ici à la proposition 4.

Notons enfin que les fonctions approximantes f_m définies par (18) et (20) possèdent la surprenante propriété d'être extrémales pour $\mathbf{PEB}_2$ quand $h = 0$, propriété d'autant plus remarquable que ces fonctions ont été introduites dans [95] sans référence à l'approximation. Ceci est une conséquence du corollaire suivant du théorème 5 :

Corollaire 1 *Pour $p = 2$ et $f \notin \mathcal{C}^2_{M,h}$, la solution de $\mathbf{PEB}_2$ est implicitement donnée par*

$$g_0(z) = \frac{1}{2\,i\,\pi} \int_{\mathbb{T}} \left(\frac{\varphi(\xi)}{\varphi(z)}\right)^{\alpha} (f \vee h)(\xi)\, \frac{d\xi}{\xi - z} = \frac{1}{\varphi^{\alpha}(z)}\, P_{H^2}\left[\varphi^{\alpha}(f \vee h)\right](z)\,,\ \forall z \in \mathbb{D}\,, \tag{21}$$

où φ est la quenching fonction de module ϱ sur K définie par (20) *et*

$$\alpha = -\frac{\log(\ell + 1)}{2\,\log\varrho}\,,$$

pour l'unique $\ell \in (-1, \infty)$ tel que $\|g_0 - h\|_{L^2(\mathbb{T}\setminus K)} = M$.

On constate que φ^{α} (elle-même *quenching* fonction de module $1/\sqrt{\ell + 1}$ sur K) tient ici le même rôle que w_{M/β_∞} pour la résolution de $\mathbf{PEB}_\infty$.

Problèmes d'interpolation de Loewner

Nous avons obtenu dans [8*] certains résultats concernant des problèmes d'interpolation de type Loewner dans des espaces de Hilbert de fonctions analytiques à noyaux reproduisants. Dans le cas particulier de l'espace de Hardy H^2, ceux–ci donnent lieu à une caractérisation de $L^2(K) \cap \{f \in H^2_{|_K},\ \|f\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq m\} \subset \mathcal{C}^2_{m,0}$ pour une constante $m \geq 0$ (proposition 4), élément de réponse à la question Q_1 de la section 2.1.
Les techniques de noyaux reproduisants sont connues pour fournir des solutions à des problèmes d'interpolation discrets de type Nevanlinna-Pick ou Carathéodory–Féjer[6], voir [42]. Il est ainsi naturel qu'elles nous aient permis de résoudre des problèmes d'interpolation continus sur le bord du domaine d'analycité, de type Loewner.

Sans aborder dans ce document la théorie des espaces de Hilbert à noyaux reproduisantset pour laquelle nous renvoyons à [7, 104, 105] et à [8*, sec.1,2], définissons la fonction $\mathcal{K} : \mathbb{D} \times \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ suivante :

$$\mathcal{K}(z, w) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, z^n\, \bar{w}^n\,, \forall z, w \in \mathbb{D}\,. \tag{22}$$

6. On utilise dans [20] la solution de $\mathbf{PEB}_\infty$ pour résoudre certaines généralisations de ces problèmes à des sous–ensembles de $\mathbb{T}$.

pour une suite $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ de réels positifs. Cette fonction étant positive (au sens où elle est hermitienne et où, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tous $w_1, \cdots, w_p \in \mathbb{D}$, la matrice $p \times p$ dont l'élément (i,j) vaut $\mathcal{K}(w_i, w_j)$ est semi–définie positive), elle est le noyau reproduisant d'un espace de Hilbert $H(\mathcal{K})$ de fonctions définies dans $\mathbb{D}$. De plus, $\mathcal{K}$ étant conjointement analytique en z et $\bar{w}$, les fonctions de $H(\mathcal{K})$ sont analytiques dans $\mathbb{D}$. Cependant, elles ne sont pas pour autant définies sur $\mathbb{T}$ et l'on peut se poser les questions suivantes, qui généralisent le cas $p = 2$ de la question Q_1 de l'introduction aux espaces de Hilbert de fonctions analytiques à noyaux reproduisants.

(i) Les éléments de $H(\mathcal{K})$ admettent-ils des valeurs sur $\mathbb{T}$?

(ii) Si oui, comment caractériser les traces sur K de fonctions bornées de $H(\mathcal{K})$?

(iii) Peut-on reconstruire une fonction de $H(\mathcal{K})$ depuis sa trace sur K?

En réponse à (i) et (ii), nous prouvons en particulier dans [8*, th.1] que si la suite $\{\alpha_n\}$ est bornée, alors $H(\mathcal{K})$ est continument inclus dans H^2 ; les fonctions de $H(\mathcal{K})$ admettent ainsi des limites non tangentielles p.p. sur $\mathbb{T}$, ce qui fournit une réponse positive à (i). Nous abordons (ii) dans ce même théorème et obtenons une caractérisation des traces sur K de fonctions bornées de $H(\mathcal{K})$ sous forme d'un test de positivité d'une fonctionnelle quadratique sur $L^2(K)$.

Lorsque $\alpha_n = 1$ pour tout n, on a $H(\mathcal{K}) = H^2$. Dans ce cas, les questions (ii) et (iii) relèvent des problèmes d'extrapolation discutés – sans la contrainte en norme – au début de cette section et dans [3*, sec.3] et [3, 70, 95], au moyen de formules intégrales type de Carleman, ainsi que dans [98, 99, 100], en utilisant les transformations de Hilbert et de Mellin pour l'espace de Hardy du demi–plan. On trouvera aussi dans [101] une généralisation d'un théorème dû à Loewner et concernant la caractérisation des traces sur tout sous–ensemble de l'axe réel des fonctions de la classe de Pick, analytiques dans le demi–plan et à partie imaginaire positive (conformément équivalente à la classe de Schur des fonctions de H^∞ bornées par 1).

Dans ce cas, le point (ii) ci–dessus coincide avec le cas $p = 2$ de la question Q_1 de l'introduction et s'énonce comme un problème d'interpolation de Loewner :

$\mathbf{PIL}_2$: si K est un sous–ensemble du cercle unité $\mathbb{T}$ de mesure de Lebesgue strictement positive et $m \geq 0$, quelles sont les fonctions $f \in L^2(K)$ qui sont traces sur K de fonctions $h \in H^2$ telles que $\|h\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq m$?

La solution suivante s'obtient comme conséquence de [8*, th.1].

Proposition 4 ([8*, cor.1], [98, th.1]) *Une fonction $f \in L^2(K)$ est une solution de $\mathbf{PIL}_2$ si et seulement si*

$$\lim_{r\to 1} \int_K \int_K \left(\frac{m^2}{1 - r^2\, e^{it}\, e^{-is}} - f(e^{it})\, f(e^{is})^* \right) \phi(e^{it})\, \phi(e^{is})^*\, dt\, ds \geq 0 \tag{23}$$

pour toute fonction $\phi \in L^2(K)$, ou, de manière équivalente,

$$|(f, \phi)_{L^2(K)}| \leq m \, \|P_{H^2}\, \chi_K\, \phi\|_{L^2(\mathbb{T})} ,$$

Remarque 4 La proposition 4 implique aussi le cas $p = 2$ du principe de caractérisation des traces de fonctions bornées de H^p énoncé dans la remarque 2.

Le corollaire [8*, cor.2] propose un analogue de la proposition 4 dans le cas de l'espace de Hardy–Sobolev $\mathcal{D}_2 = H^2 \cap W^{1,2}(\mathbb{T})$ introduit en section 3.3 et égal à $H(\mathcal{K})$ pour $\alpha_n = 1/(1+n^2)$ (ceci s'étend aux espaces de fonctions analytiques admettant une dérivée p^{me} dans H^2).
Afin qu'une fonction $f \in L^2(K)$ soit une solution de $\mathbf{PIL}_2$, nous obtenons aussi des conditions nécessaires portant sur les coefficients de Fourier de $\chi_K f$, [8*, prop.1].
Enfin, nous considérons dans [5] ce type de problèmes de Loewner pour des fonctions à valeurs matricielles et généralisons la proposition 4 aux matrices de fonctions de H^2.

6 Identification robuste dans $A(\mathbb{D})$

Nous traitons de façon constructive dans [2*], ainsi que dans [15, 21], un problème d'identification harmonique robuste dans l'algèbre du disque. Ce travail illustre le fait que les résultats rassemblés dans ce document permettent effectivement de résoudre certains problèmes de modélisation ou d'identification fréquentielle intervenant couramment en automatique (voir section 2.2).
Dans le présent contexte, il s'agit de traiter une version de $\mathbf{PEB}_\infty$ généralisée au cas d'une contrainte en module (plutôt qu'en norme) sur $\mathbb{T} \setminus K$ et d'en garantir la continuité des solutions sur $\mathbb{T}$ (voir remarque 3) en réponse à la question Q_5 de l'introduction.
Nous cherchons à retrouver une fonction de transfert f appartenant à l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$, depuis une famille de mesures ponctuelles expérimentales, ceci dans la situation réaliste où l'on ne dispose des données *que* dans un intervalle de fréquences $K \subset \mathbb{T}$ (correspondant à la bande passante du système à identifier). L'appartenance de f à $A(\mathbb{D})$ provient, par exemple, de la stabilité *entrée bornée / sortie bornée* du système dans l^∞ (ou dans l^2, s'il est de dimension finie).
Dans le cas où $K \subset \mathbb{T}$, les algorithmes en deux temps (interpolation puis extension de Nehari) proposés dans [55, 60, 92] et qui convergent sous l'hypothèse de mesures complètes (réparties sur tout l'axe imaginaire ou le cercle unité $\mathbb{T}$) ne fonctionnent pas. Cependant, nous avons obtenu un schéma d'approximation en deux étapes successives qui converge robustement sur K. La première repose sur les procédures robustes d'interpolation décrites dans [91, 93, 109], la seconde sur une extension des résultats d'approximation contenus dans [1*] et décrits en section 3.1. Plus précisément, nous résolvons le problème d'identification robuste **PIR** ci–dessous.

Soient $0 < a < \pi$ et $K = \{e^{i\theta} : a \leq \theta \leq 2\pi - a\}$ un arc fermé propre et symétrique de $\mathbb{T}$. Vu l'importance dans cette section du comportement des fonctions à l'extérieur de K, nous baptisons J la fermeture du complémentaire de K dans $\mathbb{T}$: $J = \{e^{i\theta} : -a \leq \theta \leq a\}$.
Pour une fonction inconnue f de l'algèbre du disque $A(\mathbb{D})$, on suppose données les valeurs complexes $a_k = f(z_k) + \eta_k$, $k = -N, \cdots, N$, les points z_k appartenant à K avec $z_{\pm N} = e^{\pm ia}$ et où (η_k) est une suite inconnue mais bornée ($\in l^\infty$) correspondant au bruit induit par d'éventuelles non–linéarités ou erreurs de mesure. On suppose que l'on peut se doter de

fonctions $h, r \in C(J)$, $r \geq 0$ étant telle que $r(e^{\pm ia}) = 0$, par rapport auxquelles la fonction f satisfait

$$|f(z) - h(z)| \leq r(z), \quad \text{pour tout } z \in J. \tag{24}$$

Cette hypothèse nécessite une forme de connaissance *a priori* du transfert f à identifier sous la forme d'un modèle h de comportement sur J et d'un "gabarit" r. Observons qu'il n'est pas difficile d'effectuer un premier choix de h et r en général (on peut toujours choisir $h = 0$ et r assez grand). Le comportement de la solution f_N de **PIR** reflète alors la qualité de ce choix que l'on peut ainsi raffiner.

PIR: étant donnée une suite de mesures (a_k) comme ci–dessus, on souhaite trouver un modèle $f_N \in A(\mathbb{D})$ de f qui converge robustement sur K :

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \leq \epsilon} \|f_N - f\|_{L^\infty(K)} = 0\,,$$

et qui vérifie asymptotiquement la contrainte de gabarit sur J :

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \leq \epsilon} \left\{ \sup_{z\in J} \left[|f_N(z) - h(z)| - r(z)\right] \right\} \;\leq\; 0.$$

Nous ferons dans la suite l'hypothèse (requise du point de vue de la théorie des systèmes mais ne correspondant pas à une restriction le plan mathématique) que *toutes* les fonctions intervenant dans cette section (aussi bien le transfert inconnu f que les données h, r et le modèle analytique cherché f_N) sont symétriques–réelles: $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$ et de même pour f_N sur $\mathbb{T}$ et pour h, r sur l'arc symétrique J. On se contente ainsi de mesures sur $a \leq \theta \leq \pi$ et l'on obtient les autres par conjugaison complexe. On suppose donc $z_0 = -1$, $z_{-k} = \bar{z}_k$, $a_{-k} = \bar{a}_k$ et $\eta_{-k} = \bar{\eta}_k$ pour $1 \leq k \leq N$.
Le théorème 9 affirme que l'identification robuste depuis des données partielles est possible lorsque r est assez lisse et que les points de mesure (z_k) se répartissent convenablement sur K : il fournit sous ces conditions une solution à **PIR**.
Soit $(b_k)_{k=-M}^{M}$ une suite de valeurs approchées de h en des points z'_k de J (avec $z'_0 = 1$ et $b_{-k} = \bar{b}_k$ pour $1 \leq k$).

Théorème 9 ([2*,th.2.1]) *Supposons la suite (z_k) dense dans K et introduisons une suite (z'_k) dense dans J. Soit $r \in C(\mathbb{T})$ une fonction positive vérifiant une condition de Hölder d'exposant μ, $0 < \mu \leq 1$, et nulle sur K. Pour tous N, $M \in \mathbb{N}$, il existe une application $T_{r,N,M} : \mathbb{C}^{N+1} \times \mathbb{C}^M \to A(\mathbb{D})$ telle que, si $\epsilon = \max\{|a_k - f(z_k)|\,,\ |b_k - h(z'_k)|\}$ pour $f \in C(K)$, $h \in C(J)$ telles que $f \vee h \in C(\mathbb{T})$ et*

$$\mathcal{E}(N, M, f, h, a, b) = \sup_{z\in\mathbb{T}} \left[|T_{r,N,M}(a_0, \cdots, a_N, b_1, \cdots, b_M)(z) - f \vee h(z)| - r(z)\right]\,,$$

on ait :

$$\mathcal{E}(N, M, f, h, a, b) \to 0 \;\; \textit{lorsque}\;\; N, M \to \infty \;\; \textit{et}\;\; \epsilon \to 0\,, \tag{25}$$

dès que f s'étend en une fonction de $A(\mathbb{D})$ vérifiant $|f - h| \leq r$ sur J.

Le théorème 9 peut s'interpréter comme un résultat de continuité d'un schéma d'approximation ou de convergence d'un algorithme n'utilisant en pratique qu'un nombre fini de mesures ; il fournit une solution $f_N = T_{r,N,M}(a_0, \cdots, a_N, b_1, \cdots, b_M)$ au problème **PIR**. Cependant, à partir des données partielles dont nous disposons, nous ne pouvons contraindre ce modèle f_N à converger robsutement sur tout $\mathbb{T}$; sur J, le modèle f_N ne converge vers f qu'au sens faible–* :

$$\lim_{N\to\infty} \int_J f_N u \, d\theta = \int_J f u \, d\theta \quad \text{pour tout} \quad u \in L^1(J).$$

Par ailleurs, ce schéma est "accordé" (*tuned*) dans la terminologie de [60] : il nécessite une estimation *a priori* de la forme (24) sur J.

Une preuve constructive du théorème 9 est donnée dans [2*] dont nous décrivons brièvement les étapes.
La première repose sur une procédure d'interpolation robuste [91, 93, 109] qui fournit un polynôme trigonométrique p_N dépendant de $a_0, \cdots, a_N, b_1, \cdots, b_M$ et des points d'interpolation $z_0, \cdots, z_N, z'_1, \cdots, z'_M$ qui interpole robustement $f \vee h$:

$$\lim_{\substack{N\to\infty \\ \epsilon\to 0}} \sup_{\|\eta\|_\infty \le \epsilon} \|p_N - f \vee h\|_{L^\infty(\mathbb{T})} = 0 \, .$$

On suppose que $p_N \notin A(\mathbb{D})$, ce qui est le cas en général (sinon, $f_N = T_{r,N,M} = p_N$ fait l'affaire).
La seconde étape utilise une généralisation du théorème 2 au cas d'un problème extrémal borné par une contrainte en module *non nécessairement constante* sur J. Ainsi, pour toute suite (ε_N) de réels positifs, [2*, prop.1] garantit l'existence et l'unicité d'une fonction $f_N \in H^\infty$ telle que $|p_N - f_N| \le r + \varepsilon_N$ p.p. sur J vérifiant

$$\min\{\|p_N - g\|_{L^\infty(K)} \, , \; g \in H^\infty \, , \; |p_N - g| \le r + \varepsilon_N \text{ p.p. sur } J\} = \|p_N - f_N\|_{L^\infty(K)} = \beta^r_\infty \, ,$$

et

$$|p_N - f_N| = \begin{cases} \beta^r_\infty \text{ p.p. sur } K \, , \\ r + \varepsilon_N \text{ p.p. sur } J \, . \end{cases} \tag{26}$$

Un schéma de construction de f_N est alors fourni par le biais de la solution d'un problème de Nehari, comme dans le théorème 3.
La troisième et dernière étape de cette preuve consiste à trouver pour chaque N une valeur de ε_N garantissant que la fonction $f_N \in H^\infty$ appartient en fait à $A(\mathbb{D})$ (la discontinuité de f_N sur $\mathbb{T}$ est du type de celle de la solution g_0 de $\mathbf{PEB}_\infty$, voir remarque 3). Ceci est rendu possible par le lemme [2*, l.2.1] : en choisissant $\varepsilon_N = \beta^r_\infty$ pour chaque N, d'une part la fonction f_N est continue sur $\mathbb{T}$ (on utilise ici le théorème de Carleson–Jacobs, [51, th.IV.2.1]) et appartient donc à $A(\mathbb{D})$, d'autre part f_N possède les propriétés de convergence (25) requises.

Afin de rendre effectivement constructive la preuve résumée ci–dessus, nous utilisons le lemme [2*, l.2.2] pour le calcul par dichotomie de la valeur β^r_∞. Ceci permet de venir à bout de l'aspect implicite de cette procédure déja évoqué en section 3.1. La convergence de cet algorithme est alors établie dans [109, V.3] au moins lorsque $r \in C^2(\mathbb{T})$ et sous l'hypothèse de simplicité de la plus grande valeur singulière d'un opérateur de Hankel dont le symbole est déterminé par p_N, r, β^r_∞ et ε_N (génériquement vérifiée, d'après les résultats récents de [17]).

Notons que, sous des hypothèses fortes de régularité du critère, l'existence et la continuité sur $\mathbb{T}$ d'une solution à un problème d'optimisation sur H^∞ sont établies dans [62]. Les aspects algorithmiques de ces problèmes sont abordés dans [63, 64, 65] pour des fonctions de l'algèbre du disque à valeurs dans $\mathbb{C}^N$. Ces travaux regroupent des résultats qui s'apparentent aux théorèmes 2 et 9, pour des problèmes d'optimisation sur $\mathbb{T}$ plus généraux que **PN** (et donc que $\mathbf{PEB}_\infty$) et éventuellement dans $\mathbb{C}^N$, mais sous des hypothèses de régularité plus fortes. Ils sont eux–aussi présentés avec, en perspective, leurs applications à l'identification et au contrôle des systèmes linéaires stationnaires dans le domaine fréquentiel.

Enfin, nous avons aussi obtenu dans [2*, th.2.2] des bornes explicites de l'erreur $\mathcal{E}$ qui satisfont la propriété de robustesse (25). De plus, l'algorithme issu du théorème 9 a été implémenté et a donné lieu à des expérimentations numériques satisfaisantes. Certaines d'entre elles sont reproduites dans [2*, sec.3].

7 Conclusion

Nous n'avons pas répondu dans tous les cas aux questions formulées en section 2.1. En particulier, la construction d'une solution de Q_2 ou de $\mathbf{PEB}_p$ pour $2 < p < \infty$ fait l'objet de [28, 107] ; pour ces mêmes valeurs de p, la question Q_3 reste à traiter.
Cependant, pour $p = \infty$, nous abordons dans [17] des versions méromorphes de Q_2 et Q_3, de type AAK. Le but principal de ce travail est la résolution d'une généralisation de $\mathbf{PEB}_\infty$ et du problème de complétion borné traité en section 4 à l'approximation dans $H^\infty + R_N$ ainsi que l'obtention d'un algorithme de résolution et d'un résultat générique de continuité dans L^∞ des solutions de ces problèmes par rapport aux données f, h et M (ou C), garantissant une forme forte de robustesse des schémas d'approximation élaborés. En effet, même pour des problèmes de Nehari classiques pour lesquels $K = \mathbb{T}$, cette propriété de continuité de l'opérateur de meilleure approximation $L^\infty(\mathbb{T}) \to H^\infty$ est mise en défaut [88]. Il en va différemment sur certaines classes de fonctions possèdant une propriété d'héréditarité [68, 96, 97], comme l'algèbre de Wiener ou les classes de Hölder séparables $\lambda_\alpha(\mathbb{T})$. En particulier, l'opérateur de meilleure approximation $\lambda_\alpha(\mathbb{T}) \cap (H^\infty + R_N) \to \lambda_\alpha(\mathbb{T})$ est continu en toute fonction telle que l'opérateur de Hankel associé ait une $(N+1)^{me}$ valeur singulière simple [59, th.6].

Pour $p < \infty$, la continuité de la solution de $\mathbf{PEB}_p$ en fonctions des données f, h et M ne pose en revanche pas de problème. Mais l'estimation du taux de convergence de l'erreur en fonction de M, selon la régularité de f et h, est intéressante au plan algorithmique et reste à faire.

Une paramétrisation des solutions d'un problème mixte d'approximation sous–optimale sur $\mathbb{T}$ dans H^2 et H^∞ est fournie dans [46]. Nous envisageons d'étudier la généralisation de ce problème au cas d'un sous–ensemble de $\mathbb{T}$ en relation avec $\mathbf{PEB}_2$ et $\mathbf{PEB}_\infty$.

La caractérisation de l'adhérence de $H^\infty_{|K}$ dans $L^\infty(K)$, question soulevée par le théorème 1, semble ouverte à l'heure actuelle.

Enfin, une orientation originale et intéressante est fournie par l'application de ces techniques d'approximation analytique ou méromorphe à la résolution de problèmes inverses en équations aux dérivées partielles 2-dimensionnelles de type Dirichlet–Neumann. Ceci s'apparente au problème de Riemann–Hilbert ou au problème $\bar{\delta}$ consistant à trouver une fonction possédant un défaut d'analycité prescrit dans un domaine de $\mathbb{C}$ [1, ch.7]. Concernant en particulier les problèmes dits de contrôle non destructif, la présence de fissures, cavités, inclusions ou corrosions dans un matériau peut être diagnostiquée par la perte du caractère analytique d'une fonction reconstruite à partir des mesures (thermiques, acoustiques ou électrostatiques) effectuées sur une partie de sa surface. La répartition asymptotique des zéros des séries de Fourier tronquées de cette fonction est alors susceptible de permettre l'identification des défauts à proprement parler [89], de même que la localisation des pôles des approximants de Padé de certaines intégrales de Cauchy [84] ou des pôles des approximants méromorphes uniformes de fonctions de Stieljes [29].

Références

[1] M.J. Ablowitz and A.S. Fokas. *Complex variables, introduction and applications.* Cambridge Texts in Applied Mathematics, 1997.

[2] V.M. Adamjan, D.Z. Arov, and M.G. Krein. Analytic properties of Schmidt pairs for a Hankel operator and the generalized Schur–Takagi problem. *Math. USSR Sbornik*, 15:31–73, 1971.

[3] L. Aizenberg. *Carleman's formulas in complex analysis.* Kluwer Academic Publishers, 1993.

[4] D. Alpay, L. Baratchart, and J. Leblond. Some extremal problems linked with identification from partial frequency data. In J.L. Lions R.F. Curtain, A. Bensoussan, editor, *10th conference on analysis and optimization of systems, Sophia–Antipolis 1992*, volume 185 of *Lect. Notes in Control and Information Sc.*, pages 563–573. Springer-Verlag, 1993.

[5] D. Alpay and J. Leblond. Loewner interpolation in matrix Hardy classes. *Z. fur Analysis und ihre Anwendungen*, 14(2):225–233, 1995.

[6] D. Alpay and J. Leblond. Traces of Hardy functions and reproducing kernel Hilbert spaces. *Archiv der Math.*, 64:490–499, 1995. Short version in proc. MTNS 1993, II, Akademie Verlag, Mathematical Research, vol. 79, 607–608, U. Helmke, R. Mennicken, J. Saurer, eds.

[7] N. Aronszjan. Theory of reproducing kernels. *Trans. of the A.M.S.*, 68:337–404, 1950.

[8] K.J. Aström. *Introduction to stochastic control theory.* Mathematics in science and engineering. Academic Press, 1970.

[9] S. Axler. Factorization of L^∞ functions. *Ann. of Math.*, 106, 1977.

[10] T. Başar and P. Bernhard. *H^∞–Optimal control and related minimax design problems.* Birkäuser, 1995.

[11] L. Baratchart. Sur l'approximation rationnelle L^2 pour les systèmes dynamiques linéaires. Thèse de doctorat, Université de Nice, 1987.

[12] L. Baratchart, M. Cardelli, and M. Olivi. Identification and rational L^2 approximation : a gradient algorithm. *Automatica*, 27, $n^0$2:413–418, 1991.

[13] L. Baratchart, J. Grimm, J. Leblond, M. Olivi, F. Seyfert, and F. Wielonsky. Identification d'un filtre hyperfréquences par approximation dans le domaine complexe. Rapport technique INRIA n^o 219, 1998.

[14] L. Baratchart and J. Leblond. Identification harmonique et trace des classes de hardy sur un arc de cercle. In *Actes du Colloque en l'honneur du 60^e anniversaire du professeur Jean Céa, Sophia–Antipolis, avril 1992*, pages 17–29. Cépaduès–Editions, 1993.

[15] L. Baratchart and J. Leblond. On robust identification from partial frequency data. In H.L. Trentelman J.W. Nieuwenhuis, C. Praagman, editor, *Proc. of the 2d European Control Conference*, pages 2166–2168, Groningen, june 1993.

[16] L. Baratchart and J. Leblond. Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle with $1 \leq p < \infty$. *Constructive Approximation*, 14(1):41–56, 1998.

[17] L. Baratchart, J. Leblond, and J.R. Partington. Problems of Adamjan–Arov–Krein type on subsets of the circle and minimal norm extensions. INRIA research report n^o 3335, 1998, submitted for publication to Constructive Approximation. Short version in the proceedings of ECC'97.

[18] L. Baratchart, J. Leblond, and J.R. Partington. Hardy approximation to L^p functions on subsets of the circle, 1994. INRIA research report n^o 2377.

[19] L. Baratchart, J. Leblond, and J.R. Partington. Hardy approximation to L^∞ functions on subsets of the circle. *Constructive Approximation*, 12:423–436, 1996.

[20] L. Baratchart, J. Leblond, and J.R. Partington. Constrained H^p interpolation on subsets of the circle, 1997. Submitted for publication in the proceedings of the Conference in honour of M. Livšic 80^{th} birthday.

[21] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington, and N. Torkhani. Robust identification from partial frequency data. In *Proc. of the* 33$^{\text{rd}}$ *CDC*, pages 3900–3905. IEEE, 1994.

[22] L. Baratchart, J. Leblond, J.R. Partington, and N. Torkhani. Robust identification in the disc algebra from band-limited data. *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 42(9):1318–1325, 1997. INRIA research report n^o 2488, 1995.

[23] L. Baratchart, J. Leblond, and N. Torkhani. Best bounded H^2 extension of partial frequency data. In A. Isidori, S. Bittanti, E. Mosca, A. De Luca, M.D. Di Benedetto, and G. Oriolo, editors, *Proc. of the 3d European Control Conference*, volume 2, pages 1330–1335, Roma, september 1995.

[24] L. Baratchart and M. Olivi. Index of critical points in l^2-approximation. *System and Control Letters*, 10:167–174, 1988.

[25] L. Baratchart and M. Olivi. Critical points and error rank in best H^2 matrix rational approximation of fixed McMillan degree. *Constructive Approximation*, 14:273–300, 1998.

[26] L. Baratchart, M. Olivi, and F. Wielonsky. On a rational approximation problem in the real Hardy space H_2. *Theoretical Computer Science*, 94:175–197, 1992.

[27] L. Baratchart, E. B. Saff, and F. Wielonsky. A criterion for uniqueness of critical points in H^2 rational approximation. *Journal d'analyse mathématique*, 70:225–266, 1996.

[28] L. Baratchart and F. Seyfert. An L^p analog to the AAK theory. In preparation, 1998.

[29] L. Baratchart, N. Dudley Ward, J. Leblond, F. Mandrea, and E.B. Saff. How can meromorphic approximation help to solve some 2D inverse problems for the Laplacian? in preparation, short version as the abstract of an invited conference at PICOF'98.

[30] L. Baratchart and F. Wielonsky. Rational approximation in the real Hardy space H^2 and Stieltjes integrals: a uniqueness theorem. *Constructive approximation*, 9:1–21, 1993.

[31] L. Baratchart and M. Zerner. On the recovery of functions from pointwise boundary values in a Hardy–Sobolev class of the disk. *Computational and Applied Mathematics*, 46, 1993. Special issue on computational complex analysis.

[32] B. Beauzamy. *Introduction to Banach spaces and their geometry*. Mathematics studies. North–Holland, 1985.

[33] J.D. Boissonnat, A. Cerezo, and J. Leblond. Shortest paths of bounded curvature in the plane, 1991. INRIA research report n^o 1503.

[34] J.D. Boissonnat, A. Cerezo, and J. Leblond. Shortest paths of bounded curvature in the plane. In *Proceedings of the IEEE Conference, Robotics and Automation*, volume 3, pages 2315–2320, 1992. Nice.

[35] J.D. Boissonnat, A. Cerezo, and J. Leblond. A note on shortest paths in the plane subject to a constraint on the derivative of the curvature, 1994. INRIA research report n^o 2160.

[36] J.D. Boissonnat, A. Cerezo, and J. Leblond. Shortest paths of bounded curvature in the plane. *J. of Intelligent and Robotics Systems*, 10:1–16, 1994.

[37] C. Bonnet. Réalisation et réduction dans la base d'équilibre de systèmes linéaires de dimension infinie à temps discret. Application à des filtres fractionnaires et extension à des systèmes postfiltrés. Thèse de Doctorat, mention Mathématiques Appliquées, Université de Provence, centre St Charles, 1991.

[38] F. Conrad, J. Leblond, and J.-P. Marmorat. Energy decay estimates for a beam with nonlinear boundary feedback. In *Proceedings of the 2^{nd} COMCON Workshop on Stabilization of Flexible Structures*, 1989. Montpellier.

[39] F. Conrad, J. Leblond, and J.-P. Marmorat. Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback. In *Proceedings of the* 5^e *IFAC Symposium on Control of Distributed Parameters Systems*, 1989. Perpignan.

[40] F. Conrad, J. Leblond, and J.-P. Marmorat. Boundary control and stabilization of the one-dimensional wave equation. In J.-P. Zolésio, editor, *Proceedings of the IFIP Conference WG 7.2, Boundary control and boundary variations*, volume 178, pages 142–162. Springer-Verlag, LNCIS, 1990. Sophia–Antipolis.

[41] P.L. Duren. *Theory of H^p spaces.* Academic Press, 1970.

[42] H. Dym. *J-contractive matrix functions, reproducing kernel spaces and interpolation.* CBMS lecture notes, vol. 71. American mathematical society, Rhodes island, 1989.

[43] Projets MIAOU et SAFIR. Rapport de contrat CNES-INRIA. 1995.

[44] A. Fahri. Approximation dans les espaces de Hardy avec poids. Rapport de stage deuxième année, Ecole des Mines de St Etienne, 1994.

[45] P. Faurre and M. Robin. *Eléments d'automatique.* Dunod, 1984.

[46] C. Foias, A. Frazho, and A. Tannenbaum. On combined H^∞–H^2 suboptimal interpolants. *J. Linear Algebra and its Applications*, 203–204:443–469, 1994.

[47] B. Francis. *A course in H^∞ control theory.* Lectures notes in control and information sciences. Springer–Verlag, 1987.

[48] P. Fulcheri. Approximation Rationnelle Matricielle dans H^2 et Analyse de Schur. Application à l'Identification des Systèmes. Thèse de doctorat, Université de Nice, 1994.

[49] P. Fulcheri and M. Olivi. Identification and matrix rational H^2–approximation: a gradient algorithm based on Schur analysis. Rapport de recherche INRIA, N° 2520, Avril 1995.

[50] P. Fulcheri and M. Olivi. Matrix rational H^2–approximation: a gradient algorithm based on Schur analysis. To appear in SIAM J. on Control and Optimization.

[51] J.B. Garnett. *Bounded Analytic Functions.* Academic Press, 1981.

[52] M. Gevers. *Towards a joint design of identification and control?*, pages 111–151. H.L. Trentelman and J.C. Willems editors, Birkhauser, 1993.

[53] K. Glover. All optimal Hankel–norm approximations of linear multivariable systems and their L^∞–error bounds. *Int. J. Control* , 39(6):1115–1193, 1984.

[54] J. Grimm. La bibliothèque mathématique de Hyperion. INRIA technical report, in preparation.

[55] G. Gu and P.P. Khargonekar. Linear and nonlinear algorithms for identification in H_∞ with error bounds. *IEEE Trans. on Aut. Control*, 37:953–963, 1992.

[56] E.J. Hannan and M. Deistler. *The statistical theory of linear systems.* Wiley, New–York, 1988.

[57] B. Hanzon. A new balanced canonical form for stable multivariable systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 40(2):374–378, 1995.

[58] Harrap's. Dictionnaire anglais–français, 1987.

[59] E. Hayashi, L.N. Trefethen, and M.H. Gutknecht. The CF Table. *Constructive Approximation*, 6:195–223, 1990.

[60] A.J. Helmicki, C.A. Jacobson, and C.N. Nett. Control–oriented system identification: a worst-case/deterministic approach in H_∞. *IEEE Trans. on Aut. Cont.*, 36:1163–1176, 1991.

[61] H. Helson. *Harmonic Analysis.* Addison–Wesley, 1983.

[62] J.W. Helton and D.E. Marshall. Frequency domain design and analytic selections. *Indiana Univ. Math. J.*, 39:157–184, 1990.

[63] J.W. Helton and O. Merino. Conditions for optimality over H^∞. *SIAM J. Control and Optimization*, 31:1379–1415, 1993.

[64] J.W. Helton and O. Merino. Classical control using H^∞ methods. Draft, 1994.

[65] J.W. Helton, O. Merino, and T.E. Walker. Algorithms for optimizing over analytic functions. *Indiana Univ. Math. J.*, 42:839–874, 1993.

[66] K. Hoffman. *Banach spaces of analytic functions.* Dover, 1988.

[67] R. Jahaveri. Rapport de stage ingénieur, Ecole des Mines de Paris, 1992.

[68] J.P. Kahane. Best approximation in $L^1(T)$. *Bull. A.M.S.*, 80(5):788–804, 1974.

[69] P. Koosis. *Introduction to H_p spaces.* Cambridge University Press, 1980.

[70] M.G. Krein and P.Y. Nudel'man. Approximation of $L^2(\omega_1, \omega_2)$ functions by minimum–energy transfer functions of linear systems. *Problemy Peredachi Informatsii*, 11(2):37–60, 1975. English translation.

[71] G.A. Latham and B.D.O Anderson. Frequency-weighted optimal Hankel norm approximation of stable transfer functions. *Systems and Control Letters*, 5:229–236, 1985.

[72] J. Leblond. Stabilisation de structures flexibles. Thèse de Doctorat, mention Sciences de l'Ingénieur, Université de Nice, 1989.

[73] J. Leblond. Destabilization of a vibrating beam by introduction of an observation delay. In J.-P. Zolésio, editor, *Proceedings of the 1st COMCON Workshop on Stabilization of Flexible Structures.* Optimization Software, 1987. Montpellier.

[74] J. Leblond, S. Icart, and C. Samson. Some results on feedback stabilization of a one–link flexible arm, 1992. INRIA research report n^o 1682.

[75] J. Leblond, S. Icart, and C. Samson. Stabilizing law for a flexible arm in torsion. In *Proceedings of the IEEE Conference, Robotics and Automation*, volume 1, pages 794–799, 1992. Nice.

[76] J. Leblond and J.-P. Marmorat. Stabilization of a vibrating beam: a regularity result. In J.-P. Zolésio, editor, *Proceedings of the 1st COMCON Workshop on Stabilization of Flexible Structures.* Optimization Software, 1987. Montpellier.

[77] J. Leblond and J.-P. Marmorat. Boundary control and observation of some one–dimensional vibrating structures: regularity and stabilization, 1991. INRIA research report n^o 1382.

[78] J. Leblond and M. Olivi. Weighted H^2 approximation of transfer functions. *Math. Control Signals Systems (MCSS)*, 11:28–39, 1998.

[79] J. Leblond, E.B. Saff, and F. Wielonsky. Consistency properties in weighted H^2 rational approximation. In preparation.

[80] L. Ljung. *System identification : Theory for the user.* Prentice–Hall, 1987.

[81] K. Loewner. Über monotone Matrixfunktionen. *Math. Zeitschrift*, 38:177–216, 1934.

[82] B.F. Logan. Properties of high-pass signals. Ph.D. thesis, Faculty of Engineering and Applied Science, Columbia University, 1965.

[83] A.J. Macintyre and W.W. Rogosinski. Extremum problems in the theory of analytic functions. *Acta Math.*, 82:275–325, 1950.

[84] A.P. Magnus. Toeplitz matrix techniques and convergence of complex weight padé approximants. *J. Computational and Applied Math.*, 19:23–38, 1987.

[85] N. Maizi. Réduction au sens de la norme de Hankel de modèles dynamiques de dimension infinie. Thèse de Doctorat, mention Automatique, Ecole des Mines de Paris, 1992.

[86] F. Maurin. Approximation pondérée de fonctions de transfert dans les espaces de Hardy. Rapport de DEA (IUP GMI), Université de Paris Dauphine, 1996.

[87] R. Ober. Balanced realizations: canonical form, parametrization, model reduction. *Int. J. of Control*, 46(2):643–670, 1987.

[88] M. Papadimitrakis. Continuity of the operator of best uniform approximation by bounded analytic functions. *Bull. London Math. Soc.*, 25:44–48, 1993.

[89] N. Papamichael, I.E. Pritsker, and E.B. Saff. Asymptotic zero distribution of Laurent–type rational functions. *Journal of Approximation Theory*, 89:58–88, 1997.

[90] J.R. Partington. *An introduction to Hankel operators.* Cambridge University Press, 1988.

[91] J.R. Partington. Robust identification and interpolation in H_∞. *Int. J. of Control*, 54:1281–1290, 1991.

[92] J.R. Partington. Robust identification in H_∞. *Jour. of Math. Analysis and Applications*, 166:428–441, 1992.

[93] J.R. Partington. Interpolation in normed spaces from the values of linear functionals. *Bull. London Math. Soc.*, 26:165–170, 1994.

[94] J.R. Partington. *Interpolation, identification and sampling.* Oxford University Press, 1997. To appear.

[95] D.J. Patil. Representation of H^p functions. *Bull. A.M.S.*, 78(4), 1972.

[96] V.V. Peller. Boundedness properties of the operators of best approximation by analytic and meromorphic functions. *Ark. Math.*, 30(2):331–343, 1992.

[97] V.V. Peller and S.V. Khrushchev. Hankel operators, best approximations, and stationary Gaussian processes. *Russian Math. Surveys*, 37(1):61–144, 1982.

[98] M. Rosenblum and J. Rovnyak. Restrictions of analytic functions I. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 48:113–119, 1975.

[99] M. Rosenblum and J. Rovnyak. Restrictions of analytic functions II. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 51(2):335–343, 1975.

[100] M. Rosenblum and J. Rovnyak. Restrictions of analytic functions III. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 52:222–226, 1975.

[101] M. Rosenblum and J. Rovnyak. *Hardy classes and operator theory.* Oxford University Press, 1985.

[102] Y. Rozanov. *Stationary Random Processes.* Holden Day, San Francisco, 1967.

[103] W. Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Graw Hill, 1982.

[104] S. Saitoh. *Theory of reproducing kernels and its applications.* Longman scientific and technical, 1988.

[105] L. Schwartz. *Etude des sommes d'exponentielles.* Hermann, 1959.

[106] F. Seyfert. Identification d'une fonction de transfert à partir de données fréquentielles incomplètes. Rapport de stage ingénieur, Ecole des Mines de St Etienne, 1993.

[107] F. Seyfert. Problèmes extrémaux dans les espaces de Hardy. Application à l'identification de filtres hyperfréquences à cavités couplées. Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, février 1998.

[108] G. Szegö. *Orthogonal Polynomials.* Colloquium Publications. AMS, 1939.

[109] N. Torkhani. Contribution à l'identification fréquentielle robuste des systèmes dynamiques linéaires. Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, décembre 1995.

[110] F. Viry. Identification de fonctions de transfert : choix de pondérations. Rapport de DEA (ARAVIS), Université de Nice, 1996.

[111] B. Wahlberg. On System Identification and Model Reduction. Report LiTH-ISY-I-0847, University of Linköping, Sweden, 1987.

[112] N.J. Young. *An introduction to Hilbert space.* Cambridge University Press, 1988.