PROLEGOMENES PROblèmes de Géométrie pour les Mécanismes: Les NouvellES

Numéro 0, 5 Octobre 1992

Editorial

La lettre PROLEGOMENES a pour but de fournir un forum à trois communautés scientifiques qui partagent un intérêt pour l'étude des problèmes géométriques: les mécaniciens, les mathématiciens et les informaticiens travaillant dans le domaine du calcul formel.

Notre expérience en robotique et en théorie des mécanismes a montré que beaucoup de problèmes traités dans ces disciplines sont de nature géométrique au sens large (c'est-à-dire de géométrie algébrique, projective, algorithmique et autres..).

Pourtant la formation des mécaniciens dans ces domaines est souvent peu approfondie alors que les mathématiciens proposent des outils pouvant aider, au moins partiellement, à obtenir des solutions élégantes aux problèmes posés.

De plus la mise en équations des mécanismes, même les plus simples, fait rapidement intervenir des calculs très lourds et pour lesquels les outils de calcul formel s'avèrent très utiles.

Les trois communautés ont donc des intérêts communs mais s'ignorent en général. Nous espérons que cette lettre permettra :

- aux mécaniciens d'exposer de nouveaux problèmes, de prendre connaissance de résultats mathématiques pouvant fournir des éléments de réponse à leurs problèmes ainsi que d'exprimer leurs requêtes pour les systèmes de calcul formel, les outils existants étant souvent peu appropriés à la résolution de problèmes géométriques.
- aux mathématiciens de découvrir de nouveaux champs d'applications à leurs recherches et d'appliquer leurs méthodes à des problèmes non-académiques.
- aux informaticiens de tester leurs algorithmes sur des problèmes non standards ainsi que d'amorcer une réflexion sur des structures informatiques plus appropriées aux problèmes géométriques.

On trouvera dans ce numéro :

- l'exposé d'un problème de mécanisme où une approche mariant calcul formel et mathématique a permis d'obtenir de nouveaux résultats.
- l'exposé d'un problème ouvert: la chaîne.
- la présentation du projet PRISME de l'INRIA ainsi que du projet européen POSSO pour la réalisation d'un système de calcul formel.
- des comptes-rendus et annonces de congrès.

Renseignements : Jean-Pierre Merlet, INRIA, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis cedex. Tel : 93657761. Fax : 93657643.
E-mail : `Jean-Pierre.Merlet@inria.fr`

Le numéro 0 a été composé à l'INRIA pour des raisons de commodité. Il n'a pour but que d'amorcer un débat et nous espérons recevoir pour le prochain numéro des éléments (exposé de synthèse, problèmes ouverts, comptes-rendus de thèse et de congrès etc...) permettant de continuer cette parution.

Exposé de synthèse

La cinématique directe des robots parallèles plans

par C. Gosselin, J-P. Merlet

Considérons le mécanisme décrit dans la figure 1. Il s'agit d'un mécanisme où un corps solide $B_1B_2B_3$ est relié par 3 bielles A_iB_i à une base fixe. Aux extrémités de chacune des bielles on a une articulation rotoïde et un vérin dans chaque bielle permet d'en modifier la longueur. On définit la position et l'orientation du corps par l'angle θ entre le repère (C $,x_r, y_r$) et le repère (O,x, y) ainsi que par les coordonnées x_c, y_c du point C dans ce repère. Il est facile de montrer que pour une orientation et une position données du corps les longueurs correspondantes des bielles (ρ_1, ρ_2, ρ_3) sont définies de manière unique. Par contre pour un ensemble de 3 longueurs de bielles la position et l'orientation du corps ne sont pas définies de manière unique. Le problème est de déterminer l'ensemble des solutions possibles et leur nombre maximum. Ce problème est connu sous le nom de *cinématique directe* (CD). Sa résolution passe par plusieurs étapes.

On montre tout d'abord qu'il ne peut pas y avoir plus de 6 solutions. Pour cela on coupe le mécanisme au point B_3 et l'on considère le mécanisme restant. Il s'agit d'un mécanisme à 4 barres et l'on sait que pour ce type de mécanisme le point B_3 se trouve sur une sextique. Ce point doit aussi se trouver sur le cercle de centre A_3 et de rayon ρ_3. En conséquence, par application du théorème de Bezout, B_3 ne peut occuper plus de 12 positions distinctes et il existe donc au plus 12 solutions possibles à la CD. Mais la sextique a la propriété d'être tri-circulaire c.a.d qu'elle contient les points du cercle imaginaire comme points triples. Comme le cercle les contient aussi il y aura toujours au moins 6 points imaginaires parmi les 12 points d'intersection. En conséquence il existe au plus 6 solutions à la CD $\square$.

La deuxième étape consiste à trouver une méthode pour déterminer ces solutions. Pour cela Gosselin [1] a remarqué que les équations donnant les ρ_i^2 en fonction des inconnues x_c, y_c, θ sont quadratiques en x_c, y_c mais que la différence $\rho_i^2 - \rho_j^2$ est simplement linéaire. En utilisant deux équations de ce type on obtient un système linéaire que l'on résout. Le résultat est alors reporté dans la troisième équation qui ne contient alors plus comme inconnue que θ. En utilisant le changement de variable classique $x = \tan(\frac{\theta}{2})$ l'équation obtenue est alors un polynôme de degré 6 en x. Les manipulations permettant l'obtention de ce polynôme font un appel intensif au calcul formel.

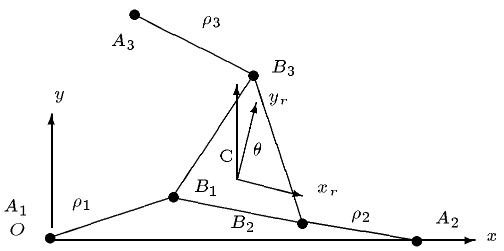

Figure 1: Un mécanisme plan

Un algorithme de résolution numérique du polynôme général permet de trouver des configurations où effectivement 6 configurations peuvent être obtenues.

Dans le cas particulier décrit en figure 2 la méthode de Gosselin se simplifie et donne un polynôme de degré 3 en $\cos\theta$, ce qui conduit potentiellement à 6 solutions.

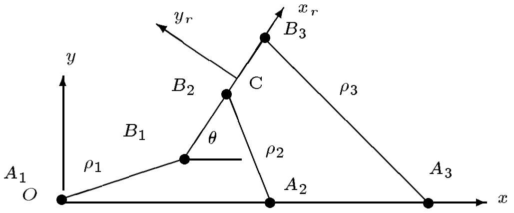

Figure 2: Un cas particulier du mécanisme plan

Toutefois une recherche exhaustive ne nous a jamais permis de trouver plus de 4 solutions. Nous avons donc voulu prouver qu'effectivement il ne pouvait y avoir plus de 2 solutions réelles au polynôme dans l'intervale [-1, 1]. Pour ce faire nous avons utilisé la méthode de Sturm. Soit une équation polynomiale de degré n en x :

$$f_0(x) = \sum_{i=0}^{i=n} a_n x^n = 0$$

On pose :

$$f_1(x) = f_0'(x)$$

On effectue la division polynomiale de f_0 par f_1 :

$$f_0(x) = f_1(x) * d(x) + r_2(x)$$

On pose $f_2(x) = -r_2(x)$ et l'on effectue ensuite à chaque itération la division polynomiale de $f_{i-1}(x)$ par $f_i(x)$ et on note le reste de cette division par r_{i+1}. On pose:

$$\begin{aligned} f_{i-1}(x) &= f_i(x)d_i(x) + r_{i+1}(x) \\ f_{i+1}(x) &= -r_{i+1}(x) \end{aligned}$$

jusqu'à ce que f_{i+1} ne contienne plus de terme en x (on a donc $i+1 = n$). Le nombre de racines réelles de l'équation dans l'intervalle $[x_1, x_2]$ est égal au nombre de changements de signe entre $f_i(x_1), f_{i+1}(x_1), i \in [0, n-1]$ moins le nombre de changements de signe entre $f_i(x_2), f_{i+1}(x_2), i \in [0, n-1]$. Dans notre cas particulier nous avons 4 fonctions f_0, f_1, f_2, f_3, où f_3 est une constante, et les valeurs extrêmes de x (c'est-à-dire $\cos\theta$) sont -1,1. Nous avons alors remarqué que $f_0(1), f_0(-1)$ sont strictement positifs. En notant de plus que $f_3(1)$ et $f_3(-1)$ ont le même signe il est facile de voir que le nombre maximum de changements de signe est 2 et donc que le polynôme a au maximum 2 solutions réelles entre [-1, 1]. *Par conséquent la CD de ce cas particulier admet au plus 4 solutions.* □

References

[1] Gosselin, C. "Solution polynomiale au problème de la cinématique directe des manipulateurs parallèles plans à 3 degrés de liberté", *Mechanism and Machine Theory*, Vol 27,n° 2,1992, pp. 107-119

Problème ouvert: La chaîne

Soit une chaîne plane c.a.d. une chaîne cinématique fermée constituée de n maillons reliés les uns aux autres par une articulation rotoïde. La chaîne est dans une configuration initiale quelconque et l'on suppose que l'on peut exercer une action (c.a.d. un torseur) sur l'un quelconque des maillons. Existe t'il toujours une liste d'actions permettant de rendre la forme générale de la chaîne convexe ?

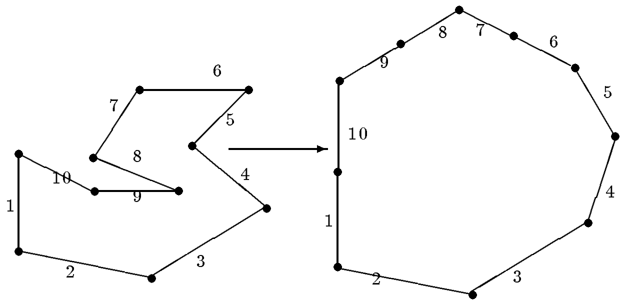

Figure 3: Le problème de la chaîne

Présentations

Le projet PRISME de l'INRIA

par J-P. Merlet

Dès sa création en 1987, le projet PRISME s'est intéressé aux problèmes géométriques issus de la robotique : planification de déplacements, représentation de l'environnement, modélisation des mécanismes. Dans ce contexte, le projet a été amené à utiliser et à étudier les outils théoriques appropriés et à prendre une part active au développement de méthodes géométriques, en particulier dans le domaine de la géométrie algorithmique.

La géométrie algorithmique est maintenant un domaine scientifique à part entière qui entretient des relations privilégiées avec la topologie, les géométries algébrique et combinatoire, et l'algorithmique.

Les recherches du projet PRISME s'articulent autour des points suivants :

- la reconstruction de formes à partir d'informations partielles.
- la planification des déplacements des robots dans un environnement encombré d'obstacles.
- la modélisation des robots parallèles à l'aide d'approches géométriques et algébriques.
- les structures géométriques fondamentales et les techniques algorithmiques, notamment diagrammes de Voronoï et algorithmes randomisés.

Le projet européen POSSO

par J-P. Merlet

Le projet POSSO (POlynomial System Solving) a pour but de produire un programme portable de résolution de systèmes d'équations polynomiales, utilisant les algorithmes les plus récents dans ce domaine, et susceptible d'être incorporé dans des programmes d'applications.

Il se propose de plus de permettre des avancées dans ce domaine et d'étudier différentes applications en automatique, modélisation géométrique et biochimie.

Les points forts de ce projet sont le développement d'un outil modulaire de résolution de systèmes polynomiaux travaillant à la fois à un niveau symbolique et numérique ainsi que d'interfaces appropriées pour l'exploitation de l'outil. A court terme sont prévues des améliorations sur les algorithmes des bases de Gröbner, sur le traitement des nombres algébriques et des nombres algébriques réels, sur la recherche hybride (symbolique-numérique) des racines et sur la détermination du nombre de racines réelles. Des recherches à plus long terme sont prévues (utilisation de la théorie des invariants, méthodes algébriques locales,...).

Des domaines d'application ont été choisis et serviront de guide au développement du système. Citons par exemple l'étude de la cinématique géométrique du robot dit "Plateforme de Stewart".

Les principaux laboratoires européens travaillant dans ce domaine sont impliqués dans ce projet dont la durée prévue est de trois ans et qui a démarré en mai 1992.

Contact: Prof. Carlo Traverso

E-mail : `traverso@dm.unipi.it`

Compte rendu

Advance in Robot Kinematics (ARK)

Ce congrès s'est tenu à Ferrare (Italie) du 7 au 9 septembre.

ARK est un congrès de «cinématique», ce qui veut dire approximativement tout ce qui concerne les problèmes géométriques associés aux mécanismes. Ce congrès se tient tous les 2 ans et la prochaine édition aura lieu en 1994 a Lubliana (Slovénie). ARK est un petit congrès (50 personnes), très animé.

Cette année ont eu lieu des présentations sur les algèbres de Lie (en particulier par Chevalier, Lerbet), sur l'application de la théorie des catastrophes de Thom a la cinématique par Gibson de Liverpool. On a pu également noter des présentations de mécanismes intéressants, par exemple un cube articulé tel que si l'on soumet deux de ses sommets opposés à un vissage selon la diagonale il se plie et occupe la moitié du volume du cube initial.

Il a été demandé aux membres du comité de l'ARK que la prochaine édition du congrès porte un intérêt spécial ("special emphasis") à la Géométrie Algorithmique, ce qui a été accepté.

Jean-Pierre Merlet

Brèves

↗: Bahram Ravani (Université de Californie à Davis) a convaincu le directoire de l'IFToMM de créer une branche "Cinématique et géométrie algorithmique".

↗: Ronga (Genève) et Lazard (Paris) auraient établi une preuve que le problème de la cinématique directe d'un robot parallèle généralisé n'aurait pas plus de 40 solutions.

Rendez-vous

Conférences

Nom: Int. Symp. on Industrial Robots
Date et Lieu: 6-9 Octobre 1992,Barcelone
Contact: ISIR'92 Secretariat, Fax: (34-3)215 23 07

Nom: Int. Conf. on Robotics and Automation
Date et Lieu: 2-7/05/93, Atlanta
Contact: J. Luh, Tel:(803) 656-5936

Nom: 5th Topical Meeting on Robotics and Remote Handling
Date et Lieu: 26-29/04/93,Knoxville
Contact: PO. Box 200001,Oak Ridge,TN 37831,USA

Nom: Int. Symp. on Intelligent Robotics
Date et Lieu: 7-9/01/93,Bangalore
Contact: Fax: (91) 812 265 615

Nom: 1st Int. Workshop on Mechatronics in Medecine and Surgery
Date et Lieu: 26-28/10/92,Costa del Sol

Contact: Mrs Jean Foster, Fax:(272) 257127

Nom: 6th Int. Conf. on symbolic and logical computing
Date et Lieu: 15-16/10/92,Madison
Contact: E. Johnson,114 Beadle Hall, Madison, SD 57042

Nom: IFIP Working Conf. on geometric modeling in computer graphics
Date et Lieu: 28/06-2/07/93, Genes
Contact: CNR, Tel: (39) 10 515510

Appels aux communications

Conférence: Int. Conf. on Advanced Mechatronics
Date et Lieu: 2/8/93-4/8/93, Tokyo
Date limite: 01/12/92
Contact: Pr. Takeno, Fax:(81) 44 934 2880

Conférence: Design Automation Conf.
Date et Lieu: 13-18/06/93, Dallas
Date limite: -
Contact: MP Associates, Tel: (803) 530-4333

Conférence: 3rd SIAM Conf. on geometric design
Date et Lieu: 25-29/10/93,Seattle
Date limite: 22/03/93
Contact: SIAM, (215) 382 9800

Diffusion

Voici la liste des personnes auxquelles ce numéro a été diffusé.

Belgique
Cardona Alberto, **Université de Lièges**, Lièges
Duysens Jacques, **Université de Lièges**, Lièges
Geradin Michel, **Université de Lièges**, Lièges
Willem P-Y., **Université Catholique de Louvain**, Louvain
Canada
Angeles Jorge, **McGill University**, Montréal
Cloutier L., **Université Laval**, Québec
Gosselin Clément, **Université Laval**, Québec
Hayward V., **McGill University**, Montréal
Nahon Meyer, **University of Victoria**, Victoria
France
Ahmed Mourad Aït, **LAAS**, Toulouse
Andre Guy, **SA MATRA Branche Espace**, Toulouse
Arnaldi Bruno, **IRISA**, Rennes
Artigue Francois, **LIMRO**, Cachan
Audfray Philipe, **ALEPH Technologies**, Grenoble
Bellido Anne, **LAN**, Toulouse
Bernardou Michel, **INRIA**, Rocquencourt
Bidaud Philippe, **CRIIF**, Paris
Bohatier Claude, **IFMA**, Clermont-Fd
Boissier Laurence, **CNES**, Toulouse
Brogliato Bernard, **LAG**, Grenoble
Canudas de Wit Carlos, **LAG**, Grenoble
Castelain Jean-Marie, **ENSIM**, Valenciennes
Chajmowicz Henri, **INRIA**, Rocquencourt
Chevallereau Christine, **ENSM/ECN**, Nantes
Chochon Helene, **Alcatel Alsthom Recherche**, Marcoussis
Chretien Jean-Pierre, **CERT-DERA**, Toulouse
Coiffet Phillipe, **CRIIF**, Paris
Couvet Serge, **Thomson CSF**, Cergy Pontoise
Crapo Henri, **INRIA**, Rocquencourt
Dahan Marc, **LMA**, Besançon
Dauchez Pierre, **LAAM-USTL**, Montpellier
Dedieu Jean-Pierre, **LAN**, Toulouse
Douady Raphaël, **MATRA**, Paris
Espiau Bernard, **INRIA**, Sophia-Antipolis
Fournier Raymond, **CEA**, Fontenay
Froment Antoine, **BERTIN**, Plaisir
Guillaume Claude, **IFMA**, Clermont-Fd
Guinot Jean-Claude, **CRIIF**, Paris
Hegron Gerard, **IRISA**, Rennes
Herve Jacques, **Ecole Centrale de Paris**, Chatenay-Malabry
Jacquet Pierre, **I.G.E.**, Chatou
Khalil Wisama, **ENSM/ECN**, Nantes
Lallemand J-P., **Université de Poitiers**, Poitiers
Mondier Jean-Bernard, **CNES TLSE**, Toulouse
Mourrain Bernard, **INRIA**, Sophia-Antipolis
Orhant Pascal, **ENSIEG**, St Martin d'Héres
Peletier Mark, **INRIA**, Rocquencourt
Pietrus Alain, **Université de Poitiers**, Poitiers
Pot Jacques, **EDF-DER**, Chatou
Ray Pascal, **IFMA**, Clermont-Fd
Renaud Marc, **LAAS**, Toulouse
Rideau Pascal, **Aerospatiale**, Cannes
Rigaud Vincent, **Ifremer**, La Seyne sur Mer
Risler Jean-Jacques, **Ecole Normale Supérieure**, Paris
Roy Marie-Françoise, **IMAR**, Rennes
Wenger Phillipe, **ENSM/ECN**, Nantes
Yakoubsohn Jean-Claude, **LAN**, Toulouse
Yannov B., **Ecole Centrale Paris**, Chatenay-Malabry
Maroc
Bennani Mohammed, **ENSME**, Casablanca
Elyaagoubi El Assan, **ENSME**, Casablanca
Norvège
Sordalen Ole Jakob, **Cybernetic Lab.-NTH**, Trondheim
Suisse
Burckardt Christof, **Institut de Microtechnique**, Lausanne
USA
Khatib Oussouma, **Stanford University**, Stanford

Adresser toutes vos propositions d'articles de préférence par E-mail en format latex à : E-mail : `Jean-Pierre.Merlet@inria.fr`