

HYPERGRAPHES HAMILTONIENS

J. C. BERMOND, A. GERMA, M. C. HEYDEMANN et D. SOTTEAU

Université de Paris-Sud, Département de Mathématique, bât. 425, 91405 Orsay

Abstract. — We extend to h -uniform hypergraphs different theorems of graph theory : theorem of Dirac for the existence of cycles, theorem of Ore for the existence of hamiltonian cycles, partition of the edges of a complete graph into hamiltonian cycles.

1. Introduction. Définitions. — Soit H un hypergraphe simple h -uniforme, c'est-à-dire un couple $(X, \mathcal{E})$, où X est un ensemble fini, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, et $\mathcal{E}$ un ensemble de parties distinctes de X ,

$$\mathcal{E} = \{E_1, \dots, E_m\},$$

tels que

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad |E_i| = h \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^m E_i = X.$$

Une chaîne de longueur k dans H est une séquence $x_1 E_1 x_2 E_2 \dots x_k E_k x_{k+1}$ telle que les sommets x_i ($1 \leq i \leq k+1$) ainsi que les arêtes E_j ($1 \leq j \leq k$) soient deux à deux distincts et que $\{x_i, x_{i+1}\} \subset E_i$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$. Un cycle de longueur k est une séquence $x_1 E_1 x_2 \dots x_k E_k x_1$ telle que les sommets x_i ($1 \leq i \leq k$) et les arêtes E_j ($1 \leq j \leq k$) soient deux à deux distincts, que $\{x_i, x_{i+1}\} \subset E_i$ ($1 \leq i \leq k-1$) et $\{x_1, x_k\} \subset E_k$.

Nous appelons cycle hamiltonien un cycle de longueur $|X| = n$, et hypergraphe hamiltonien un hypergraphe qui contient un cycle hamiltonien.

Exemple. — L'hypergraphe complet h -uniforme d'ordre n , K_n^h ($|X| = n$, $\mathcal{E} = \mathcal{T}_h(X)$, $n > h$) est hamiltonien.

Remarques. — 1) Un hypergraphe 2-uniforme est un graphe et les définitions données ci-dessus généralisent celles connues pour les graphes.

2) Cette généralisation de cycle dans un graphe n'est pas la seule possible ; nous en donnons une autre plus loin.

Nous cherchons à étendre aux hypergraphes h -uniformes divers théorèmes de la théorie des graphes : théorème de Dirac pour l'existence de cycles, théorème de Ore, pour l'existence de cycles hamiltoniens, partition des arêtes du graphe complet en cycles hamiltoniens.

2. Existence de cycles. — A) Le théorème de Dirac (1952, [3]) s'énonce :

Théorème. — Si $G = (X, \mathcal{E})$ est un graphe d'ordre n ($|X| = n$) tel que tout sommet $x \in X$ ait un degré supérieur ou égal à $k-1$, alors G possède un cycle de longueur supérieure ou égale à k .

Appelons degré total d'un sommet x d'un hypergraphe H , le cardinal de l'ensemble des arêtes de H contenant x , et notons le $\delta(x)$. Nous avons alors la généralisation du théorème de Dirac :

Théorème 1. — Si $H = (X, \mathcal{E})$ est un hypergraphe h -uniforme et k un entier, $k \geq h+1$, tels que, pour tout sommet x de X , on ait $\delta(x) \geq \binom{k-2}{h-1} + h-1$, alors H contient un cycle de longueur supérieure ou égale à k .

Démonstration. — Nous supposons $h \geq 3$.

Soit $C = x_1 E_1 x_2 \dots x_l E_l x_{l+1}$ une chaîne de longueur maximum dans l'ensemble des chaînes de H . Désignons par $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des arêtes de H contenant x_1 . Par définition, on a $\delta(x_1) = |\mathcal{E}_1|$.

a) Par suite de l'hypothèse de maximalité de la chaîne C , une arête E de $\mathcal{E}_1$ est :

- soit une des arêtes E_i , $1 \leq i \leq l$,
- soit de la forme $E = \{x_1, x_{\alpha_1}, x_{\alpha_2}, \dots, x_{\alpha_{h-1}}\}$

avec

$$2 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{h-1} \leq l+1.$$

b) $l \geq h-1$. En effet, sinon, on pourrait écrire :

$$l \leq h-2 \Rightarrow \mathcal{E}_1 \subset \{E_1, \dots, E_l\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \delta(x_1) \leq l \leq h-2 < h-1 + \binom{k-2}{h-1},$$

ce qui contredit l'hypothèse.

c) Montrons $l \geq k-1$ (ce qui est une condition nécessaire pour l'existence d'un cycle de longueur k).

Posons

$$A = \{ \{x_1, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{h-1}}\}, 2 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{h-1} \leq l+1 \}.$$

Cas $r = 3$. — Pour tout $i \in \{2, \dots, l\}$, si $E_i \in \mathcal{E}_1$, alors $E_i = \{x_1, x_i, x_{i+1}\}$ donc $E_i \in A$ et

$$\mathcal{E}_1 \subset \{E_1\} \cup A.$$

Par suite

$$1 + \binom{l}{2} \geq \delta(x_1) \geq 2 + \binom{k-2}{2} \Rightarrow l \geq k-1.$$

Cas $r \geq 4$. — On peut écrire

$$\mathcal{E}_1 \subset \{E_1, \dots, E_{h-2}\} \cup B \cup A'$$

avec

$$B = (\{E_{h-1}, \dots, E_l\} - A) \cap \mathcal{E}_1$$

$$A' = (A - \{E_1, \dots, E_{h-2}\}) \cap \mathcal{E}_1.$$

Pour $i \in \{h-1, \dots, l\}$, posons

$$F_i = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_i, x_{i+1}\}.$$

On a $F_i \in A$.

Montrons :

$$i \in \{h-1, \dots, l\}, \quad E_i \in B \Rightarrow F_i \notin A'.$$

En effet, si $E_i \in B$, on a $E_i = \{x_1, x_i, x_{i+1}, x_\alpha, \dots\}$ avec $\alpha > l+1$ ($r \geq 4$) et si $F_i \in A'$, on peut alors former la chaîne plus longue que C :

$$x_\alpha E_i x_1 E_1 \dots x_i F_i x_{i+1} \dots E_l x_{l+1}.$$

Par conséquent

$$|B| + |A'| \leq |A| = \binom{l}{h-1},$$

d'où

$$\delta(x_1) = |\mathcal{E}_1| \leq h-2 + \binom{l}{h-1}.$$

L'hypothèse entraîne

$$\binom{l}{h-1} + h-2 \geq \binom{k-2}{h-1} + h-1,$$

d'où $l \geq k-1$.

d) Dans la suite nous allons supposer que H ne contient pas de cycle de longueur supérieure ou égale à k et montrer que l'on aboutit ainsi à une contradiction.

e) Posons

$$A_k = \{(x_1, x_{\alpha_1}, \dots, x_{\alpha_{h-1}});$$

$$2 \leq \alpha_1 \leq \dots \leq \alpha_{h-1} \leq k-1\}.$$

Alors $\mathcal{E}_1$ est l'union disjointe des 3 ensembles :

$$H_k = \{E_1, \dots, E_{h-2}, E_{k-1}\}$$

$$B_k = (\{E_{h-1}, \dots, E_{k-2}\} - A_k) \cap \mathcal{E}_1$$

$$A'_k = A_k - \{F_i = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_i, x_{i+1}\} \mid E_i \in B_k\}.$$

La démonstration va se faire en plusieurs étapes.

On a $\mathcal{E}_1 \subset \{E_1, \dots, E_{k-1}\} \cup A_k$. Sinon il existerait une arête $E \in \mathcal{E}_1 - \{E_1, \dots, E_{k-1}\}$ contenant x_α , avec $k \leq \alpha \leq l+1$, et l'on aboutit à une contradiction en considérant le cycle de longueur $\geq k$:

$$x_1 E_1 \dots x_{\alpha-1} E_{\alpha-1} x_\alpha E x_1 \quad \text{si } E \notin \{E_k, \dots, E_l\}$$

$$x_1 E_1 \dots x_i E_i x_1 \quad \text{si } E = E_i \text{ avec } i \in \{k, \dots, l\}.$$

Montrons :

$$E_i \in B_k \Rightarrow F_i = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_i, x_{i+1}\} \notin A_k.$$

En effet, si $E_i \in B_k$, alors il existe $\alpha, \alpha \geq k$ et $x_\alpha \in E_i$. Si de plus $F_i \in A_k$, on aurait, pour $\alpha > l+1$, la chaîne plus longue que C :

$$x_\alpha E_i x_1 E_1 \dots x_i F_i x_{i+1} \dots E_l x_{l+1}$$

et pour $\alpha \in \{k, \dots, l+1\}$, le cycle de longueur $\geq k$:

$$x_1 E_1 \dots x_i F_i x_{i+1} \dots x_\alpha E_i x_1.$$

Il en résulte, $\mathcal{E}_1 \subset H_k \cup B_k \cup A'_k$ avec

$$|B_k \cup A'_k| \leq |A_k|,$$

d'où

$$|\mathcal{E}_1| \leq r-1 + |A_k| = h-1 + \binom{k-2}{h-1}.$$

Or d'après l'hypothèse :

$$|\mathcal{E}_1| \geq h-1 + \binom{k-2}{h-1}.$$

On a donc l'égalité $\mathcal{E}_1 = H_k \cup B_k \cup A'_k$, les trois ensembles H_k, B_k, A'_k sont disjoints et

$$|B_k \cup A'_k| = |A_k|.$$

f) Supposons $h > 3$ et $k > h+1$. Montrons qu'alors pour tout $j \in \{h-1, \dots, k-2\}$ il existe une arête E de H , $E \in A_k - \{E_1, \dots, E_l\}$ et

$$\{x_1, x_{j+1}\} \subset E.$$

Les arêtes de A_k contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$ sont en nombre $\binom{k-3}{h-2}$.

Comptons les arêtes $E_i, i \in \{1, \dots, l\}$, contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$ et appartenant à A_k . Si $E_i \in A_k$ alors $i \leq k-2$. De plus, si $E_i \in A_k, i \leq h-2$, et si $\{x_1, x_{j+1}\} \subset E_i$, alors $E_i \in H_k$ et, d'après e), $E_i \notin A'_k$ et de plus :

$$\text{— soit } E_i = F_j = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_j, x_{j+1}\} \text{ et}$$

$$E_j \in B_k,$$

$$\text{— soit } E_i = F_{j+1} = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_{j+1}, x_{j+2}\} \text{ et } E_{j+1} \in B_k.$$

Il y a donc au plus $k-2 - (h-2) = k-h$ arêtes $E_i \in A_k$ contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$.

Or

$$h > 3 \text{ et } k > h + 1 \Rightarrow \binom{k-3}{h-2} \geq k-3 > k-h.$$

On peut donc trouver $E \in A_k - \{E_1, \dots, E_l\}$ et contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$.

g) Montrons le théorème pour $h > 3$ et $k > h + 1$.

Cas 1. — $E_1 \notin A_k$. Alors il existe $x_\alpha \in E_1$ avec $\alpha \geq k$. On sait, d'après f), qu'il existe une arête $E \in A_k - \{E_1, \dots, E_l\}$ et contenant $\{x_1, x_{k-1}\}$. On obtient alors une contradiction en considérant,

si $\alpha > l + 1$, la chaîne plus longue que C :

$$x_\alpha E_1 x_2 \dots x_{k-1} E x_1 E_{k-1} x_k \dots E_l x_{l+1}$$

si $k \leq \alpha \leq l + 1$, le cycle de longueur $\geq k$:

$$x_\alpha E_1 x_2 \dots x_{k-1} E x_1 E_{k-1} x_k \dots E_{\alpha-1} x_\alpha.$$

Cas 2. — $E_1 \in A_k$. Puisque $H_k \cap A'_k = \emptyset$, d'après e), il existe $j \in \{h-1, \dots, k-2\}$ tel que

$$E_1 = F_j = \{x_1, \dots, x_{h-2}, x_j, x_{j+1}\}$$

et $E_j \in B_k$. Puisque $E_j \notin A_k$, il existe $\alpha \geq k$ tel que $x_\alpha \in E_j$. D'après f), il existe une arête E contenant $\{x_1, x_{j+1}\}$ et appartenant à $A_k - \{E_1, \dots, E_l\}$. On aboutit alors à une contradiction en considérant

si $\alpha > l + 1$, la chaîne plus longue que C :

$$x_\alpha E_j x_j E_{j-1} x_{j-1} \dots x_2 E_1 x_1 E x_{j+1} E_{j+1} \dots E_l x_{l+1}$$

si $k \leq \alpha \leq l + 1$, le cycle de longueur $\geq k$:

$$x_\alpha E_j x_j E_{j-1} x_{j-1} \dots x_2 E_1 x_1 E x_{j+1} \dots E_{\alpha-1} x_\alpha.$$

h) Montrons le théorème pour $h = 3$ et $k > 4$.
Si $h = 3$ et $E_i \in \mathcal{E}_1$ avec $i > 1$, alors

$$E_i = \{x_1, x_i, x_{i+1}\} \text{ d'où } B_k = \emptyset$$

et $\mathcal{E}_1 = \{E_1, E_{k-1}\} \cup A_k$ avec

$$\{E_1, E_{k-1}\} \cap A_k = \emptyset.$$

Comme $E = \{x_1, x_2, x_{k-1}\} \in A_k$ et $E_1 \notin A_k$ on peut conclure comme au g) Cas 1.

i) Dans le cas $k = h + 1$, on a $\mathcal{E}_1 = \{E_1, \dots, E_h\}$.

Dans ce cas en effet A_k se réduit à $\{x_1, \dots, x_h\}$. Si on avait $\{x_1, \dots, x_h\} \notin \{E_1, \dots, E_h\}$, il existerait $x_\alpha \in E_1$ avec $\alpha \geq h + 1$, et on aurait, soit une chaîne plus longue que C pour $\alpha > l + 1$:

$$x_\alpha E_1 x_1 \{x_1 \dots x_h\} x_2 \dots x_l E_l x_{l+1},$$

soit un cycle de longueur $\geq k$ pour $h + 1 \leq \alpha \leq l$:

$$x_\alpha E_1 x_1 \{x_1, \dots, x_h\} x_2 \dots E_{\alpha-1} x_\alpha.$$

On peut donc dire que, dans le cas $k = h + 1$,

pour toute chaîne C de longueur maximum, l'ensemble des arêtes de H contenant le premier élément de C est formé des h premières arêtes de C .

j) Démontrons le théorème dans le cas $k = h + 1$.

Si E_1 contient x_α avec $k + 1 \leq \alpha \leq l$, on obtient un cycle de longueur $\geq k$:

$$x_\alpha E_1 x_2 \dots x_{\alpha-1} E_{\alpha-1} x_\alpha.$$

Si E_1 contient x_α avec $\alpha \leq h = k - 1$ alors la propriété i) appliquée à la chaîne de longueur maximum :

$$x_\alpha E_1 x_2 E_2 \dots E_{\alpha-1} x_1 E_\alpha \dots E_l x_{l+1},$$

montre que $x_\alpha \in E_h$. De même si E_1 contient x_α avec $\alpha \geq l + 1$, la propriété i) appliquée à la chaîne de longueur maximum $x_\alpha E_1 x_2 \dots x_l E_l x_{l+1}$, montre que $x_\alpha \in E_h$. On a donc montré $E_1 - \{x_{h+1}\} \subset E_h$, d'où la contradiction $E_1 = E_h$ ($x_{h+1} \in E_h$).

Remarque. — Tomescu a donné une généralisation du théorème de Dirac en utilisant une autre notion de degré dans les hypergraphes.

Appelons *degré disjoint* d'un sommet x de H , noté $d(x)$, le nombre maximum d'arêtes de H qui ont deux à deux une intersection réduite à x .

Théorème (Tomescu [4]). — Soient $H = (X, \mathcal{E})$ un hypergraphe h -uniforme, k un entier positif, $k \geq 3$. Si pour tout sommet $x \in X$, on a $d(x) \geq k - 1$, alors H contient un cycle de longueur supérieure ou égale à k .

B) **Théorème** (Ore, 1961 [2, p. 203]). — Soit $G = (X, \mathcal{E})$ un graphe d'ordre $n \geq 3$ avec

$$[x, y] \notin \mathcal{E} \Rightarrow d(x) + d(y) \geq n.$$

Alors G possède un cycle hamiltonien.

Pour étendre ce résultat on définit le *degré* dans H d'une partie $A \subset X$, noté $\delta(A)$, comme le cardinal de l'ensemble des arêtes de H contenant A . On a alors :

Théorème 2. — Soit $H = (X, \mathcal{E})$ un hypergraphe h -uniforme ($h \geq 3$) d'ordre n , $n \geq h + 1$, tel que pour toute partie $A \subset X$ vérifiant $|A| = h$ on ait :

$$A \notin \mathcal{E} \Rightarrow \sum_{x \in A} \delta(A - x) > \sup(n - h + 2, 2h - 2)$$

alors H est hamiltonien.

Remarque. — Dans le cas $h = 2$, ce théorème est moins bon que celui de Ore et nous conjecturons que l'on peut y remplacer $\sup(n - h + 2, 2h - 2)$ par $\sup(n - h + 1, 2h - 2)$.

Vu les contraintes imposées par le comité d'édition nous n'en donnerons pas la preuve ici.

3. **Partition des arêtes de K_n^h en cycles hamiltoniens.**

— Il est connu [2, p. 222] que les arêtes du graphe complet K_n admettent une partition en cycles hamil-

toniens si n est impair et en cycles hamiltoniens plus un couplage si n est pair. On peut donc se poser le problème suivant :

Problème 1. — *Etant donné l'hypergraphe K_n^h , pour quelles valeurs de n existe-t-il une partition de ses arêtes en cycles hamiltoniens ?*

Nous pouvons définir certains types de cycles hamiltoniens.

Définition. — *Un cycle hamiltonien est de type k si et seulement si le cardinal de l'intersection de deux arêtes consécutives est égal à k .*

A cette définition correspondent d'autres questions précisant le problème 1.

Problème 1.k ($1 \leq k \leq h-1$). — *Pour quelles valeurs de n existe-t-il une partition des arêtes de K_n^h en cycles hamiltoniens de type k ?*

Condition nécessaire. — Une condition nécessaire pour que les problèmes 1 et 1.k aient des solutions est que $\frac{1}{n} \binom{n}{h}$ soit entier. Cette condition nécessaire est vérifiée dès que n est premier et nous allons prouver le théorème suivant :

Théorème 3. — *Pour tout n premier il existe une partition des arêtes de K_n^h en cycles hamiltoniens.*

Démonstration. — Considérons les sommets de K_n^h comme les éléments de Z_n , anneau des entiers modulo

n . Définissons une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur l'ensemble des arêtes par

$$\{a_1, a_2, \dots, a_h\} \mathcal{R} \{a'_1, a'_2, \dots, a'_h\} \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists d \in Z_n, \{a_1 + d, \dots, a_h + d\} = \{a'_1, \dots, a'_h\}.$$

Pour n premier il est facile de prouver que chaque classe a n éléments, et l'ensemble des arêtes d'une classe permet de construire un cycle hamiltonien défini par exemple comme suit :

$$E_i = \{a_1 + i(a_2 - a_1), a_2 + i(a_2 - a_1), \dots, a_h + i(a_2 - a_1)\};$$

$$x_{i+1} = a_2 + i(a_2 - a_1).$$

Ceci prouve le théorème. $\square$

Dans le cas $h = 3$ on peut donner un théorème plus précis.

Théorème 4. — *Pour n premier supérieur à 3 l'ensemble des arêtes de K_n^3 admet une partition en cycles hamiltoniens de type 1.*

Démonstration. — Définissant comme dans la démonstration du théorème 3, une partition des arêtes en classes d'équivalence, la classe d'équivalence de l'arête $(0, a, b)$ peut s'écrire, pour n premier, sous les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \{i, a+i, b+i\} & 0 \leq i < n & (1) \\ \{ia, (i+1)a, b+ia\} & 0 \leq i < n \text{ car } \{ia, 0 \leq i < n\} = \{i, 0 \leq i < n\} & (2) \\ \{i(b-a), a+i(b-a), b+i(b-a)\} & 0 \leq i < n \text{ car } \{i(b-a), 0 \leq i < n\} = \{i, 0 \leq i < n\} & (3) \\ \{ib, a+ib, (i+1)b\} & 0 \leq i < n \text{ car } \{ib, 0 \leq i < n\} = \{i, 0 \leq i < n\}. & (4) \end{aligned}$$

Aux formes (2), (3), (4) correspondent les cycles hamiltoniens suivants :

$$0 \{0, a, b\} a \{a, 2a, a+b\} 2a \dots (n-1)a \{(n-1)a, 0, (n-1)a+b\} 0 \quad (2')$$

$$a \{0, a, b\} b \{b-a, b, 2b-a\} 2b-a \dots \{(n-1)(b-a), a+(n-1)(b-a), b+(n-1)(b-a)\} a \quad (3')$$

$$0 \{0, a, b\} b \{b, a+b, 2b\} 2b \dots (n-1)b \{(n-1)b, a+(n-1)b, 0\} 0. \quad (4')$$

Chacun des cycles écrits ci-dessus est de type 1 ou de type 2. Ils ne peuvent être tous les trois de type 2; on montre en effet qu'on ne peut pas avoir simultanément :

$$|\{0, b\} \cap \{2a, a+b\}| = 1 \quad (\alpha)$$

$$|\{0, a\} \cap \{a+b, 2b\}| = 1 \quad (\beta)$$

$$|\{0, a\} \cap \{b-a, 2b-a\}| = 1. \quad (\gamma)$$

pour n premier avec a et b éléments de Z_n : $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. $\square$

Les résultats ci-dessus suggèrent les conjectures suivantes :

Conjecture 1 [resp. 1.k]. — *Il existe une partition des arêtes de K_n^h en cycles hamiltoniens [resp. de type k] si et seulement si $\frac{1}{n} \binom{n}{h}$ est entier.*

La conjecture 1.($h-1$) n'est autre qu'une conjecture de Baranyai [1].

Conjecture 2 [resp. 2.k]. — *Pour $n \equiv 1$ ou $2 \pmod{3}$ il existe une partition des arêtes de K_n^3 en cycles hamiltoniens [resp. de type k]. Pour $n \equiv 0 \pmod{3}$ il existe une partition des arêtes de K_n^3 en un couplage et des cycles hamiltoniens [resp. de type k].*

Nous avons montré que la conjecture 2 était vérifiée pour les premières valeurs de n ($n \leq 20$) et pour $n = 2p$ (p premier).

Bibliographie

- [1] Z. BARANYAI, On the factorization of the complete uniform hypergraph, *Coll. Math. Soc.*, Janos Bolyai 10, Infinite and finite sets, Keszthely (1973), North Holland (1975) 91-108.
- [2] C. BERGE, Graphes et hypergraphes, Dunod (1973).
- [3] G. A. DIRAC, Some theorems on abstract graphs, *Proc. London Math. Soc.* **3** (1952) 69-81.
- [4] I. TOMESCU, Sur les cycles élémentaires dans les graphes et hypergraphes k -chromatiques (manuscript).