IDENTIFICATION HARMONIQUE ET TRACE DES CLASSES DE HARDY SUR UN ARC DE CERCLE

Laurent BARATCHART, Juliette LEBLOND,

INRIA, 2004 route des Lucioles, Sophia–Antipolis, 06565 Valbonne, France.

1 Introduction et notations

Notre point de départ est une généralisation à un arc fermé I du cercle unité $\mathbb{T}$ des problèmes extrémaux classiques dans l'espace de Hardy H^p du disque unité $\mathbb{D}$ qui fait l'objet de [2]. Plus spécifiquement, notons $J = \mathbb{T} \setminus I$. Etant donnés $p \geq 1$, $f \in L^p(I)$ et $M > 0$, on y établit l'existence et, pour $p < \infty$, l'unicité d'une fonction $g \in H^p$, de norme inférieure à M dans $L^p(J)$, qui soit le plus proche possible de f dans $L^p(I)$. Dans le cas $p = 2$, on caractérise l'approximant g par l'intermédiaire d'un opérateur de Toeplitz et l'on obtient des informations partielles sur l'erreur d'approximation.
Dans [6], Krein et Nudel'man considèrent un problème analogue, bien que sous une forme duale, pour $p = 2$ et dans l'espace de Hardy du demi–plan supérieur. Etant donnés $f \in L^2(\Gamma)$ et $\varepsilon > 0$, Γ étant un intervalle de l'axe réel positif, ils établissent l'existence et l'unicité d'une fonction de l'espace de Hardy du demi–plan qui soit à une distance inférieure à ε de f dans $L^2(\Gamma)$ et qui minimise la norme dans $L^2(\mathbb{R}_+ \setminus \Gamma)$ ou dans $L^2(\mathbb{R}_+)$.
Dans le but de limiter les oscillations de l'approximant g et, pour $p = 2$, de garantir la convergence uniforme sur I de cet approximant vers le modèle f lorsque la contrainte M tend vers l'infini, on s'intéresse à un problème analogue dans un espace de Hardy–Sobolev.
Pour $1 \leq p < \infty$, on désigne par H^p l'espace de Hardy des fonctions h analytiques dans $\mathbb{D}$ telles que la quantité

$$\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(re^{i\theta})|^p d\theta \right)^{1/p}$$

reste bornée quand r tend vers 1 ([5]). Rappelons que les fonctions h de H^p admettent une limite non tangentielle p.p. sur $\mathbb{T}$, encore notée h, appartenant à $L^p(\mathbb{T})$. Ceci permet d'identifier H^p au sous–espace de $L^p(\mathbb{T})$ formé des fonctions dont les coefficients de Fourier d'indice négatif sont nuls. Soient $W^{1,p}$ l'espace de Sobolev des fonctions $f(e^{i\theta})$ appartenant à $L^p(\mathbb{T})$ ainsi que leur dérivée par rapport à θ, et $\mathcal{D}_p$ l'espace de "Hardy–Sobolev" des fonctions $f(z)$ analytiques dans $\mathbb{D}$ dont la dérivée par rapport à z appartient à H^p. En fait, on montre (lemme 1) que $\mathcal{D}_p = H^p \cap W^{1,p}(\mathbb{T})$. On munit $\mathcal{D}_p$ et $W^{1,p}(\mathbb{T})$ de la norme :

$$\|f\|_{W^{1,p}} = \left(\|f\|_{L^p}^p + \|\frac{df}{d\theta}\|_{L^p}^p\right)^{1/p}.$$

Considérons alors le problème suivant :
(P) : Etant données $f \in W^{1,p}(I)$ et $M > 0$, on cherche $g \in \mathcal{D}_p$, de norme inférieure à M dans $W^{1,p}(J)$, qui soit le plus proche possible de f dans $W^{1,p}(I)$.

Une motivation pour ce type de problème provient de l'identification des systèmes dynamiques linéaires. En effet, les procédures classiques d'identification harmonique fournissent les valeurs d'une fonction de transfert inconnue f à des fréquences données de la bande passante I d'un système linéaire. On en cherche alors un modèle stable, c'est à dire une fonction g appartenant à un espace de Hardy corroborant de manière satisfaisante les données expérimentales dans I et stable à l'extérieur de I. Il s'agit–là du problème traité dans [2] et dans [6]. La recherche d'un modèle g moins oscillant et uniformément proche des données conduit au problème d'approximation *(P)* pour lequel on établit ici l'existence et l'unicité de la solution. Pour finir, on propose des estimations de l'erreur d'approximation dans $L^2(I)$ et dans $L^\infty(I)$, non pour le problème *(P)* lui–même, mais pour une modification de ce dernier.
On notera h' la dérivée en z d'une fonction h analytique dans $\mathbb{D}$. Et pour toute $f \in W^{1,p}$, on désignera par f' la fonction $f'(e^{i\theta}) = -ie^{-i\theta}\, df/d\theta(e^{i\theta})$. Soit $\Pi_I : W^{1,p}(\mathbb{T}) \to W^{1,p}(I)$ l'application restriction.
On utilisera par la suite les lemmes suivants.

Lemme 1 *$\mathcal{D}_p = H^p \cap W^{1,p}(\mathbb{T})$ et si $h \in \mathcal{D}_p$, $\|h\|_{W^{1,p}}^p = \|h\|_{L^p}^p + \|h'\|_{L^p}^p$.*

Preuve : Soit $h \in \mathcal{D}_p$. Par définition, h est analytique dans $\mathbb{D}$ et $h' \in H^p$. Or $H^p \subset H^1$, $\forall p > 1$. Ainsi, $h' \in H^1$ et d'après [5, thm.3.11], h est continue dans $\overline{\mathbb{D}}$, absolument continue sur $\mathbb{T}$ et

$$\frac{dh}{d\theta}(e^{i\theta}) = i\, e^{i\theta}\, h'(e^{i\theta})\,, \tag{1}$$

pour tout $e^{i\theta} \in \mathbb{T}$. En particulier, $h \in H^\infty \subset H^p$ et

$$\|\frac{dh}{d\theta}\|_{L^p} = \|h'\|_{L^p} < \infty\,.$$

Ainsi $h \in W^{1,p}(\mathbb{T}) \cap H^p$.
Réciproquement, soit $h \in H^p \cap W^{1,p}(\mathbb{T})$. Alors, h est analytique dans $\mathbb{D}$, continue dans $\overline{\mathbb{D}}$ et absolument continue sur $\mathbb{T}$. Et [5, thm.3.11] entaîne $h' \in H^1$ et vérifie (1). Ainsi, $h' \in L^p(\mathbb{T})$ et finalement, $h' \in H^p$, d'après [5, thm.2.11]. ■

Lemme 2 $f \in W^{1,p}(I) \setminus \Pi_I(\mathcal{D}_p) \Rightarrow f' \in L^p(I) \setminus \Pi_I(H^p)$.

Preuve : Supposons $f'(e^{i\theta}) = -i\, e^{-i\theta}\, df/d\theta(e^{i\theta}) \in \Pi_I(H^p)$. D'après [5, thm.3.11], f' est alors la trace sur I de la dérivée en z d'une fonction analytique dans $\mathbb{D}$, absolument continue sur $\mathbb{T}$. ■

Lemme 3 *$\mathcal{D}_p$ est faiblement fermé dans $W^{1,p}(\mathbb{T})$.*

Preuve : L'évaluation des coefficients de Fourier étant continue sur $W^{1,p}(\mathbb{T})$, il résulte de la définition de $\mathcal{D}_p$ et du lemme 1 que $\mathcal{D}_p$ est fermé dans $W^{1,p}(\mathbb{T})$, et donc faiblement fermé puisque c'est un espace vectoriel. ■

2 Un résultat de densité dans $W^{1,p}(I)$

Théorème 1 *Pour $1 \leq p < \infty$, si I est un arc fermé strictement contenu dans $\mathbb{T}$, $\Pi_I(\mathcal{D}_p)$ est dense dans $W^{1,p}(I)$.*

Preuve : Soit $f \in W^{1,p}(I)$. Sa dérivée $df/d\theta$ appartient donc à $L^p(I)$, ainsi que la fonction $f'(e^{i\theta}) = -i\, e^{-i\theta}\, df/d\theta$. Or d'après le théorème 1 de [2], $\Pi_I(H^p)$ est dense dans $L^p(I)$. En conséquence, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\rho \in H^p$ telle que

$$\|f' - \rho\|_{L^p(I)} \leq \varepsilon \, .$$

Puisque ρ est analytique dans $\mathbb{D}$, elle s'écrit $\rho(z) = \sum_{n\geq 0} \rho_n\, z^n$, pour tout $z \in \mathbb{D}$, et pour $\nu_0 \in \mathbb{R}$, la fonction analytique $\nu(z) = \nu_0 + \sum_{n\geq 0} \frac{\rho_n}{n+1}\, z^{n+1}$ vérifie $\nu' = \rho$. Ainsi, $\nu \in \mathcal{D}_p$.
Montrons alors que ν peut être choisie proche de f dans $W^{1,p}(I)$. Soit un point quelconque $e^{i\theta_0}$ dans I. Fixons ν_0 de sorte que $\nu(e^{i\theta_0}) = f(e^{i\theta_0})$. Posons $h = f - \nu$: $h \in W^{1,p}(I)$ et $h(e^{i\theta_0}) = 0$. Et l'on a $d\nu/d\theta = i\, e^{i\theta}\, \nu'$. De plus,

$$\frac{dh}{d\theta} = \frac{df}{d\theta} - i\, e^{i\theta}\, \rho = i\, e^{i\theta}\, (f' - \rho) \, ,$$

de sorte que

$$\|\frac{dh}{d\theta}\|_{L^p(I)} \leq \varepsilon \, .$$

Mais, grâce à l'inégalité de Hölder,

$$|h(e^{i\theta})| \leq \int_{\theta_0}^{\theta} |\frac{dh}{d\theta}(e^{i\theta})|\, d\theta \leq l(I)^{\frac{p-1}{p}}\, \|\frac{dh}{d\theta}\|_{L^p(I)} \, ,$$

si $l(I)$ désigne la mesure de Lebesgue de l'arc I $(0 < l(I) < 2\pi)$. Finalement, $\|h\|_{W^{1,p}(I)} \leq (l(I)^{p-1} + 1)^{1/p}\, \varepsilon$. ■

Le théorème 1 montre en particulier qu'en l'absence de contrainte sur J, c'est à dire si $M = \infty$, le problème *(P)* est mal posé : toute fonction de $W^{1,p}(I)$ ($1 \leq p < \infty$) peut être approchée arbitrairement près (au sens de la norme de $W^{1,p}(I)$) par une fonction de $\mathcal{D}_p$. De plus, comme l'établit le résultat suivant, ces approximants sont représentent des fonctions de transfert de moins en moins stables, au sens de la théorie des systèmes.

Proposition 1 *Soit $f \in W^{1,p}(I)$ et soit (g_n) une suite de fonctions de $\mathcal{D}_p$ convergeant vers f dans $W^{1,p}(I)$. Si f n'est pas la trace sur I d'une fonction de $\mathcal{D}_p$, alors $\lim_{n\to\infty} \|g_n\|_{W^{1,p}(J)} = \infty$.*

Preuve : Puisque (g_n) converge vers f dans $W^{1,p}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|\frac{df}{d\theta} - \frac{dg_n}{d\theta}\|_{L^p(I)} = 0\,,$$

d'où

$$\lim_{n\to\infty} \|f' - g_n'\|_{L^p(I)} = 0\,.$$

Or d'après le lemme 2, $f' \notin \Pi_I(H^p)$. Ainsi, la proposition 2 de [2] s'applique, et $\lim_{n\to\infty} \|g_n'\|_{L^p(J)} = \infty$. ■

La proposition 1 suggère donc l'adjonction d'une contrainte sur la norme $W^{1,p}(J)$ de l'approximant. On étudie maintenant le problème *(P)*.

3 Un résultat de projection dans $\mathcal{D}_p$

Nous montrons ici que le problème *(P)* est bien posé, pour $1 < p < \infty$.

Théorème 2 *Soit $1 < p < \infty$ et soit $f \in W^{1,p}(I)$. Pour toute constante positive $M < \infty$, il existe une unique fonction $g_0 \in \mathcal{D}_p$ telle que $\|g_0\|_{W^{1,p}(J)} \leq M$ et*

$$\|f - g_0\|_{W^{1,p}(I)} = \min_{\substack{g\in\mathcal{D}_p \\ \|g\|_{W^{1,p}(J)}\leq M}} \|f - g\|_{W^{1,p}(I)}\,. \tag{2}$$

De plus, si $f \neq g_0$ p.p. sur I, $\|g_0\|_{W^{1,p}(J)} = M$.

Preuve : Dans ce qui suit, $g|_I$ (resp. $g|_J$) désigne la restriction à I (resp. J) d'une fonction g définie sur $\mathbb{T}$. Soit

$$\mathcal{C}_M = \{g|_I\,,\ g \in \mathcal{D}_p\,,\ \|g\|_{W^{1,p}(J)} \leq M\}\,.$$

$\mathcal{C}_M$ est un sous–ensemble convexe de $W^{1,p}(I)$. Montrons qu'il est fermé. Soit $(g_n|_I)$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}_M$ convergeant vers une fonction g dans $W^{1,p}(I)$.

La suite (g_n) de $\mathcal{D}_p$ est bornée dans l'espace de Banach refléxif $W^{1,p}(\mathbb{T})$, elle admet donc une sous–suite (g_{n_k}) qui converge faiblement vers une fonction $\tilde{g}$ dans $W^{1,p}(\mathbb{T})$. Le lemme 3 entraîne que $\tilde{g} \in \mathcal{D}_p$. Mais, $(g_{n_k}|_I)$ et $(g_{n_k}|_J)$ convergent faiblement dans $W^{1,p}(I)$ et $W^{1,p}(J)$ respectivement. Ainsi, $\tilde{g}|_I = g$ p.p. et $\|\tilde{g}\|_{W^{1,p}(J)} \leq M$, les boules étant faiblement fermées dans $W^{1,p}(J)$. Ceci implique que $g \in \mathcal{C}_M$.
Ainsi, $\mathcal{C}_M$ est un sous–ensemble fermé convexe de l'espace de Banach uniformément convexe $W^{1,p}(I)$ ([1, thm.3.5]). Il existe donc une projection π de $W^{1,p}(I)$ dans $\mathcal{C}_M$ ([4, 3,II,1,prop.5]) et $g_0 = \pi\, f$ est l'unique solution de (2).

Remarque 1 Cette caractérisation du meilleur approximant g_0 comme projection de f sur $\mathcal{C}_M$ (π est continue sur $W^{1,p}(I)$) garantit en principe une certaine robustesse de la procédure par rapport à des perturbations de f dans $W^{1,p}(I)$.

Montrons maintenant que le meilleur approximant $g_0 \in \mathcal{C}_M$ d'une fonction $f \in W^{1,p}(I)$ sature la contrainte : $\|g_0\|_{W^{1,p}(J)} = M$, si $g_0 \neq f$ p.p. sur I. Cela provient de la

Proposition 2 *Soit Γ un arc de cercle, $\Gamma \subset \mathbb{T}$. Soit $1 < p < \infty$ et :*

$$\begin{array}{rccl} \Psi_W : & W^{1,p}(\Gamma) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & g & \longmapsto & \|g\|^p_{W^{1,p}(\Gamma)} = \int_\Gamma |g(e^{i\theta})|^p d\theta + \int_\Gamma |\frac{dg}{d\theta}(e^{i\theta})|^p d\theta \end{array}$$

L'application Ψ_W est de classe C^1 sur $W^{1,p}(\Gamma)$ et sa dérivée est donnée pour toute fonction $g \in W^{1,p}(\Gamma)$ par

$$\begin{aligned} D_g\Psi_W(u) &= p \int_\Gamma |g(e^{i\theta})|^{p-2}\, \mathrm{Re}\, [\overline{g(e^{i\theta})}\, u(e^{i\theta})]\, d\theta \\ &+ p \int_\Gamma |\frac{dg}{d\theta}(e^{i\theta})|^{p-2}\, \mathrm{Re}\, [\overline{\frac{dg}{d\theta}(e^{i\theta})}\, \frac{du}{d\theta}(e^{i\theta})]\, d\theta\,, \end{aligned} \tag{3}$$

pour tout $u \in W^{1,p}(\Gamma)$ (et où $|h(e^{i\theta})|^{p-2}\, h(e^{i\theta}) = 0$ si $h(e^{i\theta}) = 0$).

Preuve : Puisque, pour $1 < p < \infty$, l'espace de Banach $W^{1,p}(\Gamma)$ est uniformément convexe, sa norme est une application de classe C^1 sur $W^{1,p}(\Gamma) \setminus \{0\}$ ([4, 3,II,2,prop.1,2,4]). Cependant, l'application

$$\begin{array}{rccl} \Psi : & L^p(\Gamma) \times L^p(\Gamma) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (g,h) & \longmapsto & \|g\|^p_{L^p(\Gamma)} + \|h\|^p_{L^p(\Gamma)} \end{array}$$

est de classe C^1 sur $L^p(\Gamma) \times L^p(\Gamma)$ ([2, prop.3]) et, pour tout $(g, h) \in L^p(\Gamma) \times L^p(\Gamma)$, sa derivée est donnée par

$$\begin{aligned} D_{(g,h)}\Psi(u,v) &= p \int_\Gamma |g(e^{i\theta})|^{p-2}\, \mathrm{Re}\, [\overline{g(e^{i\theta})}\, u(e^{i\theta})]\, d\theta \\ &+ p \int_\Gamma |h(e^{i\theta})|^{p-2}\, \mathrm{Re}\, [\overline{h(e^{i\theta})}\, v(e^{i\theta})]\, d\theta\,, \end{aligned} \tag{4}$$

pour tout $(u,v) \in L^p(\Gamma) \times L^p(\Gamma)$. Soit T l'isométrie linéaire

$$\begin{array}{rrcl} T \;:\; & W^{1,p}(\mathbb{T}) & \longrightarrow & \operatorname{Im} T \subset L^p(\mathbb{T}) \times L^p(\mathbb{T}) \\ & h & \longmapsto & (h, -ie^{-i\theta}\dfrac{dh}{d\theta}) = (h, h')\,. \end{array} \tag{5}$$

On a $\Psi_W(g) = \Psi(T\,g)$ pour tout $g \in W^{1,p}(\Gamma)$. En dérivant cette relation, on obtient $D_g\Psi_W(u) = D_{Tg}\Psi(T\,u)$ pour tous $g, u \in W^{1,p}(\Gamma)$. On en déduit grâce à (5) l'expression (3) de la dérivée dont l'examen montre qu'elle est aussi continue en 0. ■

Remarque 2 Lorsque $p = 2$, la preuve de la proposition 2 est immédiate : Ψ_W est de classe C^1 en tant qu'application bilinéaire continue sur l'espace de Hilbert $W^{1,2}(\Gamma)$, et $D_g\Psi(u) = 2\operatorname{Re}\,(g,u)_{W^{1,2}(\Gamma)}$, $\forall g, u \in W^{1,2}(\Gamma)$.

Soit alors $f \in W^{1,p}(I)$. D'après la proposition 2, l'application

$$\begin{array}{rrcl} \xi : & W^{1,p}(I) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & g & \longmapsto & \|f-g\|^p_{W^{1,p}(I)} \end{array}$$

est de classe C^1 en tout point $g \in W^{1,p}(I)$ et sa dérivée est donnée par

$$\begin{aligned} D_g\xi(u) &= p\int_I |(f-g)(e^{i\theta})|^{p-2}\operatorname{Re}\,[\overline{(f-g)(e^{i\theta})}\,u(e^{i\theta})]\,d\theta \\ &+ p\int_I |(\frac{df}{d\theta} - \frac{dg}{d\theta})(e^{i\theta})|^{p-2}\operatorname{Re}\,[\overline{(\frac{df}{d\theta} - \frac{dg}{d\theta})(e^{i\theta})}\,\frac{du}{d\theta}(e^{i\theta})]\,d\theta \end{aligned}$$

pour tout $u \in W^{1,p}(I)$. L'injection de $\mathcal{D}_p$ dans $W^{1,p}(I)$ est continue et la restriction de ξ à $\mathcal{D}_p$ est aussi de classe C^1 en tout $g \in \mathcal{D}_p$. Supposons que $\|g_0\|_{W^{1,p}(J)} < M$. Dans ce cas, g_0 est un point intérieur de $\mathcal{C}_M$ dans $\mathcal{D}_p$ où ξ atteint son minimum sur $\mathcal{C}_M$. On a donc

$$D_{g_0}\,\xi(u) = 0 \text{ pour tout } u \in \mathcal{D}_p\,. \tag{6}$$

Définissons alors la fonctionnelle linéaire complexe ϕ sur $W^{1,p}(I)$ par

$$\begin{aligned} \phi(u) &= \int_I |(f-g_0)(e^{i\theta})|^{p-2}\,\overline{(f-g_0)(e^{i\theta})}\,u(e^{i\theta})\,d\theta \\ &+ \int_I |(\frac{df}{d\theta} - \frac{dg}{d\theta}_0)(e^{i\theta})|^{p-2}\,\overline{(\frac{df}{d\theta} - \frac{dg_0}{d\theta})(e^{i\theta})}\,\frac{du}{d\theta}(e^{i\theta})\,d\theta\,. \end{aligned}$$

On a, pour tout $u \in W^{1,p}(I)$,

$$\mathrm{Re}\ \phi(u) = \frac{1}{p}\, D_{g_0}\, \xi(u)\,,\ \mathrm{Im}\ \phi(u) = -\frac{1}{p}\, D_{g_0}\, \xi(i\, u)\,.$$

Ainsi, (6) entraîne $\phi(u) = 0$ pour tout $u \in \mathcal{D}_p$. Or ϕ est continue sur $W^{1,p}(I)$. Mais $\mathcal{D}_p$ est dense dans $W^{1,p}(I)$ d'après le théorème 1. Et ϕ est donc identiquement nulle sur $W^{1,p}(I)$. En particulier, $\phi(f - g_0) = 0$, ce qui entraîne $g_0 = f$ p.p. sur I. Ceci achève la preuve du théorème 2. ■

Remarque 3 On note que si l'arc I est symétrique et la fonction f réelle : $\overline{f(z)} = f(\bar{z})$, $\forall z \in I$, alors l'approximant g_0 solution de (2) est réel, puisqu'il est unique et que $\frac{1}{2}(g_0(z) + \overline{g_0(\bar{z})})$ approche f aussi bien que g_0. De même, le meilleur approximant d'une fonction "antiréelle" : $\overline{f(z)} = -f(\bar{z})$, est "antiréel".

Remarque 4 Pour $1 < p < \infty$, $\Gamma \subset \mathbb{T}$ et $e^{i\theta_0} \in \Gamma$, soit $W_0^{1,p}(\Gamma)$ l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Gamma)$ muni de la norme suivante, équivalente à $\|\ \|_{W^{1,p}(\Gamma)}$:

$$\|f\|_{0,\Gamma}^p = \|\frac{df}{d\theta}\|_{L^p(\Gamma)}^p + |f(e^{i\theta_0})|^p\,.$$

Les mêmes arguments qu'en section 2 prouvent que $\Pi_I(\mathcal{D}_p)$ est dense dans $W_0^{1,p}(I)$, si I est un arc fermé strictement contenu dans $\mathbb{T}$. Soit $e^{i\theta_0} \in I$. L'application :

$$\begin{array}{rcl} W_0^{1,p}(I) & \longrightarrow & L^p(I) \times \mathbb{C} \\ f & \longmapsto & (\dfrac{df}{d\theta},\ f(e^{i\theta_0})) \end{array}$$

est une isométrie et $W_0^{1,p}(I)$ est uniformément convexe. On en déduit comme dans la preuve du théorème 2 que : pour $1 < p < \infty$, $f \in W^{1,p}(I)$ et $N > 0$, il existe une unique fonction $h_0 \in \mathcal{D}_p$ telle que $\|g_1\|_{0,J} \leq N$ et

$$\|f - g_1\|_{0,I} = \min_{\substack{g \in \mathcal{D}_p \\ \|g\|_{0,J} \leq N}} \|f - g\|_{0,I}\,. \tag{7}$$

De plus, si $f \neq g_1$ p.p. sur I, $\|g_1\|_{0,J} = N$. Si l'on choisit $N > |f(e^{i\theta_0})|$, et si l'on pose $Q = N - |f(e^{i\theta_0})|$, l'approximant g_1 est tel que $dg_1/d\theta = h_1$ est l'unique solution du problème traité dans [2] :

$$\|\frac{df}{d\theta} - h_1\|_{L^p(I)} = \min_{\substack{h \in H^p \\ \|h\|_{L^p(J)} \leq Q}} \|\frac{df}{d\theta} - h\|_{L^p(I)}\,,$$

et l'on a $\|h_1\|_{L^p(J)} = Q$ si $h_1 \neq df/d\theta$ p.p. sur I. On obtient alors g_1 comme étant la primitive en θ de h_1 vérifiant $g_1(e^{i\theta_0}) = f(e^{i\theta_0})$.

4 Caractérisation de l'approximant dans $W^{1,2}(I)$

On explicite tout d'abord l'approximant g_0 dans le cas hilbertien $p = 2$.
Pour tout arc $\Gamma \subset \mathbb{T}$, l'espace de Sobolev $W^{1,2}(\Gamma)$ est muni du produit scalaire usuel :

$$(g,h)_{W^{1,2}(\Gamma)} = (g,h)_{L^2(\Gamma)} + (\frac{dg}{d\theta}, \frac{dh}{d\theta})_{L^2(\Gamma)} = (g,h)_{L^2(\Gamma)} + (g',h')_{L^2(\Gamma)}$$

avec la notation $h' = -ie^{-i\theta}\, dh/d\theta$ sur Γ. Pour $0 < M < \infty$, soit

$$\Gamma_M = \{g \in \mathcal{D}_2\, ,\ \|g\|_{W^{1,2}(J)} = M\}\, .$$

Lemme 4 *Γ_M est une sous–variété C^1 de $\mathcal{D}_2$.*

Preuve : L'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{D}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & g & \longmapsto & \|g\|^2_{W^{1,2}(J)} \end{array} .$$

est de classe C^1 et pour $g \in \mathcal{D}_2$, $u \in \mathcal{D}_2$,

$$D_g\, \Phi(u) = 2\, \mathrm{Re}\ (g,u)_{W^{1,2}(J)}\, .$$

En tout $g \neq 0$, $D_g\, \Phi$ est surjective. De plus, en tant que sous–espace fermé de l'espace de Hilbert $\mathcal{D}_2$, $\mathrm{Ker}\, D_g\, \Phi$ est complémentable dans $\mathcal{D}_2$. L'application Φ est donc une submersion sur $\mathcal{D}_2 \setminus \{0\}$ et en particulier sur $\Gamma_M = \Phi^{-1}(M^2)$ ce qui achève la preuve ([7, II, 2, prop.2]). ∎

Notons que pour tout $g \in \Gamma_M$ l'espace tangent à Γ_M en g est $T_M(g) = \mathrm{Ker}\, D_g\, \Phi$.

On suppose dorénavant que $f \in W^{1,2}(I) \setminus \mathcal{C}_M$.
Rappelons que π désigne la projection orthogonale sur le sous–ensemble convexe fermé $\mathcal{C}_M$ de $W^{1,2}(I)$ et $g_0|_I = \pi\, f$ est l'unique solution de (2). L'application $\xi\ :\ \mathcal{D}_2 \to \mathbb{R}$ définie par $\xi(g) = \|f - g\|^2_{W^{1,2}(I)}$ est de classe C^1 sur Γ_M (voir la preuve du théorème 2) et $g \in \Gamma_M$ est point critique de ξ si et seulement si

$$\mathrm{Re}\ (f - g, u)_{W^{1,2}(I)} = 0\ ,\ \ \forall u \in T_M(g)\, . \tag{8}$$

Proposition 3 *Pour $p = 2$, la meilleure approximation g_0 de f au sens de* (2) *est l'unique point critique de ξ sur Γ_M satisfaisant*

$$\mathrm{Re}\ (f - g_0, g_0)_{W^{1,2}(I)} \geq 0\, . \tag{9}$$

La preuve de cette proposition est essentiellement la même que celle de [2, prop.4] et nous ne la reproduisons pas ici. Elle repose sur la propriété classique suivante des projections (voir par exemple [4, 2, I, prop.2]) : $g_0|_I = \pi f$ est caractérisé par

$$\mathrm{Re}\ (f - g_0, w - g_0)_{L^2(I)} \le 0 \ , \ \forall w \in \mathcal{C}_M \ . \tag{10}$$

Nous établissons maintenant une formule explicite pour l'approximant g_0 grâce à la proposition 3. En effet, elle indique que g_0 vérifie (8) et donc

$$\mathrm{Re}\ (f - g_0, u)_{W^{1,2}(I)} - \mathrm{Re}\ (g_0, u)_{W^{1,2}(J)} = 0 \ , \ \forall u \in T_M(g_0) \, . \tag{11}$$

Considérons alors l'isométrie T définie par (5) (on a ici $p = 2$). Si $P_{T(\mathcal{D}_2)}$ désigne la projection orthogonale de $L^2(\mathbb{T}) \times L^2(\mathbb{T})$ sur $T(\mathcal{D}_2)$ et si $\chi_\Gamma \in L^2(\mathbb{T})$ est la fonction caractéristique de l'arc $\Gamma \subset \mathbb{T}$, l'équation (11) entraîne :

$$(P_{T(\mathcal{D}_2)}\,(\chi_I\, f - g_0 \ , \ \chi_I\, f' - g_0'), T\, u)_{L^2(\mathbb{T})\times \mathrm{L}^2(\mathbb{T})} = 0 \ , \ \forall u \in T_M(g_0) \, ,$$

ou encore, si $\mathcal{T} : W^{1,2}(I) \to \mathcal{D}_2$ est défini par

$$\mathcal{T}\ f = T^{-1}\, P_{T(\mathcal{D}_2)}\,(\chi_I\, f \ , \ \chi_I\, f') \, ,$$

$$(\mathcal{T}\ f - g_0, u)_{W^{1,2}(\mathbb{T})} = 0 \ , \ \forall u \in T_M(g_0) \, , \tag{12}$$

Et puisque $\|g_0\|_{W^{1,2}(J)} = M$ (théorème 2) et d'après (9), on a

$$(\mathcal{T}\ f - g_0, g_0)_{W^{1,2}(\mathbb{T})} \ge -M^2 \, . \tag{13}$$

Soit maintenant l'opérateur $\phi_W \ : \ \mathcal{D}_2 \to \mathcal{D}_2$ caractérisé par la propriété suivante : pour tous $g, h \in \mathcal{D}_2$,

$$(\phi_W(g), h)_{W^{1,2}(\mathbb{T})} = (g, h)_{W^{1,2}(J)} \, . \tag{14}$$

En particulier, on a :

$$\mathrm{Re}\ (\phi_W(g_0), u)_{W^{1,2}(\mathbb{T})} = 0 \, , \ \forall u \in T_M(g_0) \, . \tag{15}$$

D'après (15) et (12), les vecteurs $\phi_W(g_0)$ et $T^{-1}\, P_{T(\mathcal{D}_2)}\,(\chi_I\, f \ , \ \chi_I\, f') - g_0$ de l'espace de Hilbert $\mathcal{D}_2$ sont tous deux orthogonaux à $T_M(g_0)$ dont la codimension réelle vaut 1. De plus, $\phi_W(g_0) \not\equiv 0$ puisque ϕ_W est injective en vertu du théorème 1 et du fait qu'un élément non nul de $\mathcal{D}_2$ ne peut s'annuler sur J. Ainsi, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda\, \phi_W(g_0) = \mathcal{T}\ f - g_0$, c'est à dire tel que :

$$g_0 + \lambda\, \phi_W(g_0) = \mathcal{T}\ f \, . \tag{16}$$

Et (13) entraîne $\lambda \ge -1$.

Puisque : $(\phi_W g, g)_{W^{1,2}(\mathbb{T})} = \|g\|^2_{W^{1,2}(J)} \ge 0$, $\forall g \in \mathcal{D}_2$, l'opérateur linéaire auto–adjoint ϕ_W défini par (14) sur $\mathcal{D}_2$ est monotone, injectif et $||\phi_W|| \le 1$. En

particulier, son spectre $\sigma(\phi_W)$ est contenu dans $[0,1]$. Ainsi, $I + \lambda\,\phi_W$ admet un inverse borné sur $\mathcal{D}_2$ pour tout $\lambda \in (-1, +\infty)$.
L'équation (16) devient :

$$g_0 = (I + \lambda\,\phi_W)^{-1}\,\mathcal{T}\,f\,. \tag{17}$$

où $\lambda \in (-1, +\infty)$ est un multiplicateur de Lagrange déterminé par la contrainte $\|g_0\|_{W^{1,2}(J)} = M$.
De plus, ϕ_W est "explicitement" donné pour tout $g \in \mathcal{D}_2$ par :

$$\phi_W\,g = T^{-1}\,P_{T(\mathcal{D}_2)}\,(\chi_J\,g\,,\ \chi_J\,g')\,.$$

Et l'on obtient par le calcul à partir de (14) l'expression suivante des éléments de la matrice infinie associée à ϕ_W (vu comme endomorphisme de $l^2(\mathbb{N})$) :

$$(\phi_W)_{k,l} = 2\,\exp(i\,\frac{\theta_0+\theta_1}{2})\,\frac{1+k\,l}{(1+k^2)\,(k-l)}\,\sin(k-l)\,\frac{\theta_1-\theta_0}{2}\,,$$

pour tous $k, l \geq 0$, si l'arc $J = (e^{i\theta_0}, e^{i\theta_1})$.

Considérons maintenant l'expression (17) de l'approximant g_0. Son principal "défaut" est évidemment son caractère implicite en λ qui rend difficile l'obtention, en fonction de M de l'approximant et de l'erreur d'approximation. On peut à l'inverse essayer d'obtenir quelques renseignements sur le comportement de $M(\lambda)$ et de :

$$e_w(\lambda) = \|f - g_0\|^2_{W^{1,2}(I)}\,,$$

comme fonctions de $\lambda \in (-1, +\infty)$. On suppose dorénavant que f n'est pas trace sur I d'une fonction de $\mathcal{D}_2$. On obtient alors de manière analogue à [2] les relations suivantes. Tout d'abord, en effectuant le produit scalaire de (16) avec g_0 dans $W^{1,2}(\mathbb{T})$ on a :

$$(f - g_0, g_0)_{W^{1,2}(I)} = (1+\lambda)\,M^2\,. \tag{18}$$

De plus, d'après (17),

$$M^2 = (\phi_W\,(1+\lambda\,\phi_W)^{-2}\,\mathcal{T}\,f, \mathcal{T}\,f)_{W^{1,2}(\mathbb{T})}\,.$$

En tant que fonction de M^2, λ est solution de l'équation differentielle :

$$\frac{d\lambda}{dM^2} = \frac{-1}{2\,(\phi_W^2\,(1+\lambda\,\phi_W)^{-3}\,\mathcal{T}\,f, \mathcal{T}\,f)_{W^{1,2}(\mathbb{T})}}\,,$$

avec la condition initiale

$$\lambda(\|\mathcal{T}\,f\|^2_{W^{1,2}(J)}) = 0\,.$$

En particulier, λ est une fonction décroissante de M. Quant à l'erreur d'approximation e_w, c'est bien sûr aussi une fonction décroissante de M, donc une fonction croissante de λ. Les résultats de la section 2 montrent qu'en outre e_w tend vers 0 lorsque M tend vers l'infini, et donc, d'après (18), lorsque λ tend vers -1. De plus, on obtient :

$$e_w(\lambda) = -(\lambda+1)\, M^2(\lambda) + \int_{-1}^{\lambda} M^2(\tau)\, d\tau\,,$$

d'où l'on déduit que la fonction $M(\lambda)$ appartient à $L^2(-1,+\infty)$ et vérifie

$$\int_{-1}^{+\infty} M^2(\lambda)\, d\lambda = \|f\|^2_{W^{1,2}(I)}\,,$$

ce qui indique que M ne croît pas trop vite lorsque λ tend vers -1. Ces considérations suggèrent l'algorithme suivant, assez semblable dans son principe à la γ–itération utilisée en commande H^∞ :
(i) Pour un $\lambda > -1$ (pas trop éloigné de -1), calculer g_0 donné par (17).
(ii) Calculer $M = \|g_0\|_{W^{1,2}(J)}$. Si M est trop grand, augmenter λ, sinon, le diminuer. Revenir à (i).

Aucune estimation plus précise de l'erreur n'est connue des auteurs. Par ailleurs, la convergence dans $W^{1,2}(I)$ entraîne évidemment la convergence pour les normes plus faibles comme $L^2(I)$ et $L^\infty(I)$. En ce qui concerne ces dernières, il est possible d'adapter les techniques de [3] non au problème *(P)*, mais au problème modifié décrit à la remarque 4 pour lequel on obtient des majorations pessimistes mais uniformes des vitesses de convergence.
Dans le cas où l'arc I est symétrique : $I = [e^{-i\theta_0}, e^{i\theta_0}]$, on obtient une estimation uniforme de l'erreur d'approximation dans $L^2(I)$, $\|f-g_1\|_{L^2(I)}$, pour l'approximant g_1 dans $W_0^{1,2}(I)$ décrit à la remarque 4 qui est nécessairement tel que $g_1(e^{i\theta_0}) = f(e^{i\theta_0})$. Sans perte de généralité, on suppose $\|f\|_{W^{1,2}(I)} \leq 1$. Supposons aussi, dans un premier temps, f réelle. L'approximant g_1 est alors réel (remarque 3), et aussi $f-g_1$ qui est donc nulle aux bornes de I. D'après les résultats de [2], on a :

$$h_1 = \frac{dg_1}{d\theta} = (I + \lambda_1\, \phi)^{-1}\, P_{H^2}\, \chi_I\, \frac{df}{d\theta}\,,$$

où ϕ est l'opérateur de Toeplitz défini par :

$$\phi(g) = P_{H^2}\, \chi_J\, g\,,$$

pour tout $g \in H^2$, et $\lambda_1 \in (-1,+\infty)$ un multiplicateur de Lagrange tel que $\|h_1\|_{L^2(J)} = Q$. On a par [2] :

$$\|P_{H^2}\, \chi_I\, (\frac{df}{d\theta} - h_1)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \leq \frac{1}{Q^2}\, \varepsilon^2(1/Q)\,, \tag{19}$$

où $\varepsilon(1/Q) \to 0$ quand $Q \to \infty$ et pour une certaine constante c,

$$\begin{aligned}\|P_{H^2}\,\chi_I\,(f-g_1)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} &\leq c\,\|\frac{d}{d\theta}\,P_{H^2}\,\chi_I\,(f-g_1)\|^2_{L^2(\mathbb{T})} \\ &= c\,\|P_{H^2}\,\chi_I\,(\frac{df}{d\theta}-h_1)\|^2_{L^2(\mathbb{T})}\end{aligned} \tag{20}$$

puisque $f - g_1$ est nulle aux bornes de I. De plus, si $\bar{H}^2_0$ est le complémentaire orthogonal de H^2 dans $L^2(\mathbb{T})$,

$$\|P_{\bar{H}^2_0}\,\chi_I\,(f-g_1)\|^2_{L^2(J)} = \|P_{H^2}\,\chi_I\,(f-g_1)\|^2_{L^2(J)} \leq \frac{1}{Q^2}\,\varepsilon^2(1/Q)\,, \tag{21}$$

d'après (19). On utilise maintenant des résultats établis dans [3] permettant de majorer la norme $L^2(\mathbb{T})$ ou $L^\infty(\mathbb{T})$ d'une fonction de $\mathcal{D}_2$ (ou de $\bar{\mathcal{D}}_2 = \bar{H}^2_0 \cap W^{1,2}(\mathbb{T})$) au moyen de sa norme $L^2(J)$. Posons $j = l(J)/2\,\pi$. Lorsque Q est assez grand ($Q \geq j^{-1/2}\,e^{1/j}\,\varepsilon(1/Q)$), l'estimation de [3, thm.3] et (21) entraînent :

$$\|P_{\bar{H}^2_0}\,\chi_I\,(f-g_1)\|_{L^2(\mathbb{T})} \leq C_j\,\frac{\log\left(j\log\frac{\sqrt{j}\,Q}{\varepsilon(1/Q)}\right)}{j\log\frac{\sqrt{j}\,Q}{\varepsilon(1/Q)}}\,,$$

pour une constante $C_j > 0$ ne dépendant que de j. Et, avec (19) et (20), on obtient :

$$\|f-g_1\|_{L^2(I)} \leq 2\,c\,\frac{1}{Q}\,\varepsilon(1/Q) + C_j\,\frac{\log\left(j\log\frac{\sqrt{j}\,Q}{\varepsilon(1/Q)}\right)}{j\log\frac{\sqrt{j}\,Q}{\varepsilon(1/Q)}}\,. \tag{22}$$

On en déduit, comme dans [3, cor.1], une majoration uniforme de l'erreur d'approximation dans $L^\infty(I)$. Pour tout $a < 1/2$, il existe une constante $\kappa_a > 0$, ne dépendant que de a, telle que :

$$\|f-g_1\|_{L^\infty(I)} \leq \kappa_a\,\left(2\,c\,\frac{1}{Q}\,\varepsilon(1/Q) + C_j\,\frac{\log\left(j\log\frac{\sqrt{j}\,Q}{\varepsilon(1/Q)}\right)}{j\log\frac{\sqrt{j}\,Q}{\varepsilon(1/Q)}}\right)^a\,. \tag{23}$$

Dans le cas d'une fonction f "antiréelle", l'approximant est de même type (remarque 3), et donc aussi $f - g_1$. En particulier, $f - g_1$ est nul aux bornes de I et les estimations (22) et (23) restent vraies. Maintenant, si f est une fonction quelconque de $W^{1,2}(I)$, elle peut être décomposée en somme d'une fonction réelle, $1/2[f(z) + \overline{f(\bar{z})}]$, et d'une fonction "antiréelle", $1/2[f(z) - \overline{f(\bar{z})}]$, et les majorations uniformes (22) et (23) restent valables.

References

[1] R.A. Adams. *Sobolev spaces.* Academic Press, 1975.

[2] D. Alpay, L. Baratchart, and J. Leblond. Some extremal problems linked with identification from partial frequency data. Accepted for communication to the 10^{th} conference on analysis and optimization of systems, Sophia–Antipolis, june 1992.

[3] L. Baratchart and M. Zerner. On the recovery of functions from pointwise boundary values in a hardy–sobolev class of the disk. Submitted for publication to the Journal of computational and applied mathematics.

[4] B. Beauzamy. *Introduction to Banach spaces and their geometry.* Mathematics studies. North–Holland, 1985.

[5] P.L. Duren. *Theory of H^p functions.* Academic Press, 1970.

[6] M.G. Krein and P.Y. Nudel'man. Approximation of $L^2(\omega_1, \omega_2)$ functions by minimum–energy transfer functions of linear systems. *Problemy Peredachi Informatsii*, 11(2):37–60, 1975. English translation.

[7] S. Lang. *Differential manifolds.* Addison–Wesley, 1972.