PROLEGOMENES PRObLEmes de GéOmétrie pour les MEcanismes: Les NouvellES
Numéro 2, 30 Janvier 1993

Editorial

Ce numéro de Prolégomènes consacre la première interaction entre les mathématiciens, les mécaniciens et les chercheurs dans le domaine du Calcul Formel puisqu'il contient l'Appel à Communications pour SEA 93, le premier séminaire destiné à rassembler les chercheurs de ces domaines sur un sujet présentant un fort intérêt pour eux: la résolution des systèmes d'équations algébriques.

La communauté des lecteurs de Prolégomènes s'est heureusement encore élargie depuis le numéro 1. Il faut toutefois rappeler la nature des articles pouvant paraître dans Prolégomènes: il ne s'agit pas de présenter des articles longs et très pointus mais plutôt de faire des exposés de synthèse en gardant en mémoire que les lecteurs ne sont en général pas familiers avec le sujet traité.

Exposés de synthèse

CHEBYSHEV ET LES ROBOTS

par Jean Pierre DEDIEU Laboratoire d'Analyse Numérique Université Paul Sabatier 31062 Toulouse Cedex. France. E-mail : `dedieu@cix.cict.fr`

Chebyshev fut très certainement le premier mathématicien à s'être intéressé à la théorie des mécanismes articulés. En ce milieu du 19eme siècle, on se demandait encore par quel mécanisme pouvait-on transformer de façon exacte le mouvement circulaire en un mouvement rectiligne : problème posé par Watt à la fin du 18eme siècle et qui ne sera résolu que bien des années plus tard par le général Peaucellier (1864, voir : figure 3). C'est à ma connaissance le seul général dont le nom soit resté attaché à une invention mathématique.

Watt avait résolu son problème dès 1784 à l'aide d'un mécanisme (le parallélogramme articulé de Watt) qui décrit une courbe algébrique de degré 6 dont une portion s'écarte peu de la ligne droite (voir : figure 1). Ces travaux furent repris par Chebyshev qui étudia de façon systématique comment améliorer la précision de ce procédé.

Dans son mémoire "Sur les parallélogrammes" paru en 1869 Chebyshev entreprend de donner pour des mécanismes articulés une classification dépendant des éléments qui les composent.

Considérons un tel mécanisme. Il est composé de tiges qui peuvent se mouvoir dans le plan. Notons s (pour segments) leur nombre. Ces tiges sont reliées entre elles par des articulations en nombre r (pour rotation), certaines tiges sont

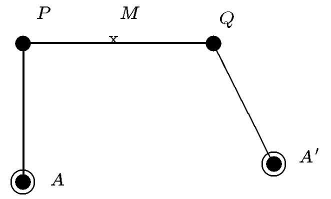

Figure 1: Le parallélogramme articulé de Watt: $AP = A'Q$. Le point M, milieu de PQ décrit une sextique.

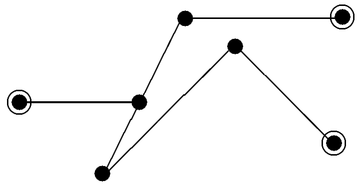

Figure 2:

astreintes à pivoter autour d'un axe fixe, en nombre p (pour pivot).

Un tel mécanisme sera représenté par un dessin : les points indiquent les articulations, les points entourés d'un cercle sont les pivots, deux segments distincts ne seront jamais représentés alignés. Dans la figure 2 on a : $s = 5$, $p = 3$ et $r = 4$, alors que dans la figure 3 : $s = 7$, $p = 3$ et $r = 7$. Il faut en effet considérer que trois tiges qui s'articulent en un même point déterminent deux articulations et que si deux tiges sont reliées à un même pivot, on doit compter deux pivots. Dans ce qui suit nous ne considérerons que des mé-

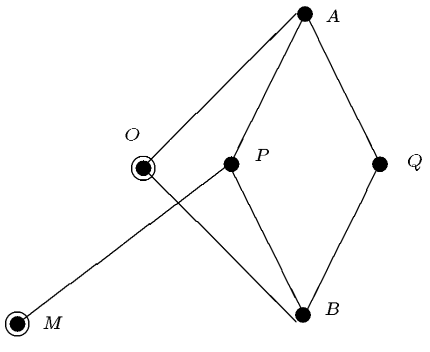

Figure 3: L'inverseur de Peaucellier

canismes connexes et qui ne possédent qu'un seul degré de liberté (traceurs de courbes). La position d'un segment dans le plan est déterminé par trois nombres, par exemple les coordonnées d'un sommet et l'angle fait par le segment avec une droite fixe. Notre système articulé est donc décrit par $3s$ nombres. Chaque articulation entre deux tiges ou entre

Renseignements : Jean-Pierre Merlet, INRIA, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis cedex. Tel : 93657761. Fax : 93657643.
E-mail : `Jean-Pierre.Merlet@inria.fr`

une tige et un pivot contribue à éliminer deux inconnues du problème. Comme au total notre système ne possède qu'un seul degré de liberté on obtient:

$$3s - 2(p + r) = 1$$

D'autre part, le mécanisme étant connexe, le nombre d'articulations r doit au moins être égal à $s - 1$:

$$s - 1 \leq r$$

puisqu'il n'est pas possible de relier s segments avec $s - 2$ liaisons au moins. Enfin, pour que le mécanisme ne se meuve pas librement dans le plan on doit avoir:

$$0 < p$$

Faisons une première remarque : puisque $3s - 2(p + r) = 1$ nécessairement *s est impair.*

Ce sont ces relations que Chebyshev donne dans son mémoire. Il étudie ensuite les divers systèmes que l'on peut obtenir pour s = 1,3,5 et quelques cas correspondant à s = 7.

Dans ce cas $s = 1$, on a $p = 1$ et $r = 0$ (voir figure 4). Tout point de la tige décrit un cercle de centre de pivot : il s'agit du compas. Considérons maintenant un système arti-

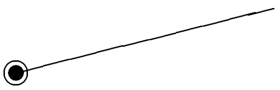

Figure 4: Le compas

culé pour lequel $p = 1$. Puisqu'il ne possède qu'un seul degré de liberté et que l'ensemble peut tourner autour de l'unique pivot, les différentes tiges sont invariablement reliées entre elles. Un tel système est équivalent à un compas. On pourra donc toujours supposer que

$$p \geq 2$$

et que au moins deux pivots ne sont pas confondus. Résumons ces relations, lorsque $s \geq 2$ on a:

$$\begin{aligned} &3s - 2(p = r) = 1 \\ &s - 1 \leq r, \\ &p \geq 2, \\ &s \text{ est impair} \end{aligned}$$

Ceci conduit aux valeurs suivantes : $(s, p, r) = (1, 1, 0), (3, 2, 2), (5, 2, 5), (5, 3, 4), (7, 2, 8), (7, 3, 7), (7, 4, 6)...$ etc...

Nous avons parlé du compas, il serait donc injuste d'oublier la régle ! Revenons à la figure 3 ci-dessous. Supposons que $OA = OB = a, AP = AQ = BP = BQ = b, MP = MO = r$ et notons N le point d'intersection des segments AB et PQ. Il est clair que :

$$OA^2 = ON^2 + NA^2 \quad \text{et} \quad AQ^2 = AN^2 + NQ^2,$$
$$OP.OQ = ON^2 - NQ^2 = OA^2 - AQ^2 = a^2 - b^2.$$

Ainsi les points P et Q se correspondent dans l'inversion de centre O et de rapport $\sqrt{a^2 - b^2}$. Lorsque P décrit le cercle de centre M qui passe par O, le point Q inverse de P se déplace sur la droite perpendiculaire à OM et situé à la distance $\frac{a^2-b^2}{2r}$ de O.

Résumé : La régle articulée a été inventée en 1864 par le général français Peaucellier.

Appels aux communications

SEA-93
RESOLUTION DES SYSTEMES D'EQUATIONS ALGEBRIQUES

Date, Lieu: 14-19 Novembre 1993, au CIRM-LUMINY (Marseille)

Organisateurs:

J-P. Dedieu, Université Paul Sabatier, 118 Route de Narbonne, 310620 Toulouse

D. Duval, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, 123 avenue Albert Thomas, 87060 Limoges Cedex

J-P. Merlet, INRIA Sophia-Antipolis, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex

Comité Scientifique: J. Della-Dora, D. Lazard, J-J. Risler, C. Traverso

Thème du Colloque: Ce colloque a pour thème la résolution des systèmes d'équations algébriques. Nous souhaitons autour du thème choisi réunir des intervenants provenant d'horizons différents: calcul formel, analyse numérique, robotique, vision, et créer un lieu de confrontation et d'échange. De façon plus précise, chacun des organisateurs sera responsable de l'un des aspects développés: J-P. Dedieu pour l'analyse numérique, D. Duval pour le calcul formel et J-P. Merlet pour la robotique. L'aspect "méthode d'homotopie" étant mal représenté en Europe, un effort particulier a été fait pour inviter des intervenants autour de ce thème. Nous nous sommes assurés de la participation de J. Angeles (MacGill, Montréal), C. Gibson (Liverpool), C.W. Wampler (General Motors, USA).

Appel à communications: Si vous souhaitez participer ou faire un exposé veuillez contacter l'un des organisateurs. Attention le CIRM ne peut accueillir qu'une quarantaine de participants.

J-P DEDIEU: E-mail : `dedieu@cix.cict.fr`, Tel: 61556015

D. DUVAL: E-mail : `dduval@grenet.fr`, Tel: 55457317

J-P. MERLET: E-mail : `merlet@cygnusx1.inria.fr`, Tel:93657761

Comptes rendus

Thèses

Problème géométrique direct et lieux de singularité des manipulateurs parallèles

par Jaouad SEFRIOUI
Université Laval, Québec, Canada

Novembre 1992

Cette thèse présente une contribution à l'étude cinématique des manipulateurs parallèles. Ces manipulateurs sont composés de chaînes cinématiques fermées, ce qui leur permet d'acquérir une excellente rigidité et une excellente précision de positionnement de leur organe terminal. L'intérêt est porté ici aux manipulateurs parallèles plans à trois degrés de liberté, aux manipulateurs sphériques à trois degrés de liberté et aux manipulateurs parallèles spatiaux à 6 degrés de liberté. Nous avons apporté des solutions polynomiales nouvelles au problème géométrique direct et établi des expressions analytiques originales décrivant les singularités de ces manipulateurs.

Dans la première partie, le problème géométrique des manipulateurs cités ci-haut est résolu. Celui-ci consiste à calculer les coordonnées cartésiennes de l'organe terminal à partir des coordonnées articulaires. En effet, pour les manipulateurs parallèles, la modélisation de ce problème conduit à des équations non linéaires et couplées complexes.

Pour les manipulateurs plans, une solution polynomiale minimale d'ordre 6 est dérivée. Il est montré qu'une solution explicite est possible pour une architecture particulière.

Dans le cas des manipulateurs sphériques, une solution polynomiale minimale d'ordre 8 est dérivée pour chacune des quatre grandes classes étudiées ici. Il est montré aussi qu'une solution explicite est possible pour certaines architectures particulières.

Pour le cas spatial où la position et l'orientation sont découplées, une solution polynomiale d'ordre 16 a été développée et il est montré qu'elle est minimale.

Dans la deuxième partie, des expressions analytiques des lieux de singularité sont déterminées pour les diverses classes de manipulateurs étudiées ci-dessus. La méthode utilisée consiste à annuler le déterminant de la matrice Jacobienne. La classification des singularités établie par Gosselin et Angeles a été adoptée lors de cette étude.

Il est montré que pour les manipulateurs plans avec actionneurs prismatiques, le lieu de singularité de type II est soit une ellipse, ou une hyperbole, ou une parabole selon l'orientation du manipulateur. Par simulation graphique, des cas de manipulateurs ne présentant pas de singularité de ce type sont mis en évidence.

La même étude est faite dans le cas du manipulateur parallèle sphérique avec actionneurs prismatiques. Une représentation des lieux de singularité dans l'espace cartésien du manipulateur est faite également.

Dans le cas des manipulateurs parallèles plans et sphériques avec actionneurs rotoïdes, les expressions analytiques obtenues pour les lieux de singularité sont difficiles à exploiter.

Pour le manipulateur spatial découplé, il est montré que les singularités sont aussi découplées en des singularités de position et d'orientation. Il est aussi montré que l'étude des lieux de singularité faite pour le manipulateur sphérique avec actionneurs prismatiques peut s'appliquer, dans ce cas, à l'étude des lieux de singularité d'orientation.

Contribution à la modélisation géométrique et dynamique des robots parallèles

par M. AIT-AHMED
LAAS Toulouse

Mardi 2 Février 1993,10h

Dans ce mémoire nous abordons les problèmes de modélisation géométrique et dynamique dans le but d'obtenir une synthèse de la commande dynamique.

Dans le premier chapitre nous donnons une définition des différentes chaînes cinématiques, nous les classons et nous tentons de définir leur degré de mobilité; en effet ce degré de mobilité est parfois défini de façon ambiguë dans la littérature et pose de toute façons de gros problème de détermination. Puis nous abordons la description géométrique de ces chaînes en proposant de nouveaux paramètres géométriques. En effet les paramètres existants à ce jour présentent des inconvénients lorsqu'il s'agit de traiter à la fois des chaînes simples et des chaînes complexes. Les paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés, qui sont les plus utilisés pour décrire les mécanismes à structure de chaîne simple, en raison de leur facilité d'utilisation, sont mal adaptés pour les mécanismes à chaînes complexes; alors que les paramètres de Sheth-Uicker, qui sont bien adaptés aux mécanismes à chaînes complexes, entraînent des redondances quand il s'agit de mécanismes à structure chaînes simples. La méthode que nous proposons, bien qu'elle dérive des paramètres de Denavit-Hartenberg modifiés, n'utilise, dans tous les cas, qu'un seul repère par corps et au maximum cinq paramètres pour définir la situation (position et orientation) d'un corps par rapport à son voisin. Ce nombre est d'ailleurs ramené à quatre dans le cas d'une chaîne simple.

Dans le deuxième chapitre nous présentons une synthèse bibliographique des différents travaux entrepris dans le domaine de l'étude des robots parallèles planaires ou spatiaux. Les mécanismes les plus utilisés sont tout d'abord présentés, et leur méthodes de modélisation géométrique et dynamique explicitées. Nous énumérons également les différentes études proposées en ce qui concerne l'étude des configurations singulières et la représentation du domaine de travail.

Le troisième chapitre concerne la modélisation géométrique directe et inverse du robot parallèle avec point d'attache non connectés deux à deux, proposé par Gough et souvent qualifié (mais à tort) de plateforme de Stewart. Les robots manipulateurs parallèles ne présentent pas de difficultés pour leur modèle géométrique inverse mais posent en revanche de sérieux problèmes dès que l'on aborde le calcul de leur modèle géométrique direct, contrairement aux robots manipulateurs séries pour lesquels les difficultés sont inversées. Ce calcul n'admet pas pour l'instant de solution analytique convenable. Les évolutions dans le domaine consistent à résoudre un système d'équations non linéaires par éliminations successives des différentes variables de façon à se ramener à la résolution d'une équation polynomiale monovariable de degré le plus faible possible (et si possible minimal). Nous proposons une approche conduisant à une équation polynomiale de degré 64, qui constitue un progrès notable sans que nous sachions si ce nombre est minimal ou pas. La deuxième approche que nous proposons est itérative; elle se base sur le calcul de la jacobienne du modèle géométrique inverse, et utilise l'algorithme de Newton-Raphson. Son inconvénient est de ne fournir qu'une seule solution parmi toutes les solutions possibles.

Le quatrième chapitre concerne la modélisation dynamique des mécanismes à structure de chaîne complexe. Nous proposons pour cela une méthode originale qui se base sur l'utilisation du formalisme de Lagrange avec contraintes et qui fait intervenir des multiplicateurs pour prendre en compte la dépendance entre les coordonnées généralisées, due à la fermeture des boucles. Elle consiste, premièrement, à transformer le mécanisme originel en un mécanisme arborescent minimal en coupant un nombre maximal de liaisons passives (non motorisées), et deuxièmement à calculer le modèle dynamique du mécanisme originel en fonction de celui du modèle minimal et en prenant en compte les équations de contraintes. Cette méthode, qui diminue le nombre de contraintes à calculer se distingue des précédentes qui consistent à couper un nombre de liaisons égal au nombre de boucles indépendantes du mécanisme originel, ce qui entraîne un volume de calcul considérable et les rend inopérantes lorsque le nombre de liaisons est trop important.

Finalement avec cette nouvelle méthode nous calculons aisément le modèle dynamique de plusieurs types de robots à structure de chaînes complexes fermée et en particulier celui du robot parallèle précédent, ce qui apparaissait impossible avec les méthodes précédentes.

Conférences

Nom: Journées Géométrie Algorithmique
Date et Lieu: 1-5/02/93, St Pierre de Chartreuse
Contact: E-mail : `odevil@sophia.inria.fr`

Nom: Int. Conf. on Robotics and Automation
Date et Lieu: 2-7/05/93, Atlanta
Contact: J. Luh, Tel:(803) 656-5936

Nom: 5th Topical Meeting on Robotics and Remote Handling
Date et Lieu: 26-29/04/93,Knoxville
Contact: PO. Box 200001,Oak Ridge,TN 37831,USA

Nom: IFIP Working Conf. on geometric modeling in computer graphics
Date et Lieu: 28/06-2/07/93, Génes
Contact: CNR, Tel: (39) 10 515510

Nom: Int. Conf. on Advanced Mechatronics
Date et Lieu: 2/8/93-4/8/93, Tokyo
Contact: Pr. Takeno, Fax:(81) 44 934 2880

Appels aux communications

Conférence: Design Automation Conf.
Date et Lieu: 13-18/06/93, Dallas
Date limite: -
Contact: MP Associates, Tel: (803) 530-4333

Conférence: 3rd SIAM Conf. on geometric design
Date et Lieu: 25-29/10/93,Seattle
Date limite: 22/03/93
Contact: SIAM, (215) 382 9800

Conférence: '93 ICAR
Date et Lieu: 1-2/11/1993, Tokyo
Date limite: 01/03/93
Contact: '93 ICAR, Robotics Society Japan

Bunkyo Shogaku Bldg,6F 1-15-4 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japon
Conférence: 24th ISIR
Date et Lieu: 4-6/11/1993, Tokyo
Date limite: 30/03/93
Contact: 24th ISIR, JIRA

Kikai Shinko Bldg,3-5-8, Shiba-Koen, Minato-ku, Tokyo 105, Japon
Conférence: ISER
Date et Lieu: 28-30 Octobre 1993, Kyoto
Date limite: 15/03 1993
Contact: sur invitation, contact pour la France: J-P. Merlet

Brèves

Le 4eme workshop on Advances in Robot Kinematics aura lieu à Ljubljana, Slovénie, du 27 au 29 Juin 1994. Une après-midi de ce workshop sera réservée pour le 1er International Workshop on Computational Geometry.

Dans le prochain numéro de Prolégomènes le Pr. Chevalier nous présentera un exposé de synthèse sur l'utilisation des groupe de Lie en théorie des mécanismes.