

Outils Théoriques pour le Calcul Pratique de l'Hyperbolicité dans les Grands Graphes

Guillaume Ducoffe

Rapport de Stage M2 MPRI
Supervisé par David Coudert

Équipe COATI, Laboratoire I3S/Inria Sophia Antipolis - Méditerranée

Du 18 Mars 2013 Au 31 Août 2013

Le contexte général

Ce stage porte sur la notion d'hyperbolicité dans les graphes. L'hyperbolicité, introduite par Mikhaïl Gromov, mesure la proximité de la *métrique* du graphe à celle d'un arbre. De nombreux travaux ont pour objet de caractériser les graphes de faible hyperbolicité, ainsi que d'étudier ses relations avec d'autres paramètres de la théorie des graphes. Son étude est motivée par la problématique du calcul des routes dans les grands graphes, comme les graphes des systèmes autonomes de l'Internet.

Le routage consiste à sélectionner les chemins par lesquels transite l'information dans le réseau. Un bon routage doit être calculable efficacement, et choisir des chemins aussi courts que possible. Une des approches envisagées consiste à : plonger le graphe modélisant le réseau dans une structure géométrique puis, exploiter les coordonnées du plongement pour décider des chemins à emprunter. En général, les plongements dans des espaces Euclidiens entraînent des distortions importantes des distances entre les sommets. Mais il a été montré empiriquement que les plongements dans des espaces *hyperboliques* conduisaient à de meilleurs résultats. L'hyperbolicité mesure la pire distortion (additive) des distances dans un graphe, quand on le plonge dans un espace hyperbolique.

Le problème étudié

L'hyperbolicité d'un graphe peut se calculer en temps $O(n^4)$, où n est le nombre de sommets du graphe. Les temps de calcul sont donc bien trop

importants pour des graphes de plus de 10 000 sommets. De plus, au vu de résultats obtenus pendant ce stage, il semble peu probable qu'on puisse diminuer significativement ce coût.

L'objet de ce stage était de trouver des propriétés structurelles qui aident à réduire la complexité, au moins en pratique. Cette approche reste encore en grande partie à explorer. Les outils classiques en théorie des graphes prennent mal en compte l'aspect *métrique* du graphe, ce qui rend le problème difficile et les résultats peu nombreux en la matière.

La contribution proposée

Dans un premier temps, j'ai montré comment rendre compatible le calcul (exact et approché) de l'hyperbolicité du graphe avec sa décomposition selon ses cliques-séparatrices. Puis, j'ai repensé la caractérisation des graphes de faible hyperbolicité, ce dont j'ai pu déduire un algorithme de reconnaissance plus efficace que dans le cas général. Ces résultats ont abouti à un algorithme en temps *linéaire* pour le calcul de l'hyperbolicité dans les graphes planaires extérieurs. Finalement, j'ai complètement déterminé l'hyperbolicité d'une nouvelle famille de graphes, et j'ai établi des relations entre hyperbolicité et largeur arborescente (*treewidth*), avec des applications algorithmiques dans les deux cas.

Les arguments en faveur de sa validité

La méthode de décomposition par des cliques séparatrices a été validée expérimentalement sur des cartes de l'Internet (CAIDA); elle a diminué l'ordre de grandeur des graphes étudiés. Par ailleurs mes algorithmes, respectivement pour déterminer les graphes de faible hyperbolicité et pour les graphes planaires extérieurs, sont théoriquement *optimaux* pour leurs problèmes respectifs. D'autres de mes résultats offrent une première étude théorique d'une récente heuristique, dont la validité n'est pour l'instant qu'expérimentale.

Le bilan et les perspectives

Je compte poursuivre mon étude théorique des récentes méthodes heuristiques pour l'hyperbolicité. En outre, ma méthode de décomposition gagnerait à être confrontée expérimentalement à d'autres types de graphes réels. À ce jour, peu de méthodes d'approximation sont connues pour le problème, et cette piste aussi gagnerait à être poursuivie. Mais je suis plus intéressé par une caractérisation des graphes de faible hyperbolicité (pour de plus larges valeurs), dont je pense qu'on pourra déduire des algorithmes plus efficaces.

Table des matières

| | | |
|----------|--|-----------|
| 1 | Introduction | 4 |
| 2 | Définitions et État de l'Art | 6 |
| 3 | Une Méthode de Décomposition | 9 |
| 3.1 | Séparer le graphe par une clique | 9 |
| 3.2 | Approximation 1-additive pour l'Hyperbolicité | 11 |
| 3.3 | Substitution pour le Calcul Exact | 12 |
| 3.4 | Discussion | 12 |
| 4 | Graphes de Faible Hyperbolicité | 13 |
| 4.1 | L'Algorithme | 14 |
| 4.2 | Complexité et Discussion | 15 |
| 5 | Applications aux Graphes Planaires Extérieurs | 16 |
| 5.1 | L'Algorithme | 17 |
| 5.2 | Discussion et Approximation pour les Graphes Planaires | 19 |
| 6 | Conclusion | 20 |
| A | Compléments à la Section 3 | 25 |
| A.1 | Preuves pour la Section 3.1 | 25 |
| A.2 | Preuves pour la Section 3.2 | 28 |
| A.3 | Preuves pour la Section 3.3 | 35 |
| A.4 | Compléments pour la Discussion | 37 |
| B | Compléments à la Section 4 | 38 |
| B.1 | Puissances de Graphe et Hyperbolicité | 38 |
| B.2 | Convexité dans les Graphes | 40 |
| B.3 | Preuves pour la Section 4.1 | 43 |
| C | Compléments à la Section 5 | 46 |
| C.1 | Graphes Planaires Extérieurs 1/2-hyperboliques | 46 |
| C.2 | Graphes Soleil | 48 |
| C.3 | Preuves pour la Section 5.1 | 53 |
| D | Hyperbolicité et Largeur Arborescente | 56 |
| E | Grilles Hexagonales et Contractions d'Arêtes | 60 |

1 Introduction

L'hyperbolicité a été introduite par Mikhaïl Gromov pour les groupes de type fini [38]. Elle s'est révélée y jouer un rôle important, en particulier pour l'étude des groupes automatiques, dont les propriétés servent en théorie des langages formels [56]. Le concept a ensuite été étendu aux mathématiques discrètes. Ces dernières décennies ont vu apparaître quantité de travaux sur ce paramètre, dans le cadre d'espaces métriques plus généraux. Cette notion, qui ne repose que sur des conditions locales, s'adapte bien aux espaces de *courbure négative*, dont elle capte les propriétés essentielles.

Les graphes sont des objets combinatoires, utilisés par exemple pour la modélisation des réseaux [25, 26], et qui peuvent être équipés d'une distance "naturelle" : celle des plus courts chemins. À ce titre, ils s'inscrivent dans l'étude plus générale de l'hyperbolicité dans les espaces métriques, pour laquelle ils jouent le rôle d'espace standard : en effet, l'hyperbolicité d'un nombre important d'espaces métriques peut se ramener à celle d'un graphe (éventuellement infini) [58, 60, 61, 70].

Considéré pour les seuls graphes des réseaux, le paramètre d'hyperbolicité a amené à de multiples applications pratiques : en routage [12], pour les systèmes de sécurité [42], la diffusion des virus [43], ainsi qu'en bioinformatique [28]. En particulier pour le graphe de l'Internet, on a observé qu'il pouvait être plongé dans un espace hyperbolique, avec une faible distorsion des distances [12] (des mesures expérimentales de son hyperbolicité l'ont confirmé [21, 24, 45, 55]), ce dont on a pu déduire un algorithme glouton pour le problème du routage [57]. Finalement dans [45, 55], les auteurs proposent l'hyperbolicité comme un paramètre intrinsèque des *complex networks*, par le biais duquel on pourrait les classifier, et qui expliquerait certaines propriétés de type *small world* observées pour ces réseaux.

Du point de vue algorithmique, l'hyperbolicité mesure aussi la proximité de la métrique du graphe avec celle d'un arbre, ou graphe connexe acyclique. Les arbres sont des graphes réputés "faciles", au sens où des problèmes NP-complets peuvent être résolus pour eux en temps (quasi-)linéaire, tels que l'ensemble indépendant de cardinalité maximum, la coloration propre, la largeur de chemin ou *pathwidth* [63], la couverture minimale des sommets, etc... Cette simplicité s'étend à des problèmes polynomiaux, dont on connaît des optimisations pour les arbres, par exemple le calcul du diamètre. Pour cette raison, la théorie des graphes comprend de nombreux paramètres dont le but est de mesurer la proximité du graphe avec un arbre [11, 27, 71]. Mais peu d'entre eux peuvent être calculés, ou même approchés, en temps polynomial, ce qui rend l'hyperbolicité d'autant plus intéressante. Une faible hy-

perbolicité conduit effectivement à des optimisations d’algorithmes, notamment pour les *distance-labeling schemes* [35], l’approximation du diamètre du graphe [19], la couverture du graphe par un nombre minimum de boules [20], et le routage compact [47].

En revanche, même s’il est polynomial, le coût du calcul de l’hyperbolicité (quasiment en temps $O(n^4)$, où n est l’ordre du graphe [33]) n’en reste pas moins prohibitif pour les grands graphes, de l’ordre de plusieurs milliers de sommets. Certaines des bornes inférieures pour la complexité théorique, obtenues par des réductions, suggèrent qu’il ne peut pas en être autrement (voir la Section 4.2). Des heuristiques ont été proposées pour réduire le temps de calcul [21, 24, 45].

L’approche proposée pour ce stage a consisté à déterminer quelles propriétés structurelles des graphes pouvaient amener à une diminution du temps de calcul, théorique dans l’idéal, mais au moins pratique. Par exemple une stratégie ”diviser pour régner” peut-elle aider ? La difficulté qui se pose, dans ce cas-là, est de pouvoir se ramener à des sous-graphes dont la métrique est proche de celle du graphe original. Un premier indice qui suggère que ce n’est pas chose aisée est que la simple déléation d’une arête du graphe peut multiplier jusque par cinq la valeur de l’hyperbolicité [15].

Contributions. Sur une suggestion de mon encadrant David Coudert, j’ai d’abord prouvé que le calcul de l’hyperbolicité du graphe pouvait être réduit à celui de l’hyperbolicité de ses sous-graphes obtenus selon la célèbre décomposition par les cliques-séparatrices minimales de Tarjan [68]. La diminution de la taille des graphes à considérer peut toutefois s’accompagner d’une erreur additive de 1 sur la véritable valeur de l’hyperbolicité (Section 3). Mais cette faible erreur peut cependant être évitée, au prix d’une modification des sous-graphes obtenus par la décomposition (Section 3.3).

L’inconvénient majeur de la méthode précédente est qu’elle s’adapte mal aux graphes de très petite hyperbolicité ($\leq \frac{1}{2}$). J’ai donc étudié ces derniers séparément, en me basant sur la caractérisation bien connue de [3]. J’en ai déduit un algorithme de reconnaissance théoriquement optimal des graphes 1/2-hyperboliques (Section 4).

Enfin, mon dernier angle d’attaque a été d’optimiser le problème pour une classe de graphes en particulier, de sorte que je bénéficie d’une structure plus contrainte. J’ai pu ainsi combiner les résultats des Sections 3 et 4 pour aboutir à un algorithme du calcul de l’hyperbolicité en temps *linéaire* pour les graphes planaires extérieurs (Section 5). Mon travail est complété, en an-

nexe, par une étude des relations entre hyperbolicité et largeur arborescente (avec des applications algorithmiques, Section D), et l’analyse préliminaire d’une récente heuristique, proposée pour la première fois dans [45] (Section E).

2 Définitions et État de l’Art

Un graphe G est une paire formée de deux ensembles (V, E) ; les n éléments de V sont appelés les sommets du graphe, et les m éléments de E , ou arêtes, sont des sous-ensembles de deux sommets distincts. Un sommet contenu dans une arête est une extrémité de cette arête, et deux sommets sont dits *adjacents* s’ils sont les deux extrémités d’une même arête. On définit aussi, pour tout sommet $u \in V$, son *voisinage* $N(u)$ comme l’ensemble des sommets du graphe avec lesquels il est adjacent. La terminologie et les résultats standards sur les graphes peuvent être consultés plus avant dans [13, 26]. Au cours de ce stage, je me suis surtout intéressé aux distances dans le graphe (toujours supposé **connexe** dans la suite, et tel que la longueur de ses arêtes est 1). Pour rappel, une distance sur un ensemble X est une fonction $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, qui satisfait aux trois propriétés qui suivent :

- la symétrie : $d(x, y) = d(y, x)$;
- la séparation : $d(x, y) = 0$ si, et seulement si, $x = y$;
- l’inégalité triangulaire : $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Un ensemble X peut toujours être équipé d’une distance triviale, définie comme $d(x, x) = 0$ et $d(x, y) = 1$ si $x \neq y$. Dans le cas des graphes, une distance canonique plus intéressante est celle des plus courts chemins entre les sommets. On la notera d_G , ou simplement d s’il n’y a pas d’ambiguïté dans le contexte.

L’hyperbolicité du graphe G a été définie comme suit par Gromov [38] :

Définition 1 ([38]). *Le graphe G est δ -hyperbolique si, pour tout quadruplet a, b, c, d de V , les deux plus grandes des trois sommes parmi $S_1 = d(a, b) + d(c, d)$, $S_2 = d(a, c) + d(b, d)$, et $S_3 = d(a, d) + d(b, c)$ diffèrent au plus de 2δ . L’hyperbolicité du graphe, ou $\delta(G)$, est le plus petit δ tel que G est δ -hyperbolique.*

Cette Définition 1 s’appelle *condition des 4 points* dans la littérature. On notera que, par définition, la valeur de $\delta(G)$ est forcément un demi-entier. L’hyperbolicité peut néanmoins s’exprimer par le biais d’autres définitions. Sont données ci-après les deux principales qu’on trouve dans la littérature :

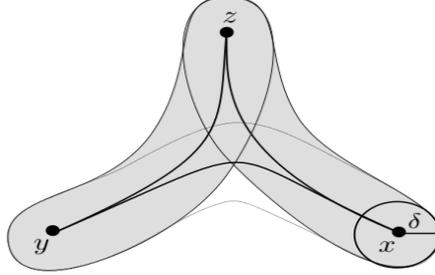


FIG. 1: Un triangle δ -fin : chaque côté est dans le δ -voisinage des deux autres.

Définition 2. [Produit de Gromov, [38]] Étant donné un triplet quelconque x, y, r de V , on définit le produit $(x|y)_r$ comme étant la différence $\frac{1}{2}(\mathrm{d}(x, r) + \mathrm{d}(r, y) - \mathrm{d}(x, y))$. Le graphe G est δ -hyperbolique si, pour tout quadruplet x, y, z, r de V , on a que $(x|z)_r \geq \min\{(x|y)_r, (y|z)_r\} - \delta$.

Définition 3. [Condition de Rips, [48]] Étant donné un triplet quelconque x, y, z de V , on appelle triangle géodésique d'extrémités x, y, z l'union de trois plus courts chemins dans G , d'extrémités respectives x et y , y et z , z et x (voir Figure 1).

Le triangle est dit δ -fin si, pour n'importe lequel de ses trois côtés, tous ses sommets sont à distance au plus δ des deux autres côtés. Le graphe G est δ -hyperbolique si tous ses triangles géodésiques sont δ -fins.

Les Définitions 1 et 2 sont équivalentes ; ce résultat est exploité dans [33], où les auteurs ont montré que le produit de Gromov peut se réduire au produit matriciel défini dans [29], ce dont ils ont déduit la meilleure complexité temporelle connue pour le calcul de l'hyperbolicité. Celle-ci s'exprime en fonction de α , soit le plus petit exposant μ tel qu'on puisse multiplier deux matrices carrées à n lignes (et colonnes) en temps $O(n^\mu)$. Le résultat principal de [33] est que $\delta(G)$ se calcule en temps $O(n^{\frac{5+\alpha}{2}})$. À ce jour, on sait que $\alpha < 2.3727$ [22]. D'où une complexité temporelle $O(n^{3,69})$.

En revanche, les valeurs $\delta^*(G)$ et $\delta(G)$, données respectivement par la Définition 3 et par la Définition 1 (ou 2) peuvent ne pas être les mêmes. Cependant, elles sont intrinsèquement reliées. Ainsi, $\delta^*(G) \leq 4\delta(G)$ [38], tandis que $\delta(G) \leq 2\delta^*(G) + \frac{1}{2}$ [37]. En particulier, les graphes 0-hyperboliques correspondent pour toutes les définitions. D'après la Définition 3, les arbres sont 0-hyperboliques ; en effet, dans un triangle géodésique, tous les sommets appartiennent à, au moins, deux côtés distincts. La Définition 3 est parfois préférée par certains auteurs, en raison de ses interprétations géométriques [9]. Mais la Définition 1 est la plus adaptée du point de vue algorithmique. Dans la suite, nous retenons donc seulement la condition des 4 points. Étant donné

un quadruplet quelconque a, b, c, d de V , nous écrivons $\delta(a, b, c, d)$ la demi-différence entre les deux plus grandes sommes parmi S_1, S_2 et S_3 , ce qui nous donne $\delta(G) = \max_{a,b,c,d \in V} \delta(a, b, c, d)$.

Nous terminons cette section par des résultats devenus classiques sur l'hyperbolicité du graphe.

Le premier s'appuie sur le concept de paires *localement éloignées* [31]. Elles consistent en deux sommets u, v dont on ne peut pas augmenter localement le plus court chemin. En d'autres termes, pour tout $u' \in N(u)$ et pour tout $v' \in N(v)$ on a $d(u, v) \geq \max\{d(u', v), d(u, v')\}$. Les sommets diamétralement opposés dans le graphe sont autant d'exemples de paires localement éloignées.

Lemme 4 ([31]). *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Il existe deux paires u_1, v_1 et u_2, v_2 , toutes les deux localement éloignées, et qui satisfont :*

- $d(u_1, v_1) + d(u_2, v_2) \geq d(u_1, v_2) + d(u_2, v_1) \geq d(u_1, u_2) + d(v_1, v_2)$;
- $\delta(G) = \delta(u_1, u_2, v_1, v_2)$.

En clair, le Lemme 4 diminue le nombre de quadruplets à considérer pour la valeur $\delta(G)$. Des expérimentations ont montré qu'en pratique, l'élagage diminue significativement le temps de calcul [31]. Dans le cas des grilles, il n'y a que *deux* paires localement éloignées, qui sont respectivement les coins de la grille diamétralement opposés.

Des bornes supérieures pour $\delta(G)$ ont été obtenues en fonction d'autres paramètres du graphe [53]. Cette étude est brièvement complétée dans la Section D. Nous résumons dans le Lemme 5 les bornes supérieures les plus pertinentes pour notre étude :

Lemme 5. ([21, 37, 46]) *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, et a, b, c, d un quadruplet de V . On suppose sans perte de généralité $d(a, b) + d(c, d) \geq d(a, c) + d(b, d) \geq d(a, d) + d(b, c)$. Alors :*

- $\delta(a, b, c, d) \leq \min\{d(a, b)/2, d(c, d)/2\}$;
- $\delta(a, b, c, d) \leq \min\{d(a, b), d(c, d), d(a, c), d(b, d), d(a, d), d(b, c)\}$;
- $\delta(a, b, c, d) \leq \lfloor \frac{\text{diam}(G)}{2} \rfloor$.

Quant aux bornes inférieures, elles s'obtiennent grâce à des sous-graphes *isométriques*. Le sous-graphe $G[X]$, induit dans G par le sous-ensemble de sommets X , est dit isométrique quand il préserve les distances dans G . En d'autres termes, pour tout couple x, y de X , on a $d_G(x, y) = d_{G[X]}(x, y)$. Clairement, $\delta(G[X]) \leq \delta(G)$ dès que cette condition est vérifiée. C'est le cas, en particulier, quand le sous-ensemble X est une composante biconnexe

de G . En fait, un résultat plus fort dit que l'hyperbolicité de G est égale à l'hyperbolicité maximum prise sur tous les sous-graphes induits par ses composantes biconnexes. Aussi, dans la suite, on supposera souvent, sans perte de généralité, que le graphe G considéré est au moins 2-connexe.

Afin d'être exploitée dans un contexte plus général, cette méthode requiert néanmoins de connaître des familles de graphes simples dont l'hyperbolicité a été complètement caractérisée. Nous présentons ici deux d'entre elles : les cycles et les grilles.

Lemme 6. (*[21, 72]*) *Les cycles d'ordre $4p + \varepsilon$, où $p \geq 1$ et $\varepsilon \in \{0, 1, 2, 3\}$, sont $(p - 1/2)$ -hyperboliques si $\varepsilon = 1$, et p -hyperboliques sinon.*

Lemme 7. (*[21]*) *Les grilles $n \times m$ sont $(\min\{n, m\} - 1)$ -hyperboliques.*

3 Une Méthode de Décomposition

Rappelons qu'un ensemble $X \subset V$ est un séparateur dans le graphe connexe G si $G[V \setminus X]$ n'est plus connexe. Si de plus $G[X]$ est un sous-graphe complet, on dit que X est une clique-séparatrice pour G . Dans cette section, nous supposons, pour simplifier, notre graphe d'étude G biconnexe et $\delta(G) \geq 1$. Le cas des graphes 1/2-hyperboliques sera traité à part dans la Section suivante. Nous prouverons qu'on peut réduire la taille de G en recourant à une décomposition selon les cliques-séparatrices minimales [68]. Cette décomposition (unique [50]) est la donnée de tous les sous-graphes maximaux qui n'admettent pas de cliques-séparatrices (nous les appellerons *atomes*). Elle est calculable en temps $O(nm)$ [50, 68]. Notre but est de montrer qu'on obtient $\delta(G)$ (à une constante additive près) rien qu'en calculant l'hyperbolicité de chacun des atomes. Un résultat qui s'ajoute aux quelques décompositions déjà connues pour préserver l'hyperbolicité, dont la décomposition modulaire et la *split decomposition* [37]. Nous sommes capables de calculer la valeur exacte si nécessaire, grâce à une modification des atomes (Section 3.3).

Quelques notations s'imposent pour la suite. On appelle $(A|B)$ -séparateur tout sous-ensemble X qui déconnecte les sommets $a \in A \setminus X$ des sommets $b \in B \setminus X$. En particulier, A et B sont deux $(A|B)$ -séparateurs triviaux. On réserve la notation $(a|b_1, b_2, b_3)$ aux quadruplets tels que $a \in A$ et $b_1, b_2, b_3 \in B$, la notation $(a_1, a_2|b_1, b_2)$ à ceux tels que $a_1, a_2 \in A$ et $b_1, b_2 \in B$. Les preuves manquantes peuvent être consultées en Section A.

3.1 Séparer le graphe par une clique

Notre algorithme est le suivant. Soit X un séparateur du graphe ;

- Considérer séparément chaque composante connexe B de $G[V \setminus X]$;
- Calculer l’hyperbolicité de chaque sous-graphe $G[B \cup X]$;
- Retourner la plus grande des valeurs ainsi calculées.

J’ai d’abord démontré que si X est une clique-séparatrice, alors la méthode ci-dessus retourne toujours l’hyperbolicité du graphe G (à une faible distortion additive près). Ce résultat avait été démontré indépendamment dans [37]. Toutefois, mes techniques sont généralisables à la décomposition du graphe par plusieurs cliques-séparatrices (voir la Section suivante), et elles donnent davantage d’information sur la structure des quadruplets à prendre en compte pour $\delta(G)$ que n’en donne la preuve plus calculatoire de [37].

Théorème 8. (*[37]*) *Soit G un graphe biconnexe tel que $\delta(G) \geq 1$. Étant donné une clique-séparatrice X pour G , soient B_1, \dots, B_k les composantes connexes de $G[V \setminus X]$. On a que : $\max_{1 \leq i \leq k} \delta(G[B_i \cup X]) \leq \delta(G) \leq \max_{1 \leq i \leq k} \delta(G[B_i \cup X]) + 1/2$.*

La borne inférieure vient de ce que, puisque un sous-graphe complet est isométrique, alors tous les sous-graphes $G[B_i \cup X]$ considérés le sont aussi. D’un autre côté, il peut advenir que la valeur $\delta(G)$ n’est atteinte qu’en des quadruplets a, b, c, d qui ont été séparés par X . Nous montrerons qu’un tel quadruplet extrémal doit satisfaire des conditions sur la distance de ses sommets à X , ce dont on déduira la borne supérieure du Théorème 8.

D’abord montrons que les quadruplets du type $(a_1, a_2|b_1, b_2)$ ont une hyperbolicité bornée par D_X , où D_X est le *diamètre de X dans G* (i.e., la plus longue distance dans G entre les sommets dans X).

Lemme 9. (*[21]*) *Soit X un $(A|B)$ -séparateur de diamètre D_X dans un graphe connexe G . Alors pour tout quadruplet de type $(a_1, a_2|b_1, b_2)$ on a que $\delta(a_1, a_2, b_1, b_2) \leq D_X$.*

Démonstration. Rappelons que $S_1 = d(a_1, a_2) + d(b_1, b_2)$, $S_2 = d(a_1, b_1) + d(a_2, b_2)$, et $S_3 = d(a_1, b_2) + d(a_2, b_1)$. On suppose sans perte de généralité $S_2 \geq S_3$. Soit $d(v, X)$ la notation pour la plus courte distance entre un sommet v et un sommet de X .

Clairement, $d(a_i, b_i) \geq d(a_i, X) + d(X, b_i)$ pour tout $i = 1, 2$, et $d(a_i, a_j) \leq d(a_i, X) + d(a_j, X) + D_X$ avec $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

Si $S_1 \geq S_2$, on obtient :

$$\begin{aligned} S_2 &= d(a_1, b_1) + d(a_2, b_2) \\ &\geq d(a_1, X) + d(X, b_1) + d(a_2, X) + d(X, b_2) \\ &\geq [d(a_1, X) + d(a_2, X) + D_X] + [d(b_1, X) + d(b_2, X) + D_X] - 2D_X \\ &\geq S_1 - 2D_X. \end{aligned}$$

En conséquence on a $\delta(a_1, a_2, b_1, b_2) \leq (S_1 - S_2)/2 \leq D_X$.

On montre de même que $S_3 \geq S_2 - 2D_X$, et quand $S_2 \geq S_1$ que $S_1 \geq S_2 - 2D_X$. D'où finalement $\delta(a_1, a_2, b_1, b_2) \leq D_X$ dans tous les cas. \square

En particulier lorsque X est une clique-séparatrice on a $D_X = 1$, et donc $\delta(a_1, a_2, b_1, b_2) \leq 1$. Cela signifie que nous pouvons ignorer tous ces quadruplets, sous l'hypothèse que $\delta(G)$ est au moins 1. Cependant, il e des graphes où $\delta(G)$ est seulement atteint par des quadruplets de type $(a|b_1, b_2, b_3)$. Le reste de la preuve du Théorème 8 (voir Section A) consiste à déterminer sous quelles conditions (nécessaires) un tel cas survient, et d'en déduire la borne supérieure en jouant sur la structure de ces quadruplets.

Notons, pour conclure cette Section, que cette borne supérieure est la meilleure possible. Pour le voir, soit le graphe G construit depuis un cycle C_7 de longueur 7 auquel on ajoute un sommet i' et les arêtes $\{i, i'\}$ et $\{i', i + 1\}$ pour tout $i \in \mathbb{Z}_7$. C'est donc un graphe avec 14 sommets. Les triangles $\{i, i + 1, i'\}$ sont 0-hyperboliques, et C_7 a pour hyperbolicité 1. Néanmoins, l'hyperbolicité de G est $3/2$.

3.2 Approximation 1-additive pour l'Hyperbolicité

Nous savons par la Section précédente que la séparation du graphe par une clique peut entraîner une (faible) erreur additive sur la vraie valeur de l'hyperbolicité. Nous montrons maintenant que le calcul de l'hyperbolicité en fonction des seuls atomes donne une approximation additive à 1 près de la valeur du paramètre. C'est-à-dire que l'erreur possible induite par les séparations ne peut pas s'accumuler.

Théorème 10. *Étant donnée la décomposition par les cliques-séparatrices de $G = (V, E)$, soient B_i les atomes du graphe. On a que : $\max_i \delta(G[B_i]) \leq \delta(G) \leq \max_i \delta(G[B_i]) + 1$*

On notera qu'en particulier, le Théorème 10 donne une nouvelle preuve que les graphes cordaux sont 1-hyperboliques. Un graphe G est cordal si, et seulement si, il n'y a pas de cycle induit de taille au moins 4 dans G .

Corollaire 11. *([14]) Soit $G = (V, E)$ un graphe cordal. Alors on a que : $\delta(G) \leq 1$.*

Démonstration. Pour rappel, un sommet $v \in V$ est dit *simplicial* si $G[N(v)]$ est un sous-graphe complet. Il est bien connu que G est cordal si, et seulement si, soit G est trivial (e.g. c'est un unique sommet sans arête), soit il existe un sommet simplicial $v \in V$ tel que $G \setminus v$ est également cordal [62]. Cette caractérisation implique que tous les atomes de G sont des

sous-graphes complets, donc d'hyperbolicité 0. En conséquence, $\delta(G) \leq 1$ d'après le Théorème 10. \square

La preuve, assez technique, du Théorème 10 est détaillée dans la Section A. Son argument principal est que si $a, b, c, d \in V$ appartiennent à des atomes différents, et $\delta(a, b, c, d) > 1$, alors on peut trouver un atome A par lequel passent tous les plus courts chemins entre ces sommets, et tels que $\delta(a, b, c, d) \leq \delta(G[A]) + 1$.

3.3 Substitution pour le Calcul Exact

Nous avons dit précédemment que lors de la séparation du graphe par une clique X , notre algorithme de la Section 3.1 peut retourner une valeur erronée pour l'hyperbolicité de G , mais seulement si $\delta(G)$ est uniquement atteint pour des quadruplets de type $(a|b_1, b_2, b_3)$, séparés par X et qui vérifient des conditions nécessaires sur leurs distances à X . On propose, dans la Section A en annexe, une modification des atomes pour prendre en compte cette éventuelle erreur sur l'hyperbolicité. L'idée est d'ajouter des sommets simpliciaux aux atomes, dont le voisinage est un sous-ensemble d'une clique-séparatrice, et qui simulent le sommet a d'un possible quadruplet du type $(a|b_1, b_2, b_3)$. La difficulté technique est de s'assurer que l'addition de nouveaux sommets n'augmente pas artificiellement la valeur de l'hyperbolicité de G .

Notre construction requiert de connaître les cliques-séparatrices X_i qui ont été employées pendant la décomposition. La modification des atomes demande un temps qui leur est directement proportionnel, soit $O(n \sum_i |X_i|)$. Dans le pire des cas, les substitués obtenus pour les atomes ont une taille de l'ordre de G , auquel cas le bénéfice obtenu par la décomposition est perdu (quoique la structure du graphe puisse avoir été simplifiée). Mais cette taille ne dépasse jamais celle du graphe d'étude.

3.4 Discussion

La méthode de décomposition par les cliques-séparatrices minimales a été employée sur des graphes de l'Internet, pour lesquels on a pu montrer expérimentalement un gain réel en la taille des graphes d'étude, même après les substitutions de la Section 3.3 [21].

Plusieurs généralisations possibles à ce travail ont été considérées pendant le stage. Par exemple, une extension naturelle serait de borner l'erreur sur l'hyperbolicité pour des décompositions par des séparateurs de plus grand diamètre que 1. Cela semble toutefois peu prometteur, car *tous* les graphes sont complètement séparables rien que par des séparateurs de

diamètre (au plus) 2 : les voisinages des sommets du graphe. Même se contraindre à des séparateurs *isométriques* n'est pas assez ; en effet, les graphes pontés (ou *bridged graphs*) sont complètement séparables par des séparateurs isométriques de diamètre au plus 2, alors qu'on peut trouver des graphes dans cette classe avec une hyperbolicité arbitrairement grande [1, 46].

Nous avons aussi cherché à réduire le calcul de l'hyperbolicité du graphe à celui de l'hyperbolicité de ses composantes *triconnexes*. Celles-ci sont obtenues en temps linéaire par la décomposition du graphe selon ses séparateurs de taille 2 [40]. Dans le cas où les deux sommets d'un même séparateur sont adjacents, on a une arête-séparatrice. Ce cas particulier est donc pris en compte par notre méthode pour la clique-décomposition. Mais il reste encore à trouver comment prendre en compte le cas où les deux sommets du séparateur ne sont pas adjacents.

De plus amples détails sont disponibles en annexe (Section A), où des généralisations dans des cadres plus contraints sont proposées.

4 Graphes de Faible Hyperbolicité

Même si le temps de calcul pour l'hyperbolicité reste prohibitif, on peut espérer que reconnaître un graphe de très *petite* hyperbolicité puisse être réalisable plus efficacement. Formellement, on se donne une constante δ , et notre but est d'analyser la complexité du problème de décider si un graphe $G = (V, E)$ est δ -hyperbolique (i.e. $\delta(G) \leq \delta$). Les raisons pratiques ne manquent pas. L'une d'elles est qu'on s'attend à ce que les graphes de faible hyperbolicité soient les instances les plus difficiles pour l'algorithme proposée dans [21]. Par ailleurs, plusieurs graphes réels, comme ceux de l'Internet, sont déjà connus pour avoir une hyperbolicité bornée [12, 24]. Enfin, des caractérisations plus poussées existent pour ces graphes, dont on aspire à dégager de nouveaux outils pour nos algorithmes.

Un résultat bien connu dit que les graphes 0-hyperboliques sont exactement les cactus de cliques (*block graphs*) : ceux dont les composantes biconnexes sont des sous-graphes complets [6, 41]. La reconnaissance de ces graphes en temps linéaire s'en déduit simplement. Par contraste, la caractérisation des graphes 1/2-hyperboliques [3] n'a, pour ce que nous en savons, jamais abouti à une application algorithmique d'aucune sorte. L'objet principal de cette Section sera de présenter un algorithme de reconnaissance des graphes 1/2-hyperboliques, qui est basé sur leur caractérisation. Le détail des preuves pour cette Section est consultable en annexe en Section B

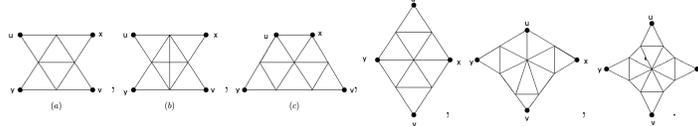


FIG. 2: Les six sous-graphes isométriques interdits.

4.1 L'Algorithme

Dans la suite, un sous-graphe induit H qui n'est pas isométrique est dit *ponté*. Le graphe G est sans H si, et seulement si, H n'est pas un sous-graphe induit de G . Chepoi et al. ont donné dans [3] une caractérisation complète des graphes 1/2-hyperboliques basée sur des sous-graphes isométriques *interdits* :

Théorème 12 ([3]). *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. G est 1/2-hyperbolique si, et seulement si, tous les cycles dans G de longueur 4 ou au moins 6 sont pontés, et aucun des graphes de la Figure 2 n'est un sous-graphe isométrique de G .*

Au contraire de la caractérisation des graphes 0-hyperboliques, il n'est pas clair qu'un algorithme puisse se déduire facilement du Théorème 12. Décider si H est un sous-graphe isométrique de G est NP-complet quand H fait partie de l'entrée (voir [51]). De plus, même les rares instances qui sont connues pour être dans P requièrent un temps de calcul important, par exemple, le problème du plus long cycle isométrique [51]. Nous montrerons pourtant que, de manière surprenante, un algorithme plus efficace peut se déduire du Théorème 12.

Nous supposons dans la suite que la condition suivante est satisfaite :

Condition 1. *Tout cycle dans G de longueur au moins 8 est ponté.*

D'après le Théorème 12, la Condition 1 est nécessaire pour qu'un graphe soit 1/2-hyperbolique. En fait elle est nécessaire pour qu'un graphe G soit 1-hyperbolique d'après le Lemme 6. Aussi, un moyen commode de vérifier la Condition 1 est d'utiliser d'abord une 2-approximation pour l'hyperbolicité. Si l'approximation retourne plus que 2, alors le graphe n'est pas 1/2-hyperbolique. Sinon, le graphe est 1-hyperbolique et donc, la Condition 1 est satisfaite. Un algorithme de 2-approximation peut être exécuté en temps $O(n^{\frac{3+\alpha}{2}}) = O(n^{2,69})$ [33].

À présent, notre but est de prouver que les conditions restantes pour que le graphe d'étude G soit 1/2-hyperbolique peuvent être ramenées à la recherche de cycles induits de longueur 4 (aussi appelés C_4 , ou quadrangles), dans un petit nombre de graphes qui sont basés sur les puissances de G . Pour rappel, la j^{eme} puissance de $G = (V, E)$ est le graphe $G^j = (V, E_j)$, avec E_j l'ensemble des couples de sommets distincts dans V qui sont à distance au plus j dans G . En d'autres termes : $E_j = \{\{u, v\} : 0 < d_G(u, v) \leq j\}$.

Le premier graphe que nous considérerons est le carré G^2 de G . Le second est défini comme suit :

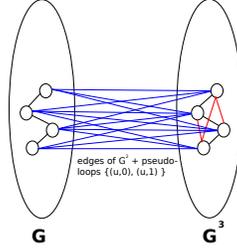


FIG. 3: La construction du graphe G' .

Définition 13. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Le graphe $G' = (V', E')$ a pour sommets $V' = V \times \{0, 1\}$ et pour ensemble d'arêtes E' , avec E' défini comme suit :

- le sous-graphe induit $G[V \times \{0\}]$ est isomorphe à G (par l'isomorphisme qui envoie v sur $(v, 0)$);
- le sous-graphe induit $G[V \times \{1\}]$ est isomorphe à G^3 (par l'isomorphisme qui envoie v sur $(v, 1)$);
- pour tout $u, v \in V$ tel que $0 \leq d_G(u, v) \leq 2$, les sommets $(u, 0)$ et $(v, 1)$ sont adjacents dans G' .

La troisième condition doit se comprendre comme l'ajout, entre les sommets de $V \times \{0\}$ et ceux de $V \times \{1\}$, d'arêtes en correspondance avec celles de G^2 , plus des arêtes $\{(u, 0), (u, 1)\}$ pour chaque sommet u de V . Une abstraction de notre construction est présentée sur la Figure 3. On notera que construire G^2 et G' demande seulement la connaissance de la matrice des distances dans G , d'où une construction des deux graphes possible en temps $\tilde{O}(n^\alpha)$ [64]. Par ailleurs, il est utile d'observer que le nombre de sommets dans G^2 et G' est du même ordre de grandeur $\Theta(n)$ que dans G .

Nous sommes finalement en mesure d'énoncer notre résultat majeur de la Section :

Théorème 14. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe qui satisfait la Condition 1. Alors G est 1/2-hyperbolique si, et seulement si, G' et G^2 sont sans C_4 (induit), où G' représente le graphe de la Définition 13.

La preuve du Théorème 14 est rédigée en annexe dans la Section B.

À noter que les graphes sans C_4 peuvent être reconnus en temps $O(n^{\alpha+1})$, ce qui est donc le terme dominant pour la complexité de notre algorithme [66]. En comparaison, on ne sait pas calculer l'hyperbolicité moins qu'en temps $O(n^{\frac{5+\alpha}{2}})$ [33]. En prenant $\alpha = 2.3727$, la complexité dans le pire des cas de notre algorithme est ainsi $n^{\frac{3-\alpha}{2}} = n^{0.31365}$ fois mieux que celle de l'algorithme dans [33].

4.2 Complexité et Discussion

Notre algorithme en Section 4.1 a beau avoir amélioré la meilleure complexité en temps connue pour décider si un graphe est 1/2-hyperbolique, le

coût du temps de calcul reste très important en comparaison de l’algorithme en temps linéaire pour les *block graphs*. Pareille situation amène à se demander si la reconnaissance des graphes d’hyperbolicité $1/2$ est intrinsèquement plus difficile que celle des graphes 0-hyperboliques. La question reste ouverte. Mais la Proposition 15 tendrait à prouver que c’est le cas. Notons que cette réduction était déjà connue par la communauté [37, 72]. Toutefois, à notre connaissance, sa preuve, bien que simple, n’a jamais été formellement rédigée dans un article :

Proposition 15. *Il existe une réduction en temps linéaire du problème de reconnaissance des graphes sans C_4 à celui des graphes $1/2$ -hyperboliques.*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un graphe non dirigé. Nous construisons le graphe $G' = (V', E')$ à partir de G en lui ajoutant un sommet universel $u \notin V$. Formellement : $V' = V \cup \{u\}$, et $E' = E \cup \{\{u, v\} : v \in V\}$. On observe que, par construction, le diamètre de G' est au plus 2. Donc, $\delta(G') \leq 1$ d’après le Lemme 5.

D’après le Théorème 12, G' est $1/2$ -hyperbolique si, et seulement si, tous les cycles de taille 4 ou au moins 6 dans G' sont pontés, et aucun des graphes de la Figure 2 n’est un sous-graphe isométrique de G' . Or, tous les cycles de taille au moins 6 ont pour diamètre au moins 3, et tous les graphes de la Figure 2 ont un diamètre strictement plus grand que 2. Il s’ensuit qu’ils ne peuvent pas être des sous-graphes isométriques d’un graphe de diamètre 2.

Finalement G' est $1/2$ -hyperbolique si, et seulement si, G est sans C_4 . \square

À noter également qu’il a été prouvé dans [31] que le calcul de l’hyperbolicité est au moins aussi dur que celui du diamètre d’un graphe. Cependant, la réduction des auteurs requiert des graphes pondérés, là où des graphes non pondérés suffisent pour la nôtre. En outre, des algorithmes en temps (sous-)cubique existent pour le problème du diamètre, alors qu’aucun n’est connu à l’heure actuelle pour la reconnaissance des graphes sans quadrangle.

Dans le cas des graphes à largeur d’arborescence bornée, la Section D propose une méthode pour rendre linéaire notre algorithme.

5 Applications aux Graphes Planaires Extérieurs

L’approche classique pour résoudre des problèmes difficiles consiste à se contraindre à des familles de graphes dont la structure peut être mieux exploitée. Souvent il s’agit de graphes aux propriétés ”géométriques” ; un choix qui a du sens quand on considère les graphes des réseaux comme des installations matérielles. Un graphe est planaire si, et seulement si, il peut

être plongé dans le plan sans qu'aucune arête n'en intersecte une autre, sauf éventuellement en leurs extrémités. En particulier, tous les cycles et les grilles sont planaires. Donc l'hyperbolicité de cette classe de graphes n'est pas bornée (Lemmes 6 et 7). La représentation d'un graphe planaire dans le plan est une carte planaire.

Les graphes planaires extérieurs sont une célèbre sous-famille de graphes planaires, à la base d'algorithmes d'approximation pour les graphes planaires généraux [2] : ils consistent en ceux pour lesquels il existe une carte planaire dont tous les sommets sont sur un même cercle C et dont toutes les arêtes sont contenues dans le disque délimité par C ; nous appellerons ce genre de carte planaire un *plongement planaire extérieur*. De manière analogue, il s'agit des graphes dont la planarité est préservée quand on leur ajoute un sommet universel u . D'après le Théorème de Kuratowski, cette deuxième caractérisation implique qu'un graphe est planaire extérieur si, et seulement si, il est $(K_4, K_{2,3})$ -minor free [69]. Puisqu'une carte planaire peut être calculée en temps linéaire [67], elle entraîne également un algorithme en temps linéaire pour calculer un plongement planaire extérieur.

Nous présenterons dans cette Section un algorithme en temps linéaire pour le calcul de l'hyperbolicité dans les graphes planaires extérieurs, basé sur les résultats des sections précédentes. La reconnaissance des graphes planaires extérieurs qui sont 1/2-hyperboliques est traitée à part. Puis dans le reste des cas, nous décomposons le graphe selon ses arêtes-séparatrices (cas particulier des cliques-séparatrices), jusqu'à ce qu'on obtienne les faces de la carte planaire comme atomes. Alors, les résultats sur l'hyperbolicité des cycles peuvent s'appliquer. Nous utilisons finalement l'arbre dual (*weak dual*) afin de prendre en compte les quadruplets du type $(a|b_1, b_2, b_3)$ (voir la Section 3 pour rappel de la notation).

Le plus gros des preuves est omis, et elles peuvent être retrouvées dans la Section C.

5.1 L'Algorithme

Comme annoncé, nous montrerons le résultat suivant :

Théorème 16. *Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire extérieur connexe. La valeur $\delta(G)$ est calculable en temps linéaire.*

D'abord, on rappelle que décider si G a pour hyperbolicité 0 se fait en temps linéaire. On montre en annexe (Section C) que la caractérisation du Théorème 12 implique un algorithme en temps linéaire pour reconnaître les graphes planaires extérieurs qui sont 1/2-hyperboliques. Aussi, dans la

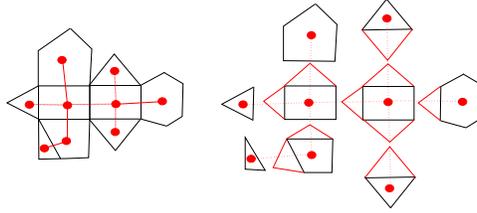


FIG. 4: Un exemple de graphe planaire extérieur avec son arbre dual (en rouge). Les substituts des atomes sont donnés à droite.

suite, on supposera G biconnexe et $\delta(G) \geq 1$. On observe que les faces d'un plongement planaire extérieur de G sont exactement ses cycles isométriques, et également ses atomes (définis en Section 3). Donc la décomposition de G selon ses cliques-séparatrices minimales est calculable en temps linéaire.

Reste à obtenir la valeur exacte pour $\delta(G)$ par la méthode de substitution des atomes, qu'on a défini en Section 3.3. Dans le cas où l'atome est un cycle, son substitut s'obtient par l'ajout de sommets dont le voisinage est une unique arête du cycle d'origine (voir la Section C.2 pour une définition plus formelle). Les substituts peuvent être calculés en temps linéaire grâce à l'arbre dual de G , noté T_G . Ses sommets sont les atomes de G , et deux atomes sont adjacents dans T_G si, et seulement si, ils partagent une arête-séparatrice.

Une preuve est donnée en annexe mais, intuitivement, une arête-séparatrice dans un atome C doit être complétée (dans le substitut) par un sommet dont elle est le voisinage si, et seulement si, il y a un sommet dans G séparé de C par cette arête et à égale distance de ses deux extrémités. Cela vient de ce que si le sommet séparé a est plus proche d'une extrémité x de l'arête-séparatrice que de l'autre, alors les sommets de C ne distinguent pas a de x (e.g. tous les chemins vers a peuvent passer par x). Soit donc une arête séparatrice $e = \{x, y\}$ dans C , et soit C' l'unique cycle isométrique de G à partager cette arête avec C . Clairement, si C' est de longueur impaire, alors il existe un sommet dans C' diamétralement opposé à e , et donc l'arête e doit être complétée par un sommet dans le substitut de C . Sinon, C' est de longueur paire, et il faut considérer l'arête e' diamétralement opposée à e dans C' . Par une application récursive de l'argument précédent, on trouve dans ce cas que e doit être complétée par un sommet dans le substitut de C si, et seulement si, e' est aussi une arête-séparatrice, et qu'elle est complétée par un sommet dont elle est le voisinage dans le substitut de C' .

Ainsi, nous pouvons enraciner T_G en un atome arbitraire C_r , puis nous démarrons un parcours en profondeur depuis C_r et, pour chaque cycle isométrique visité C nous procédons comme suit :

- pour chaque descendant C' de C dans l'arbre, nous visitons d'abord

- le sous-arbre enraciné en C' ;
- soit e l'unique arête-séparatrice commune à C et C' ;
- si C' est de longueur impaire, alors on complète e dans le substitut de C par un sommet dont elle est le voisinage ;
- sinon, soit e' l'arête diamétralement opposée à e dans C' ;
- on complète e par un sommet dans le substitut de C si, et seulement si, e' a été complétée de même dans le substitut de C' .

L'algorithme ci-dessus est correct, mais il est incomplet puisque, pour chaque atome de G autre que la racine C_r , il demeure une arête-séparatrice pour laquelle nous n'avons pas encore conclu, à savoir : celle entre l'atome et son parent dans l'arbre (T_G, C_r) . Cependant, puisque le substitut de C_r est complètement connu dès la première étape, ces informations manquantes sont aisément obtenues à l'aide d'un parcours en largeur de T_G depuis C_r .

Finalement, pour chaque cycle isométrique C de G , on calcule l'hyperbolicité de son substitut, et on retourne pour $\delta(G)$ la valeur maximum calculée. L'idée est d'énumérer les quadruplets du cycle pour lesquels $\delta(C)$ est atteint, et de vérifier pour chacun d'eux si la valeur $\delta(C)$ peut être localement augmentée, en remplaçant un ou plusieurs des sommets du quadruplet par des sommets voisins (ajoutés pendant la construction du substitut). On aboutit à un calcul de l'hyperbolicité du substitut de C en temps $O(n_c)$, où n_c désigne la longueur du cycle (voir Section C) Comme la somme des tailles de chaque atome est d'ordre linéaire dans un graphe planaire extérieur (ce sont les faces d'une carte planaire de G), on en déduit un temps linéaire pour cette dernière étape de calcul. Les détails techniques sont traités plus avant en annexe.

5.2 Discussion et Approximation pour les Graphes Planaires

L'algorithme de la Section 5.1 est un premier pas vers une résolution efficace du problème de l'hyperbolicité dans les graphes planaires généraux. Nous espérons pouvoir en déduire une approximation de l'hyperbolicité pour ces graphes, voire un algorithme exact. Cette méthodologie est celle suivie par de nombreux algorithmes d'approximation pour les graphes planaires [2]. Les graphes planaires extérieurs sont à la base, notamment, d'algorithmes efficaces pour la résolution du problème des plus courts chemins dans un graphe planaire [34], selon une décomposition qui a été généralisée ensuite aux autres graphes [44]. Cette utilisation de la "décomposition en hamac" (*hammock decomposition* [34]) pour le calcul de plus courts chemins suggère qu'elle est compatible avec l'aspect *métrique* du graphe, donc avec le calcul de l'hyperbolicité. Enfin, en certains cas, les auteurs ont montré qu'il importait surtout d'obtenir une décomposition en des sous-graphes de faible lar-

geur d'arborescence [30], ce qui donne aussi un intérêt nouveau aux résultats préliminaires de la Section D. Les pistes ci-dessus sont parmi mes prochains sujets de recherche.

6 Conclusion

Pendant ce stage, j'ai montré qu'un grand nombre de cliques-séparatrices dans un graphe aidait à décroître le temps de calcul de son hyperbolicité. Ce résultat structural est une nouvelle application de la décomposition inventée par Tarjan dans [68]. Sur le plan théorique, la méthode donne une preuve différente de l'hyperbolicité bornée de nombreuses classes de graphes [14, 36, 52], qui n'utilise pas la cordalité comme en [72]. En pratique, elle a permis de sérieusement réduire la taille des graphes de l'Internet considérés dans [21]. La décomposition gagnerait à être expérimenté sur d'autres *complex networks*, par exemple les cartes routières étudiées dans [45].

Par ailleurs, j'ai montré l'équivalence, à une réduction près (en temps sous-cubique), entre les problèmes de reconnaissance des graphes 1/2-hyperboliques et des graphes sans cycle induit de taille 4. Cette nouvelle caractérisation des graphes 1/2-hyperboliques offre pour résultat surprenant que les six sous-graphes isométriques interdits qui ont été mis en évidence dans [3, 46] ne sont en fait que des quadrangles déguisés dans une version modifiée du graphe de départ, où les perturbations engendrées par les distances ont été prises en compte. L'algorithme de reconnaissance obtenu par la réduction, de complexité temporelle $O(n^{1+\alpha}) = O(n^{3,3727})$, est théoriquement plus efficace que l'algorithme de [33] pour le calcul de l'hyperbolicité dans le cas général.

Finalement, j'ai pu combiner les deux résultats principaux des Sections précédentes pour aboutir à un algorithme en temps linéaire pour le calcul de l'hyperbolicité dans les graphes planaires extérieurs. Transformer cet algorithme en une méthode efficace (exacte ou approchée) du calcul de l'hyperbolicité dans les graphes planaires généraux est un des objectifs majeurs de la poursuite de mes recherches dans ce domaine.

Les travaux de mon stage vont faire l'objet de publications.

Références

- [1] Richard P Anstee and Martin Farber. On bridged graphs and cop-win graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 44(1) :22–28, 1988.

- [2] Brenda S Baker. Approximation algorithms for np-complete problems on planar graphs. *Journal of the ACM (JACM)*, 41(1) :153–180, 1994.
- [3] Hans-Jürgen Bandelt and Victor Chepoi. 1-hyperbolic graphs. *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, 16(2) :323–334, 2003.
- [4] Hans-Jürgen Bandelt and Victor Chepoi. Metric graph theory and geometry : a survey. *Contemporary Mathematics*, 453 :49–86, 2008.
- [5] Hans-Jürgen Bandelt, Anja Henkmann, and Falk Nicolai. Powers of distance-hereditary graphs. *Discrete Mathematics*, 145(1) :37–60, 1995.
- [6] Hans-Jürgen Bandelt and Henry Martyn Mulder. Distance-hereditary graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 41(2) :182–208, 1986.
- [7] Sergio Bermudo, H. Fernau, José M Rodríguez, and José M Sigarreta. Discretization and small values of the hyperbolicity constant in graphs. *Submitted*.
- [8] Sergio Bermudo, José M Rodríguez, José M Sigarreta, and W. Carballosa. On the hyperbolicity of edge-chordal and path-chordal graphs. *Submitted*.
- [9] Sergio Bermudo, José M Rodríguez, José M Sigarreta, and Jean-Marie Vilaire. Gromov hyperbolic graphs. *Discrete Mathematics*, 313(15) :1575–1585, 2013.
- [10] Hans L Bodlaender. Planar graphs with bounded treewidth. *RUU-CS*, (88-14), 1988.
- [11] Hans L Bodlaender. Discovering treewidth. In *SOFSEM 2005 : Theory and Practice of Computer Science*, pages 1–16. Springer, 2005.
- [12] M. Boguna, F. Papadopoulos, and D. Krioukov. Sustaining the Internet with Hyperbolic Mapping. *Nature Communications*, 1(62), Oct 2010.
- [13] John Adrian Bondy and Uppaluri Siva Ramachandra Murty. *Graph theory with applications*, volume 290. Macmillan London, 1976.
- [14] G. Brinkmann, J. H. Koolen, and V. Moulton. On the hyperbolicity of chordal graphs. *Annals of Combinatorics*, 2001.
- [15] Walter Carballosa, Domingo Pestana, José M Rodríguez, and José M Sigarreta. Distortion of the hyperbolicity constant of a graph. *the electronic journal of combinatorics*, 19(1) :P67, 2012.
- [16] J. Chalopin, V. Chepoi, P. Papasoglu, and T. Pecatte. Cop and robber game and hyperbolicity. *ArXiv e-prints*, August 2013.

- [17] Jérémie Chalopin, Victor Chepoi, Nicolas Nisse, and Yann Vaxès. Cop and robber games when the robber can hide and ride. *Siam Journal on Discrete Mathematics*, 25(1) :333–359, 2011.
- [18] Shiva Chaudhuri and Christos D Zaroliagis. Shortest path queries in digraphs of small treewidth. In *Automata, Languages and Programming*, pages 244–255. Springer, 1995.
- [19] V. Chepoi, F. F. Dragan, B. Estellon, M. Habib, and Y. Vaxès. Notes on diameters, centers, and approximating trees of delta-hyperbolic geodesic spaces and graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 31 :231–234, 2008.
- [20] Victor Chepoi and Bertrand Estellon. Packing and covering δ -hyperbolic spaces by balls. In *Approximation, Randomization, and Combinatorial Optimization. Algorithms and Techniques*, pages 59–73. Springer, 2007.
- [21] N. Cohen, D. Coudert, and A. Lancin. Exact and approximate algorithms for computing the hyperbolicity of large-scale graphs. Rapport de recherche RR-8074, INRIA, September 2012.
- [22] Don Coppersmith and Shmuel Winograd. Matrix multiplication via arithmetic progressions. *Journal of symbolic computation*, 9(3) :251–280, 1990.
- [23] Bruno Courcelle. The monadic second-order logic of graphs. i. recognizable sets of finite graphs. *Information and computation*, 85(1) :12–75, 1990.
- [24] Fabien de Montgolfier, Mauricio Soto, and Laurent Viennot. Treewidth and hyperbolicity of the internet. In *Network Computing and Applications (NCA), 2011 10th IEEE International Symposium on*, pages 25–32. IEEE, 2011.
- [25] Jean De Rumeur. *Communications dans les réseaux de processeurs*. Masson, 1994.
- [26] Reinhard Diestel. Graph theory, gtm 173, 2005.
- [27] Yon Dourisboure and Cyril Gavaille. Tree-decompositions with bags of small diameter. *Discrete Mathematics*, 307(16) :2008–2029, 2007.
- [28] A. Dress, K. Huber, J. Koolen, V. Moulton, and A. Spillner. *Basic Phylogenetic Combinatorics*. Cambridge University Press, 2012.
- [29] R. Duan and S. Pettie. Fast algorithms for (max, min)-matrix multiplication and bottleneck shortest paths. In C. Mathieu, editor, *SODA*, pages 384–391, New York, NY, USA, January 2009. SIAM.

- [30] David Eppstein. Subgraph isomorphism in planar graphs and related problems. In *Proceedings of the sixth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 632–640. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1995.
- [31] Wenjie Fang. On hyperbolic geometry structure of complex networks. 2011.
- [32] Martin Farber and Robert E Jamison. On local convexity in graphs. *Discrete Mathematics*, 66(3) :231–247, 1987.
- [33] H. Fournier, A. Ismail, and A. Vigneron. Computing the Gromov hyperbolicity of a discrete metric space. Technical Report arXiv :1210.3323, ArXiv, October 2012.
- [34] Greg N Frederickson. Planar graph decomposition and all pairs shortest paths. *Journal of the ACM (JACM)*, 38(1) :162–204, 1991.
- [35] Cyril Gavoille and Olivier Ly. Distance labeling in hyperbolic graphs. In *Algorithms and Computation*, pages 1071–1079. Springer, 2005.
- [36] Fanica Gavril. Algorithms on clique separable graphs. *Discrete Mathematics*, 19(2) :159–165, 1977.
- [37] Mauricio Abel Soto Gomez. *Quelques propriétés topologiques des graphes et applications à internet et aux réseaux*. PhD thesis, 2011.
- [38] M. Gromov. Hyperbolic groups. *Essays in Group Theory*, 8 :75–263, 1987.
- [39] Johann Hagauer and Sandi Klavzar. Clique-gated graphs. *Discrete Mathematics*, 161(1) :143–149, 1996.
- [40] John E. Hopcroft and Robert Endre Tarjan. Dividing a graph into triconnected components. *SIAM Journal on Computing*, 2(3) :135–158, 1973.
- [41] Edward Howorka. On metric properties of certain clique graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 27(1) :67–74, 1979.
- [42] E. Jonckheere and P. Lohsoonthorn. A hyperbolic geometric approach to multipath routing. *Conference on Control and Automation*, 2002.
- [43] Edmond Jonckheere and Poonsuk Lohsoonthorn. Geometry of network security. In *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, volume 2, pages 976–981. IEEE, 2004.
- [44] Dimitris J Kavvadias, Grammati E Pantziou, Paul G Spirakis, and Christos D Zaroliagis. Hammock-on-ears decomposition : A technique for the efficient parallel solution of shortest paths and other problems. *Theoretical Computer Science*, 168(1) :121–154, 1996.

- [45] W Sean Kennedy, Onuttom Narayan, and Iraj Saniee. On the hyperbolicity of large-scale networks. *arXiv preprint arXiv :1307.0031*, 2013.
- [46] J. H. Koolen and V. Moulton. Hyperbolic bridged graphs. *Eur. J. Comb.*, 23(6) :683–699, 2002.
- [47] Adrian Kosowski, Bi Li, Nicolas Nisse, and Karol Suchan. k-chordal graphs : From cops and robber to compact routing via treewidth. In *Automata, Languages, and Programming*, pages 610–622. Springer, 2012.
- [48] Pierre de La Harpe and Etienne Ghys. *Sur les groupes hyperboliques d’apres Mikhael Gromov*. 1990.
- [49] Renu Laskar and Douglas Shier. On powers and centers of chordal graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 6(2) :139–147, 1983.
- [50] Hanns-Georg Leimer. Optimal decomposition by clique separators. *Discrete Mathematics*, 113(1) :99–123, 1993.
- [51] Daniel Lokshantov. Finding the longest isometric cycle in a graph. *Discrete Applied Mathematics*, 157(12) :2670–2674, 2009.
- [52] Scott McCullough. 2-chordal graphs. In *Contributions to Operator Theory and its Applications*, pages 143–192. Springer, 1988.
- [53] J. Michel, J. M. Rodríguez, J. M. Sigarreta, and M. Villeta. Hyperbolicity and parameters of graphs. *Ars Combinatoria*, 100 :43–63, 2011.
- [54] Malte Müller. Connected tree-width. *arXiv preprint arXiv :1211.7353*, 2012.
- [55] O. Narayan and I. Saniee. The Large Scale Curvature of Networks. *ArXiv e-prints*, July 2009.
- [56] Kenichi Oshika. *Discrete Groups.*, volume 207. AMS Bookstore, 2002.
- [57] F. Papadopoulos, D. Krioukov, M. Boguna, and A. Vahdat. Greedy forwarding in scale-free networks embedded in hyperbolic metric spaces. *SIGMETRICS Performance Evaluation Review*, 37(2) :15–17, 2009.
- [58] Ana Portilla, José M Rodríguez, and Eva Tourís. Gromov hyperbolicity through decomposition of metrics spaces ii. *The Journal of Geometric Analysis*, 14(1) :123–149, 2004.
- [59] Neil Robertson, Paul Seymour, and Robin Thomas. Quickly excluding a planar graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 62(2) :323–348, 1994.
- [60] José M Rodríguez and Eva Tourís. Gromov hyperbolicity through decomposition of metric spaces. *Acta Mathematica Hungarica*, 103(1-2) :107–138, 2004.

- [61] José M Rodríguez and Eva Tourís. Gromov hyperbolicity of riemann surfaces. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 23(2) :209–228, 2007.
- [62] Donald J Rose. Triangulated graphs and the elimination process. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 32(3) :597–609, 1970.
- [63] Petra Scheffler. A linear algorithm for the pathwidth of trees. In *Topics in combinatorics and graph theory*, pages 613–620. Springer, 1990.
- [64] Raimund Seidel. On the all-pairs-shortest-path problem in unweighted undirected graphs. *Journal of Computer and System Sciences*, 51(3) :400–403, 1995.
- [65] Valeriu P Soltan and Vo D Chepoi. Conditions for invariance of set diameters under d-convexification in a graph. *Cybernetics and Systems Analysis*, 19(6) :750–756, 1983.
- [66] Jeremy P Spinrad. Finding large holes. *Information Processing Letters*, 39(4) :227–229, 1991.
- [67] Roberto Tamassia and Ioannis G Tollis. Planar grid embedding in linear time. *Circuits and Systems, IEEE Transactions on*, 36(9) :1230–1234, 1989.
- [68] R. E. Tarjan. Decomposition by clique separators. *Discrete Mathematics*, 55(2) :221 – 232, 1985.
- [69] Carsten Thomassen. Kuratowski’s theorem. *Journal of Graph Theory*, 5(3) :225–241, 1981.
- [70] Eva Tourís. Graphs and gromov hyperbolicity of non-constant negatively curved surfaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 380(2) :865–881, 2011.
- [71] Ryuhei Uehara. Tractable and intractable problems on generalized chordal graphs. *IEIC Technical Report (Institute of Electronics, Information and Communication Engineers)*, 98(685) :1–8, 1999.
- [72] Y. Wu and C. Zhang. Hyperbolicity and chordality of a graph. *Electr. J. Comb.*, 18(1), 2011.

A Compléments à la Section 3

A.1 Preuves pour la Section 3.1

Comme annoncé dans la Section 3.1, nous nous proposons de caractériser sous quelles conditions nécessaires l’hyperbolicité $\delta(G)$ est uniquement atteinte par un quadruplet de type $(a|b_1, b_2, b_3)$. En d’autres termes, nous

études sous quelles conditions notre algorithme de la Section 3.1 induit une erreur additive sur la valeur de l'hyperbolicité, puis nous majorons cette erreur.

Il est utile pour la suite d'observer que, lorsqu'on mesure les distances d'un sommet u aux sommets X dans une clique, alors on trouve au plus deux distances différentes : soit la distance minimale $d(u, X)$, soit la distance $d(u, X) + 1$. Aussi :

Lemme 17. *Étant donné un quadruplet de type $(a|b_1, b_2, b_3)$, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ soit $x_i \in X$ sur un plus court chemin entre a et b_i , et soit $m = d(a, X)$. Si nous ajoutons dans G un nouveau sommet v_a , avec une arête entre v_a et chacun des $x \in X$ tels que $d(a, x) = m$, alors $\delta(a, b_1, b_2, b_3) = \delta(v_a, b_1, b_2, b_3)$.*

Démonstration. Comme X est une clique, $d(a, x_i) \in \{m, m+1\}$ est satisfait pour n'importe quel i . En conséquence, $d(a, b_i) + d(b_j, b_k) = (m + d(v_a, b_i) - 1) + d(b_j, b_k)$, où $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$, ce qui prouve le résultat annoncé. \square

Ce lemme ci-dessus nous indique que nous pouvons restreindre notre étude aux plus courts chemins entre a et b_i qui empruntent un sommet de X à distance exactement $d(a, X)$ de a . Une fois cette condition imposée, $d(a, X)$ ne joue plus aucun rôle dans le calcul de $\delta(a, b_1, b_2, b_3)$. Par conséquent :

Claim 1. *Nous pouvons supposer tous les sommets de A adjacents à un sommet de X .*

Dans la suite, on écrira toujours S_i pour la somme $d(a, b_i) + d(b_j, b_k)$, avec $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

Poussons plus loin notre diminution des cas à considérer. Bien qu'il puisse advenir qu'aucun voisin de a dans X (au sens de la réduction du Lemme 17) soit à la fois emprunté par un plus court chemin entre a et b_i et par un autre plus court chemin entre a et b_j (pour $i \neq j$), nous montrerons avec le Lemme 18 qu'un cas pareil n'a pas besoin d'être pris en compte pour notre caractérisation.

Lemme 18. *Soit X une $(A|B)$ -clique séparatrice de G .*

Étant donné un quadruplet du type $(a|b_1, b_2, b_3)$, supposons sans perte de généralité $S_1 \geq S_2 \geq S_3$.

Soit $x_2 \in X$ tel que $d(a, b_2) = d(a, x_2) + d(x_2, b_2)$ et $d(a, x_2) = d(a, X)$.

*Si $\delta(a, b_1, b_2, b_3) \geq \delta(x_2, b_1, b_2, b_3) + 1/2$, alors $S_1 > S_2 = S_3$.
En outre, l'inégalité ci-dessus entraîne $d(a, b_1) = d(a, x_2) + d(x_2, b_1)$.*

Démonstration. Rappelons que d'après le Lemme 17, il existe $x_1, x_2, x_3 \in X$ tel que, pour tout $i = 1, 2, 3$: $d(a, b_i) = d(a, x_i) + d(x_i, b_i)$,
et sans perte de généralité d'après le Claim 1 : $d(a, x_i) = d(a, X) = 1$.

Soit $\varepsilon_i = d(x_2, b_i) - d(x_i, b_i)$, $i = 1, 2, 3$.

Observons que $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$,

et $\varepsilon_i = 0$ si, et seulement si, x_2 est sur un plus court chemin entre a et b_i .

En particulier, on a que $\varepsilon_2 = 0$.

Nous pouvons réécrire $d(a, b_i) = d(x_2, b_i) + 1 - \varepsilon_i$

et ainsi, $S_i = d(a, b_i) + d(b_j, b_k)$

$= d(x_2, b_i) + d(b_j, b_k) + 1 - \varepsilon_i$

$= S'_i + 1 - \varepsilon_i$,

avec $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$, et S'_1, S'_2, S'_3 les trois sommes obtenues depuis S_1, S_2, S_3 en substituant a par x_2 .

En d'autres termes, S'_1, S'_2, S'_3 sont les trois sommes nécessaires au calcul de $\delta(x_2, b_1, b_2, b_3)$.

Puisque nous supposons ici

$S_1 \geq S_2 \geq S_3$ et $\delta(a, b_1, b_2, b_3) > 0$,

nous obtenons que $S'_1 = \max_{i=1,2,3} S'_i$.

Plus précisément :

- Si $S'_2 \geq S'_3$, alors $\delta(a, b_1, b_2, b_3) = \delta(x_2, b_1, b_2, b_3) - \varepsilon_1/2 \leq \delta(x_2, b_1, b_2, b_3)$.
- Si $S'_3 > S'_2$, alors $\varepsilon_3 = 1$ car $S_2 \geq S_3$, ce qui implique $S_2 = S_3$.

Ceci, en retour, entraîne que $\delta(x_2, b_1, b_2, b_3) = (S'_1 - S'_3)/2$

$= (S_1 - 1 + \varepsilon_1 - S_3)/2$

$= (S_1 - S_2)/2 - (1 - \varepsilon_1)/2$

$= \delta(a, b_1, b_2, b_3) - (1 - \varepsilon_1)/2$

$\leq \delta(a, b_1, b_2, b_3)$.

□

Le Lemme 18 prouve ainsi que, pour n'importe quel quadruplet de type $(a|b_1, b_2, b_3)$: soit il existe deux indices distincts $i, j \in \{1, 2, 3\}$ et un sommet $x \in X$ qui est à la fois emprunté par un plus court chemin entre a et b_i et par un autre plus court chemin entre a et b_j , ou bien la valeur $\delta(a, b_1, b_2, b_3)$ est majorée par $\delta(G[B \cup X])$. En outre, comme la condition nécessaire sur les trois sommes implique $S_2 = S_3$, il vient que le raisonnement du Lemme 18 s'applique aussi au sommet b_3 et à x_3 . Ce dont on déduit que pour tous les quadruplets du type $(a|b_1, b_2, b_3)$ qui sont potentiellement à prendre en compte pour la valeur de l'hyperbolicité, on peut toujours trouver un sous-ensemble de taille *deux* de la clique-séparatrice X (voisin de a au sens de la réduction du Lemme 17), de sorte qu'il existe toujours un plus court chemin entre a et n'importe quel b_i , $i = 1, 2, 3$, qui passe par un de ces deux

sommets. Par ailleurs, un et un seul des b_i doit être à égale distance des deux sommets de cette sous-clique.

Finale­ment, nous terminons cette section en mettant à profit les résultats précédents, et nous montrons que la contribution de *tout* quadruplet de type $(a|b_1, b_2, b_3)$ peut être bornée supérieurement de même, à une constante additive près. Plus précisément, le Lemme 19 montre que $\delta(a, b_1, b_2, b_3) \leq \delta(G[B \cup X]) + 1/2$:

Lemme 19. *Soit X une $(A|B)$ -clique séparatrice de G , et soit $x \in X$ tel que $d(a, x) = d(a, X)$. On a que $\delta(a, b_1, b_2, b_3) \leq \delta(x, b_1, b_2, b_3) + 1/2$.*

Démonstration. Rappelons que nous pouvons supposer sans perte de généralité $d(a, X) = 1$ (cf. la réduction plus haut). Dans une telle situation, tous les $b \in B$ satisfont $d(x, b) \leq d(a, b) \leq d(x, b) + 1$. En conséquence, tous les triplets $b_1, b_2, b_3 \in B$ satisfont de même $(d(a, b_1) + d(b_2, b_3) - d(a, b_2) - d(b_1, b_3)) / 2 \leq 1/2 + (d(x, b_1) + d(b_2, b_3) - d(x, b_2) - d(b_1, b_3)) / 2$. \square

La Section 3 donne une construction qui prouve que la borne supérieure est atteinte.

A.2 Preuves pour la Section 3.2

Cette Section est dévolue à la preuve du Théorème 10. On rappelle brièvement les outils dont nous disposons grâce à la Section précédente.

Nous avons prouvé avec le Lemme 19 que lorsque X est une $(A|B)$ -clique séparatrice de G , et quand $x \in X$ est à distance $d(a, X)$ du sommet $a \in A$, alors $\delta(a, b_1, b_2, b_3) \leq \delta(x, b_1, b_2, b_3) + 1/2$.

Rappelons que nous pouvons aussi supposer sans risque que $d(a, X) = 1$ d'après le Lemme 17.

Nous prouverons à présent que si $a, b, c, d \in V$ appartiennent à des atomes différents de la décomposition, et que tous les chemins entre eux passent par les sommets d'un atome A , alors $\delta(a, b, c, d) \leq \delta(G[A]) + 1$.

Puisque $\delta(G)$ est un paramètre positif, tout quadruplet a, b, c, d tel que $\delta(a, b, c, d) \leq 1$ satisfait trivialement $\delta(a, b, c, d) \leq \delta(G[A]) + 1$ pour *n'importe* quel atome A arbitrairement choisi. Par conséquent, nous ne nous intéresserons dans cette Section qu'aux propriétés des quadruplets a, b, c, d tels que $\delta(a, b, c, d) > 1$, ce qui est équivalent à $\delta(a, b, c, d) \geq \frac{3}{2}$. La localisation de ces quadruplets s'avère utile pour un calcul aussi efficace que possible de $\delta(G)$.

Nous commencerons par deux propriétés structurelles très simples, que doivent nécessairement satisfaire de tels quadruplets, et qui permettront de simplifier les preuves à venir.

Claim 2. Soit $\delta(a, b, c, d) \geq 3/2$, et soit X une clique-séparatrice pour G . Alors on a : $|X \cap \{a, b, c, d\}| \leq 1$.

Démonstration. Par l'absurde. Sans perte de généralité supposons $a, b \in X$. D'après le Lemme 5 on a $\delta(a, b, c, d) \leq d(a, b) \leq 1$, ce qui contredit $\delta(a, b, c, d) \geq 3/2$. \square

Claim 3. Soit $\delta(a, b, c, d) \geq 3/2$, et soit X une clique-séparatrice pour G . Alors il existe une composante connexe C de $G \setminus X$ telle que $|C \cap \{a, b, c, d\}| \geq 3$.

Démonstration. D'après le Claim 2, X contient au plus un élément de a, b, c, d . Deux cas sont à présent à distinguer :

Si $|X \cap \{a, b, c, d\}| = 1$, alors aucune composante connexe C de $G \setminus X$ ne peut contenir exactement un élément de $\{a, b, c, d\}$, puisque sinon le Lemme 9 pourrait être appliqué à $C \cup X$ et $V \setminus C$. Par conséquent, il existe une composante contenant les trois éléments restants.

Si $|X \cap \{a, b, c, d\}| = 0$, alors en raison du Lemme 9 et comme précédemment, aucune composante connexe C de $G \setminus X$ ne peut contenir exactement deux éléments de $\{a, b, c, d\}$. De même, si deux d'entre elles, appelons-les C, C' , contiennent exactement un élément de $\{a, b, c, d\}$, alors le Lemme 9 pourrait être appliqué à $C \cup C' \cup X$ et $V \setminus (C \cup C')$, ce qui entraînerait ici encore $\delta(a, b, c, d) \leq 1$. Ainsi, il doit exister une composante connexe C de $G \setminus X$ telle que $|C \cap \{a, b, c, d\}| \geq 3$. \square

Nous nous attarderons quelques instants sur une autre propriété élémentaire, mais essentielle, qui est celle selon laquelle les sommets dans une clique ne peuvent pas être séparés pendant la clique-décomposition. En effet, on observe qu'étant données deux cliques X_1, X_2 , avec X_2 une clique-séparatrice, alors ou bien $X_1 \subseteq X_2$, ou bien il existe une unique composante connexe C de $G \setminus X_2$ telle que $X_1 \setminus X_2 \subseteq C$. Cette propriété de non-séparation s'avèrera cruciale dans les preuves qui suivent. Rappelons également que, dans le second cas (i.e. $X_1 \setminus X_2 \subseteq C$), nous disons que les sommets de $V \setminus (C \cup X_2)$ sont séparés de X_1 par X_2 .

Le coeur du reste de la preuve consiste à présent à montrer :

- d'une part, que si l'erreur pour notre algorithme de la Section 3.1 est d'au moins 1 sur la valeur de l'hyperbolicité, alors les quatre sommets de n'importe quel quadruplet maximal doivent être dans *quatre* atomes différents (trois atomes ne suffisent pas) ;

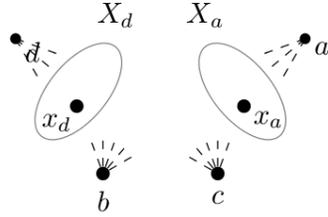


FIG. 5: Une illustration du Lemme 20.

- d'autre part, qu'il ne joue en rien, sur la valeur de l'hyperbolicité, qu'un sommet dans un quadruplet maximal soit séparé des autres par une seule clique-séparatrice ou par au moins deux cliques-séparatrices distinctes.

Pour ce qui est du premier point, nous avons déjà montré avec le Lemme 19 que lorsqu'il existe une $(a|b, c, d)$ -clique séparatrice X_a , on a toujours $\delta(a, b, c, d) \leq \delta(x_a, b, c, d) + 1/2$, avec $x_a \in X_a$ un voisin de a (au sens de la réduction du Lemme 17). Dans un premier temps, nous allons renforcer ce résultat :

Lemme 20. Soit $\delta(a, b, c, d) \geq 3/2$.

Supposons l'existence de deux cliques-séparatrices X_a, X_d dans G telles que :

- X_a sépare a de b, c, d ;
- et X_d sépare d de a, b, c .

Alors on peut trouver $x_a \in X_a, x_d \in X_d$ tels que :

$$\delta(a, b, c, d) \leq \delta(x_a, b, c, x_d) + 1/2.$$

Démonstration. Nous convenons dans la suite que $\{T_1, T_2, T_3\} = \{S_1, S_2, S_3\}$ avec $T_1 \geq T_2 \geq T_3$ et S_1, S_2, S_3 les trois sommes associées au calcul de $\delta(a, b, c, d)$. S'il existe un sommet $x_a \in X_a$ tel que $\delta(a, b, c, d) \leq \delta(x_a, b, c, d)$, alors par le Lemme 19 on obtient un sommet x_d qui satisfait l'énoncé du Lemme.

Sinon, soit $T_2 = d(a, u_2) + d(u_1, u_3)$, avec $\{u_1, u_2, u_3\} = \{b, c, d\}$, et choisissons un sommet $x_a \in X_a$ tel que $d(a, u_2) = d(a, x_a) + d(x_a, u_2)$ et $d(a, x_a) = d(a, X_a)$.

Nous rappelons qu'un tel sommet x_a existe toujours d'après le Lemme 17, et que nous pouvons supposer $d(a, X_a) = 1$ d'après le Claim 1.

Comme $\delta(a, b, c, d) \geq \delta(x_a, b, c, d) + 1/2$ par hypothèse, nous obtenons que :

$\delta(a, b, c, d) = \delta(x_a, b, c, d) + 1/2$ d'après les Lemmes 17 et 19,
et que $T_1 > T_2 = T_3$ d'après le Lemme 18.

Soient T'_1, T'_2, T'_3 les trois sommes obtenues depuis T_1, T_2, T_3 par la substitution de a par x_a ; en d'autres termes, ce sont les trois sommes nécessaires au calcul de $\delta(x_a, b, c, d)$.

D'après le Lemme 18 il vient que :

$$d(a, u_1) = d(a, x_a) + d(x_a, u_1) = 1 + d(x_a, u_1)$$

et ainsi, $T'_1 = T_1 - 1, T'_2 = T_2 - 1$.

De plus, puisque $T_3 = T_2$ et $\delta(a, b, c, d) = \delta(x_a, b, c, d) + 1/2$, nous avons également $T'_3 = T_3$.

Ce résultat implique $T'_1 \geq T'_3 > T'_2$.

Par ailleurs, rappelons que a, b, c ne sont pas séparés par X_d d'après le Claim 3. En conséquence, X_a n'est pas séparée de a, b, c par X_d non plus. D'après le Lemme 18, comme la contrainte $T'_1 > T'_3 = T'_2$ n'est pas satisfaite, donc il existe $x_d \in X_d$ tel que $\delta(x_a, b, c, d) \leq \delta(x_a, b, c, x_d)$. \square

En d'autres termes, deux substitutions consécutives de sommets distincts dans le quadruplet a, b, c, d ne diminuent pas la valeur initiale $\delta(a, b, c, d)$ pour l'hyperbolicité de plus que $1/2$. Pour compléter ce résultat, il nous reste encore à prouver que, si une diminution est réellement obtenue par la substitution du sommet $u \in \{a, b, c, d\}$, alors substituer à son tour le sommet u' remplaçant u n'aggrave pas cette diminution. En d'autres termes, nous pourrions supposer que chaque sommet u du quadruplet est substitué au plus une fois. Afin de le prouver, nous présenterons dans la suite une méthode qui relie au quadruplet a, b, c, d un atome A de la clique-décomposition.

Claim 4. *Supposons qu'il existe une clique X qui sépare a de b, c, d . Alors il existe une clique X_a minimale pour l'inclusion qui vérifie cette propriété, et telle que pour toute clique X' , il existe un sommet dans $\{b, c, d\}$ qui n'est pas séparé de X_a par X' .*

Démonstration. D'abord, il est à noter que la contrainte de minimalité pour l'inclusion n'a pas à être vérifiée dans la preuve : en effet, si le reste des conditions sont satisfaites par une clique donnée, alors la minimalité par inclusion pourra s'obtenir en ne considérant qu'une sous-clique de celle-ci.

La preuve se fait par récurrence. Pour le cas de base, soit X_0 une clique qui sépare a de b, c, d et qui est minimale au sens de l'inclusion pour cette propriété. Une telle clique peut être obtenue avec un sous-ensemble de la clique X de l'énoncé.

Par récurrence, supposons que pour $i \geq 0$ on a pu construire une séquence de cliques deux-à-deux différentes, notées X_0, \dots, X_i et telles que, pour tout

$j = 0 \dots i$, X_j sépare b, c, d de a, X_0, \dots, X_{j-1} , et elle est minimale pour l'inclusion pour cette propriété.

Si X_i ne peut pas être séparée de b, c, d par l'utilisation d'une clique-séparatrice la preuve est terminée.

Sinon, soit X' une clique-séparatrice qui sépare b, c, d de X_i et qui est minimale pour l'inclusion pour cette propriété.

Clairement, on a que $X' \neq X_i$.

Nous prétendons à présent que $X' \neq X_j$ pour tout $j < i$.

La preuve se fait par l'absurde.

Supposons $X' = X_j$ pour un certain $j < i$.

D'après l'hypothèse de récurrence, tous les chemins entre b, c, d et $X_j \setminus X_i$ passent par X_i et donc, puisque X_j sépare b, c, d de X_i , nous obtenons que $X_i \cap X_j \neq \emptyset$. Mais alors il vient que tous les chemins entre b, c, d et $X_i \setminus X_j$ passent par $X_i \cap X_j$, c'est-à-dire $X_i = X_i \cap X_j$ par minimalité de X_i . Ceci entraîne $X_i \subseteq X_j = X'$, ce qui est une contradiction.

Nous pouvons prouver de même que $a \notin X'$. Par conséquent, on peut choisir $X_{i+1} = X'$.

Finalement, le résultat du Claim 4 tient à ce que le nombre de cliques possibles est fini. \square

Cette propriété du Claim 4 a pour objectif d'étendre la propriété de non-séparabilité d'une unique clique à plusieurs cliques à la fois. Nous le formalisons dans le lemme suivant :

Lemme 21. *Soit $\delta(a, b, c, d) \geq 3/2$. Supposons qu'il existe deux cliques-séparatrices X_a et X_d dans G telles que :*

- X_a sépare a de b, c, d ;
- X_d sépare d de a, b, c ;
- X_a et X_d satisfont toutes deux la condition du Claim 4.

Alors, pour toute clique-séparatrice X , il existe une composante connexe C de $G \setminus X$ telle que $X_a, X_d \subseteq C \cup X$.

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'il existe X telle que X_a et X_d sont séparées par X . Nous distinguerons deux cas.

D'abord, si $X \cap \{a, d\} \neq \emptyset$, alors sans perte de généralité nous supposons que $a \in X$. En particulier, on a que $b, c, d \notin X$ d'après le Claim 2. Par conséquent, les sommets b, c, d sont dans la même composante connexe de $G \setminus X$ d'après le Claim 3. Cela entraîne que $X_a \setminus X$ est dans la même composante que b, c, d d'après le Claim 4. Or, $X_d \setminus X$ est également dans cette composante, comme conséquence directe de ce que b et c, d ne sont

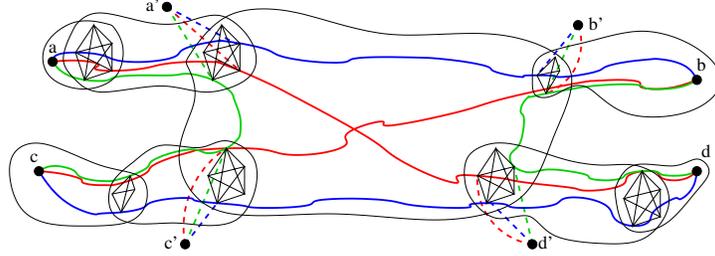


FIG. 6: Une illustration du Corollaire 24.

pas séparés par X . D'où finalement, on obtient que X_a et X_d ne sont pas séparés par X , ce qui est une contradiction.

Dans un second temps, nous supposons que $X \cap \{a, d\} = \emptyset$. Puisque X est un $(X_a|X_d)$ -séparateur par hypothèse, il vient que X sépare les sommets a et d . Mais alors, d'après le Claim 3, nous pouvons supposer sans perte de généralité que X sépare les sommets b, c, d de a . Et nous nous ramenons alors au cas précédent. \square

Afin de conclure quant à notre propriété étendue de non-séparabilité, le Lemme 21 aura besoin d'être renforcé dans la suite. Nous l'utiliserons avec la Propriété de Helly :

Lemme 22. *Soit $X_i, i = 1..k$, une collection de cliques. Supposons que pour toute clique-séparatrice X et pour tout $i \neq j$, il existe une composante connexe C de $G \setminus X$ telle que $X_i, X_j \subseteq C \cup X$. Alors il existe un atome A tel que $\bigcup_{i=1}^k X_i \subseteq A$.*

Démonstration. Quitte à simuler de manière gloutonne la clique-décomposition de G , on observera qu'il suffit de montrer que, pour toute clique-séparatrice X , on peut trouver une composante connexe C de $G \setminus X$ telle que $\bigcup_{i=1}^k X_i \subseteq C \cup X$. Aussi pouvons-nous ignorer sans risque tous les X_i qui sont contenus dans X . Soient X_i, X_j deux cliques qui ne sont pas contenues dans X . Par la propriété de non-séparabilité, on a qu'il existe une unique composante connexe C_i (resp. C_j) de $G \setminus X$ telle que $X_i \subseteq C_i \cup X$ (resp. $X_j \subseteq C_j \cup X$). Puisque par hypothèse, il existe au moins une composante connexe C de $G \setminus X$ telle que $X_i, X_j \subseteq C \cup X$, nous pouvons finalement conclure que $C = C_i = C_j$. \square

Nous sommes à présent en mesure de rassembler nos résultats dans le Corollaire 23 avant de conclure, avec le Corollaire 24, la preuve du Théorème 10.

Corollaire 23. Soit $\delta(a, b, c, d) \geq 3/2$. Étant donnée la décomposition du graphe G selon ses cliques-séparatrices minimales, il existe un atome A tel que, pour tout sommet $u \in \{a, b, c, d\}$, ou bien $u \in A$ ou bien il existe une clique-séparatrice $X_u \subseteq A$ qui sépare u de $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$.

Démonstration. Si le quadruplet a, b, c, d est contenu dans le même atome A , alors il n'y a rien à faire. Donc nous supposons dans la suite l'existence d'un sommet u et d'une clique-séparatrice associée X_u qui satisfait la condition du Claim 4. D'après le Lemme 21, pour tout sommet $v \in \{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$, nous pouvons associer à v une clique-séparatrice X_v inséparable de X_u , pourvu que v puisse être séparé des trois autres sommets. Considérons, au contraire, un sommet v qui ne peut pas être séparé de $\{a, b, c, d\} \setminus \{v\}$ par une clique. Par l'absurde, supposons qu'il existe une clique-séparatrice X qui sépare v de X_u .

Tout d'abord, si $u \in X$ alors on a que $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$ est dans une unique composante connexe de $G \setminus X$ d'après le Claim 3. En particulier, X_u n'est pas séparé de $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$ d'après le Claim 4. C'est une contradiction.

Deuxièmement, si $u \notin X$, alors il vient directement que X sépare v de u et ainsi, X sépare u de $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$ d'après le Claim 3. À nouveau, X_u n'est pas séparé de $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$ d'après le Claim 4. Une contradiction.

Par conséquent, le sommet v ne peut pas être séparé de X_u dans ce cas-là. Partant du principe qu'un unique sommet est un exemple trivial de clique (de taille 1), nous pouvons finalement conclure en appliquant la Propriété de Helly du Lemme 22. \square

Corollaire 24. Soit $\delta(a, b, c, d) \geq \frac{3}{2}$. Étant donnée la décomposition de G selon ses cliques-séparatrices minimales, il existe un atome A tel que $\delta(a, b, c, d) \leq \delta(G[A]) + 1$.

Démonstration. Choisissons A tel qu'il est défini dans le Corollaire 23. Nous procédons comme suit. Pour tout sommet $u \in \{a, b, c, d\}$, si u est déjà dans A alors nous le gardons. Sinon, d'après le Corollaire 23 il existe une clique-séparatrice $X_u \subset A$ qui sépare u de $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$, et nous substituons u par un sommet $x_u \in X_u$ (choisi selon des contraintes que nous allons déterminer dans la suite). Soit a', b', c', d' le quadruplet qu'on obtient. Il suffit à présent d'appliquer le Lemme 20 au plus deux fois, (par exemple) une fois pour choisir a', b' et une autre fois pour choisir c', d' , ce qui nous permet de trouver un quadruplet a', b', c', d' tel que $\delta(a, b, c, d) \leq \delta(a', b', c', d') + 2 \times (1/2) = \delta(a', b', c', d') + 1$. \square

À nouveau, cette borne est la meilleure possible, comme le montre l'exemple de la Fig. 7, et nous avons prouvé ce faisant le Théorème 10.

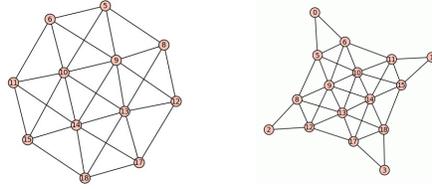


FIG. 7: Le graphe sur la gauche a pour hyperbolicité 1. L'addition des triangles (sur la droite) augmente la valeur de l'hyperbolicité de 1.

A.3 Preuves pour la Section 3.3

Grâce aux preuves des Sections A.1 et A.2, nous pouvons maintenant formaliser la notion de substitut des atomes, dont nous avons donné l'intuition dans la Section 3.3. Pour ce faire, nous procéderons en deux étapes.

D'abord, étant donnée une (unique) clique-séparatrice X , nous considérons chaque composante connexe B de $G[V \setminus X]$ séparément. Pour chacune d'entre elles, on se contente d'appliquer la réduction du Lemme 17 : chaque fois qu'il existe (au moins) un sommet $a \notin B \cup X$ tels que les sommets dans $X' \subseteq X$ sont ceux à distance $d(a, X)$ de a dans X , nous ajoutons dans $G[B \cup X]$ un sommet $v_{X'}$ qui est seulement adjacent aux sommets dans X' . Dans le pire des cas, on ajoute donc $|V \setminus (B \cup X)|$ sommets. Ce qui montre bien que le nombre de sommets ne peut que décroître (quand il est comparé au graphe G original). Nous noterons B^* la modification de $G[B \cup X]$ qui en résulte, et nous l'appellerons le *substitut* de B dans la suite.

Claim 5. Soit $G = (V, E)$ un graphe biconnexe tel que $\delta(G) \geq 1$, et soit X une clique-séparatrice pour G . Soient aussi B_1, \dots, B_k les composantes connexes de $G[V \setminus X]$. Alors $\delta(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{1, \delta(B_i^*)\}$.

Démonstration. Par construction, pour tout $1 \leq i \leq k$, l'inégalité $\delta(B_i^*) \geq \delta(G[B_i \cup X])$ est triviale. Par ailleurs d'après le Lemme 17, la valeur $\delta(B_i^*)$ est minorée par le maximum pris sur tous les $\delta(a, b_1, b_2, b_3)$, où $a \notin B_i$ et $b_1, b_2, b_3 \in B_i$. Nous rappelons que les quadruplets du type $(a_1, a_2 | b_1, b_2)$ n'ont aucune influence sur le résultat final d'après le Lemme 9. Il s'ensuit donc que $\delta(G) \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{1, \delta(B_i^*)\}$.

De plus, le Lemme 9 prouve également que pour tout $X_1, X_2 \subseteq X$ et pour tout $b_1, b_2 \in V(B_i^*)$, on a que $\delta(b_1, b_2, v_{X_1}, v_{X_2}) \leq 1$, puisque X est un $(b_1, b_2 | v_{X_1}, v_{X_2})$ -séparateur dans B_i^* . En conséquence, notre construction ne crée pas de quadruplets dont l'hyperbolicité est plus grande que $\delta(G)$. \square

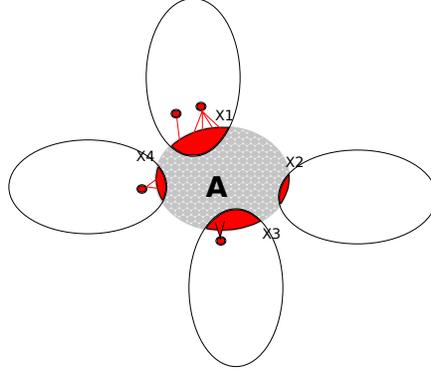


FIG. 8: Le substitut d'un atome.

Montrons à présent comment notre construction peut être généralisée aux atomes A . Comme indiqué dans la Section 3.3 nous avons besoin, pour ce faire, de connaître les cliques-séparatrices minimales qui ont été utilisées pendant la décomposition. Les algorithmes proposés dans [50, 68] nous le permettent sans avoir à payer de surcoût. Soit X une clique-séparatrice minimale de la décomposition, contenue dans A . Nous noterons B_X le substitut de la composante connexe de $G[V \setminus X]$ qui contient $A \setminus X$. Le substitut A^* de A s'obtient finalement comme l'union de tous les substituts B_X^* , où X est une clique-séparatrice minimale de la décomposition contenue dans A , moins les sommets dans $V \setminus A$ (voir la Figure 8).

Claim 6. Soit $G = (V, E)$ un graphe biconnexe tel que $\delta(G) \geq 1$, et soient A_1, \dots, A_k les atomes de G . Alors $\delta(G) = \max_{1 \leq i \leq k} \{1, \delta(A_i^*)\}$.

Démonstration. Soient a, b, c, d tels que $\delta(a, b, c, d) \geq 3/2$. D'après le Corollaire 23, il existe un atome A tel que, pour tout sommet $u \in \{a, b, c, d\}$, ou bien $u \in A$ ou bien il existe une clique-séparatrice $X_u \subseteq A$ qui sépare u de $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$. Nous considérons à présent le quadruplet a^*, b^*, c^*, d^* de A^* que nous définissons comme suit. D'abord, pour chaque sommet $u \in \{a, b, c, d\}$ qui est contenu dans A , nous sélectionnons $u^* = u$. Dans un second temps, si $u \notin A$, alors nous considérons une clique-séparatrice minimale $X'_u \subseteq A$, utilisée par l'algorithme de décomposition, et qui sépare u de A . Dans ce cas-là, nous prenons $u^* = v_{X'_u}$, où $X_u^* \subseteq X'_u$ représente les sommets dans X'_u qui sont à distance $d(u, X'_u)$ de u . D'après le Lemme 17 et le Claim 3, il s'ensuit que $\delta(A^*) \geq \delta(a^*, b^*, c^*, d^*) = \delta(a, b, c, d)$. Donc, l'inégalité $\delta(G) \leq \max_{1 \leq i \leq k} \{1, \delta(A_i^*)\}$ est satisfaite.

L'autre direction, qui sert à prouver qu'aucun quadruplet d'un substitut

tut n'a une valeur plus grande que $\delta(G)$ pour son hyperbolicité, peut être démontrée d'une manière quasiment similaire à ce qui a été fait pour le Claim 5. \square

A.4 Compléments pour la Discussion

Nous avons expliqué dans la Section 3.4 pourquoi notre travail ne s'étendait pas aux décompositions par des séparateurs de plus large diamètre que 1, même si les séparateurs employés sont isométriques. Le contre-exemple proposé était celui des graphes pontés, qui sont complètement décomposables par cette méthode, mais dont l'hyperbolicité peut être arbitrairement grande. Ce résultat est d'autant plus décevant que pour les graphes *cop-wins*, dont les graphes pontés font partie, la suppression d'un sommet dominé du graphe (ou *coin*) a des effets comparables sur l'hyperbolicité du graphe à ceux d'un sommet simplicial (cas particulier pris en compte par notre décomposition) :

Claim 7. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, et soient $x, y \in V$ tels que $N(x \cup \{x\}) \subseteq N(y) \cup \{y\}$ (le sommet x est dominé par le sommet y). Alors, pour tout $b_1, b_2, b_3 \in V \setminus \{x\}$, on a que $\delta(x, b_1, b_2, b_3) \leq \delta(y, b_1, b_2, b_3) + 1/2$. D'où : $\delta(G \setminus x) \leq \delta(G) \leq \delta(G \setminus x) + 1/2$.*

Démonstration. D'abord, puisque x est dominé par y , il vient que $G \setminus x$ est isométrique. Par ailleurs, pour tout $b \neq x$, la double-égalité $d(b, y) \leq d(b, x) \leq d(b, y) + 1$ est vérifiée. Le reste de la preuve est à présent similaire au Lemme 19. \square

Rappelons que tous les graphes *cop-wins* non triviaux possèdent un coin, dont la suppression préserve la nature *cop-win* du graphe. Cela signifie qu'en dépit de sa proximité évidente avec le Lemme 19, une utilisation répétée du Claim 7 pour décomposer un graphe peut conduire à une erreur arbitrairement importante sur la valeur réelle de l'hyperbolicité du graphe.

En revanche, la propriété plus forte de séparateur *gated* (toujours de diamètre borné) mène à une décomposition compatible avec le calcul de l'hyperbolicité. Un sous-ensemble $X \subseteq V$ est dit *gated* si, et seulement si, pour tout sommet $v \in V$, il existe un sommet $x_v \in X$ (que nous appelons la *porte* de v) tel que, pour tout sommet $x \in X$, x_v est sur un plus court chemin entre x et v . On notera que les quadruplets du type $(a|b_1, b_2, b_3)$ ne jouent aucun rôle dans le calcul de l'hyperbolicité si le $(A|B)$ -séparateur X est *gated* (le sommet a peut toujours être substitué par sa porte x_a). En particulier, lorsque toutes les cliques-séparatrices de notre graphe d'étude sont *gated*, alors notre méthode de décomposition retourne toujours la valeur exacte

pour l'hyperbolicité (sans avoir à recourir aux substituts). Cette condition suffisante est vérifiée pour tous les graphes *clique-gated*, soit une condition encore plus forte qu'on peut reconnaître en temps $O(nm)$ [39].

B Compléments à la Section 4

B.1 Puissances de Graphe et Hyperbolicité

Nous commencerons cette section par des résultats sur les puissances de graphe. Ce travail étend celui dans [5], pour lequel seuls les graphes distance-héréditaires avaient été considérés. Nous rappelons que la j^{eme} puissance d'un graphe $G = (V, E)$ est définie comme le graphe $G^j = (V, E_j)$, avec E_j l'ensemble des paires de sommets distincts qui sont à distance au plus j dans G . En particulier, $G^1 = G$. On montrera dans ce qui suit que la valeur de l'hyperbolicité $\delta_j = \delta(G^j)$ est intrinsèquement reliée à celle de $\delta_1 = \delta(G)$ (Proposition 25). Cette relation se déduit elle-même des relations qui existent entre distances dans G et distances dans G^j :

Claim 8. *Soit $G = (V, E)$ un graphe, et soit j un entier strictement positif. Pour tout $u, v \in V$, on a que : $d_{G^j}(u, v) = \lceil \frac{d_G(u, v)}{j} \rceil$.*

Démonstration. D'abord, nous rappelons qu'une arête dans G^j peut toujours être remplacée dans G par un chemin de taille au plus j . D'où l'inégalité $j \cdot d_{G^j}(u, v) \geq d_G(u, v)$, ce qui équivaut à ce que $d_{G^j}(u, v) \geq \frac{d_G(u, v)}{j}$. Or les distances dans un graphe sont des entiers, ce qui implique finalement que $d_{G^j}(u, v) \geq \lceil \frac{d_G(u, v)}{j} \rceil$.

Réciproquement, soit n'importe quel plus court chemin P entre u et v dans G . Pour tout $i \geq 1$ tel que $j \cdot i < d_G(u, v)$, on notera x_i l'unique sommet dans P qui est à distance $j \cdot i$ de u . Nous observons que $P' = u, x_1, \dots, x_i, \dots, v$ est un chemin dans G^j entre u et v . En conséquence, on a bien que : $d_{G^j}(u, v) \leq \lceil \frac{d_G(u, v)}{j} \rceil$. \square

Proposition 25. *Étant donné un entier strictement positif j , soit $\delta_j = \delta(G^j)$. On a que :*

$$\frac{\delta(G)+1}{j} - 1 \leq \delta_j \leq \frac{\delta(G)-1}{j} + 1.$$

Démonstration. Soit $a, b, c, d \in V$ n'importe quel quadruplet dans G . On rappelle la notation S_1, S_2, S_3 pour les trois sommes $d_G(a, b) + d_G(c, d)$, $d_G(a, c) + d_G(b, d)$ et $d_G(a, d) + d_G(b, c)$, qui sont à prendre en compte pour le calcul de $\delta_G(a, b, c, d)$. On les différenciera des sommes à considérer pour $\delta_{G^j}(a, b, c, d)$, en notant ces dernières S'_1, S'_2 , et S'_3 .

D'après le Claim 8, pour tout $u, v \in \{a, b, c, d\}$ on a que $d_{G^j}(u, v) = \lceil \frac{d_G(u, v)}{j} \rceil$; de plus, $\frac{d_G(u, v)}{j} \leq \lceil \frac{d_G(u, v)}{j} \rceil \leq \frac{d_G(u, v)}{j} + (1 - 1/j)$. En conséquence, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$ on a que $S_i/j \leq S'_i \leq S_i/j + 2(1 - 1/j)$.

Sans perte de généralité, on suppose que $S_1 \leq S_2 \leq S_3$. S'il existe un $i \in \{2, 3\}$ tel que $S'_i = \max\{S'_1, S'_2, S'_3\}$, alors on a que :

$$\delta_{G^j}(a, b, c, d) \leq (S'_i - S'_1)/2 \leq (S_i - S_1)/2j + 1 - 1/j \leq 1 - 1/j < 1.$$

Sinon, on a que :

$$\delta_{G^j}(a, b, c, d) \leq (S'_1 - S'_2)/2 \leq (S_1 - S_2)/2j + 1 - 1/j = \delta_G(a, b, c, d)/j + 1 - 1/j.$$

Par conséquent, $\delta_{G^j}(a, b, c, d) \leq \frac{\delta_G(a, b, c, d) - 1}{j} + 1$, d'où $\delta_j \leq \frac{\delta(G) - 1}{j} + 1$.

On impose à présent que $\delta_G(a, b, c, d) = \delta(G)$. Nous pouvons déjà observer que l'inégalité $\frac{\delta(G) + 1}{j} - 1 \leq \delta_j$ est trivialement satisfaite dès que $j \geq \delta(G) + 1$, puisque $\frac{\delta(G) + 1}{j} - 1 \leq 0$ dans ce cas-là. Aussi nous nous contraignons au cas non trivial où j est inférieur à $\delta(G) + 1$.

Par hypothèse, pour tout $i \in \{2, 3\}$ on a que : $S_1 \geq S_i + 2\delta(G)$,

et ainsi que : $S'_1 \geq S_1/j$

$$\geq S_i/j + 2\delta(G)/j$$

$$\geq S_i/j + 2(\delta(G) + 1)/j - 2/j$$

$$\geq S_i/j + 2(1 - 1/j)$$

$$\geq S'_i.$$

En conséquence de quoi : $\delta_{G^j}(a, b, c, d) = (S'_1 - \max\{S'_2, S'_3\})/2$

$$\geq (S_1/j - S_2/j - 2(1 - 1/j))/2$$

$$= \delta_G(a, b, c, d)/j + 1/j - 1.$$

Ce qui revient à ce que $\delta_j \geq \frac{\delta(G) + 1}{j} - 1$ est aussi satisfait dans ce cas-là. \square

Un des intérêts de la Proposition 25 est qu'elle pourrait conduire à une 4-approximation de l'hyperbolicité du graphe. En effet, si G est un graphe δ -hyperbolique, pour $\delta > 0$, alors on a que $G^{2\delta-1}$ est 1-hyperbolique, puisque alors $\frac{\delta-1}{j} < 1/2$. Réciproquement, si G^j est 1-hyperbolique pour un entier j donné, alors on a que $\frac{\delta(G)+1}{j} - 1 \leq 1$ et ainsi, G doit être $(2j - 1)$ -hyperbolique. Cela étant, un algorithme efficace pour les graphes d'hyperbolicité 1 doit encore être trouvé pour que nous puissions appliquer cette méthode.

J'ai dans l'idée qu'on pourrait passer outre ce problème, quitte à augmenter la constante multiplicative de l'approximation, en imposant une structure plus contrainte que seulement la 1-hyperbolicité. Par exemple, un de mes sujets de recherche est de déterminer, en fonction de $[7, 8]$, si quand G est un graphe δ -hyperbolique, on peut toujours trouver un entier $j = O(\delta)$ tel que G^j soit cordal. Notons que si G^j est cordal, alors il est également

1-hyperbolique d'après le Corollaire 11. J'étudie de même si la variante des graphes *cop-wins* explorée dans [17] pourrait contraindre suffisamment la structure des puissances du graphe G ; les résultats qui s'y trouvent ont récemment mené à une $O(1)$ -approximation pour l'hyperbolicité [16], mais pour une constante assez large, et qui n'exploite pas les puissances du graphe.

Nous utiliserons la Proposition 25 dans la suite sous une forme plus faible, énoncée comme suit :

Corollaire 26. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, et soit j un entier strictement positif. Si $\delta(G) \leq 1$, alors on a que : $\delta_j \leq \delta(G)$.*

Démonstration. Si G est 0-hyperbolique, alors G est un cactus de cliques biconnexe, c'est-à-dire un graphe complet, et il en est de même pour G^j . Si G est 1/2-hyperbolique, alors d'après la Proposition 25 on a que : $\delta_j \leq \frac{1/2-1}{j} + 1 < 1$; donc, G^j est 1/2-hyperbolique aussi. Finalement, quand $\delta(G) = 1$, on a d'après la Proposition 25 que $\delta_j \leq \frac{1-1}{j} + 1 = 1$. \square

Pourtant de célèbres familles de graphes 1-hyperboliques, à l'image des graphes cordaux, sont connues pour ne pas être stables par passage aux puissances du graphe [49]. Mais le Corollaire 26 raffine ce résultat : nous montrons que les puissances des graphes cordaux, bien qu'elles puissent ne pas être cordales, sont proches de cette famille de graphes pour la valeur de l'hyperbolicité.

B.2 Convexité dans les Graphes

La présente Section est une digression sur la caractérisation des graphes d'hyperbolicité 1/2 dans [3]. Celle-ci repose en fait sur deux caractérisations partielles, toutes deux nécessaires, et à elles deux suffisantes. Nous présenterons ici la première de ces caractérisations, sa relation avec le Théorème 12, plus un algorithme de reconnaissance associé.

Tout d'abord, nous devons définir des notions basiques en géométrie des graphes [4]. Soit $G = (V, E)$ un graphe quelconque. Pour tout couple de sommets $u, v \in V$, on définit *l'intervalle* $[u, v]$ comme l'ensemble des sommets dans V sur un plus court chemin entre u et v . Plus formellement : $[u, v] = \{x \in V : d(u, v) = d(u, x) + d(x, v)\}$. Pour chaque sommet $u \in V$, et pour tout entier positif k , nous définissons également la *boule* $B_k(u)$ comme l'ensemble des sommets qui sont à une distance au plus k de u . En d'autres termes : $B_k(u) = \{v \in V : d(u, v) \leq k\}$. Finalement, un sous-ensemble $X \subseteq V$ est dit *convexe* si, et seulement si, pour n'importe quel couple de sommets $u, v \in X$ on a que $[u, v] \subseteq X$. Cette condition est équivalente à ce

que tous les plus courts chemins entre n'importe quels deux sommets dans X sont entièrement contenus dans X . En particulier, V est trivialement convexe, et si X est convexe alors nécessairement $G[X]$ est isométrique.

La relation entre la convexité dans les graphes et les graphes d'hyperbolicité $1/2$ peut s'exprimer ainsi :

Proposition 27. (*[32, 65]*) *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Toutes les boules de G sont convexes si, et seulement si, tous les cycles dans G de longueur 4 ou au moins 6 sont pontés.*

La Proposition 27 est donc un exemple de condition nécessaire plus forte que la Condition 1. À ce titre, un algorithme de reconnaissance pour cette nouvelle condition pourrait être employé de même pour vérifier la Condition 1. La condition de la Proposition 27 est également nécessaire pour d'autres classes de graphes que les graphes $1/2$ -hyperboliques (par exemple, les graphes pontés [4]). Aussi, il apparaît intéressant de développer pour elle une sous-routine.

À cette fin, commençons par réduire le problème à celui du calcul des distances dans un graphe :

Proposition 28. *Il y a une réduction en temps quadratique du problème de décider si un sous-ensemble dans un graphe est convexe au calcul de la matrice des distances dans un graphe.*

Démonstration. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe, et soit $X \subseteq V$. Nous construisons le graphe $G' = (V, E')$ comme suit : Ce graphe est basé sur G , dont on retire toutes les arêtes aux deux extrémités dans X . En d'autres termes, $E' = \{\{u, v\} \in E : u \notin X \text{ ou } v \notin X\}$. On notera qu'ici, il se peut que G' ne soit pas connexe, auquel cas on supposera infinie la distance entre deux sommets qui ne sont pas connectés.

Ce que nous prétendons est que X est convexe si, et seulement si, pour toute paire $u, v \in X$, on a que $d_G(u, v) < d_{G'}(u, v)$. Pour le prouver, observons déjà que, par construction, tous les plus courts chemins dans G' entre deux sommets dans X sortent (au moins en partie) de X . En conséquence, si X est convexe alors il est nécessaire que pour tout $u, v \in X$, on a que $d_G(u, v) < d_{G'}(u, v)$. Réciproquement, supposons X non convexe, et soit P un plus court chemin entre deux sommets dans X qui n'est pas entièrement contenu dans X . Soit P' un sous-chemin maximal de P qui sort entièrement de X . Par définition de P' , les extrémités de P' ne sont pas des extrémités de P . Par conséquent, on peut trouver deux sommets $u, v \in P$ tels que chacun d'entre eux est adjacent à une extrémité de P' . De plus, u et v appartiennent

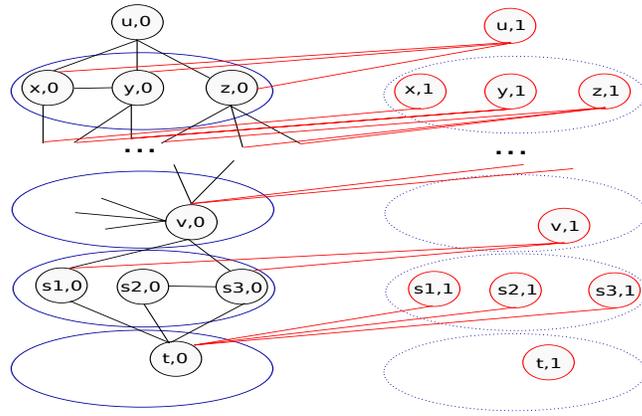


FIG. 9: La construction du graphe G_u .

tous deux à X par maximalité de P' . Et, comme u, P', v est un sous-chemin d'un plus court chemin P , c'est aussi un plus court chemin. En d'autres termes, $d_{G'}(u, v) = d_G(u, v)$, ce qui montre la réciproque.

Finalement, afin de décider si X est convexe, nous pouvons procéder comme suit. D'abord nous calculons les distances dans G . Ensuite, nous construisons G' en temps linéaire. Nous calculons les distances dans G' . Nous vérifions en temps $O(|X|^2)$ que pour tout $u, v \in X$ on a que $d_G(u, v) < d_{G'}(u, v)$. \square

Par soucis de compléter la Proposition 28, nous rappellerons que le calcul des distances dans un graphe peut être effectué en temps $\tilde{O}(n^\alpha)$ [64].

Nous terminerons cette section par un algorithme pour vérifier la condition de la Proposition 27 :

Théorème 29. *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. Décider si toutes les boules de G sont convexes peut être réalisé en temps $\tilde{O}(n^{\alpha+1})$.*

Démonstration. D'abord, remarquons que, puisqu'il existe $O(n^2)$ boules dans G , le Théorème 29 n'est pas un corollaire de la Proposition 28. En fait, il nous faut légèrement adapter la réduction de la Proposition 28, afin que nous puissions simultanément vérifier la convexité d'un nombre linéaire de boules.

Nous prétendons dans ce but que, pour tout sommet u , et pour tout entier strictement positif k , si $B_{k-1}(u)$ est convexe alors $B_k(u)$ est convexe si, et seulement si, tous les plus courts chemins entre deux sommets qui sont à distance *exactement* k de u sont contenus dans $B_k(u)$. La condition est clairement nécessaire, comme conséquence de la définition pour la convexité. Pour prouver qu'elle est suffisante, il suffit d'observer que $B_k(u) \setminus B_{k-1}(u)$ (c'est-à-dire : tous les sommets à une distance exactement k de u) est un $(B_{k-1}(u) | V \setminus B_k(u))$ -séparateur.

Pour chaque sommet $u \in V$, nous procédons à présent comme suit. Nous construisons le graphe $G_u = (V_u, E_u)$ en deux étapes. D'abord, nous

ajoutons un sommet v' pour chaque sommet v du graphe. Ensuite, nous connectons v' à tous les voisins x du sommet v qui sont plus loin de u que ne l'est v . Formellement :

- $V_u = V \times \{0, 1\}$;
- $G_u[V \times \{0\}]$ est isomorphe à G (par l'isomorphisme qui envoie $(v, 0)$ sur le sommet v) ;
- pour chaque sommet $v \in V$ on a que $N_{G_u}((v, 1)) = \{(x, 0) \in V \times \{0\} : \{v, x\} \in E \text{ et } d(u, x) = d(u, v) + 1\}$.

Finalement, nous vérifions que pour tout $k \geq 1$, et pour chaque couple de sommets x, y à une distance k de u , on a que $d_G(x, y) < d_{G_u}((x, 1), (y, 1))$. Le coût de toutes ces opérations, pour un sommet donné u , est borné supérieurement par le coût du calcul des distances dans les deux graphes G et G_u , c'est-à-dire $\tilde{O}(n^\alpha)$. Comme nous devons répéter le procédé pour chaque sommet du graphe, cela nous donne une complexité (au plus) n fois plus grande, soit : $\tilde{O}(n^{\alpha+1})$. \square

B.3 Preuves pour la Section 4.1

Cette Section est entièrement dévolue à la preuve du Théorème 14.

En guise de remarque préliminaire, on observera que puisque $\text{diam}(C_4) = 2$, tous les quadrangles induits dans un graphe sont des sous-graphes isométriques. Dit autrement, les notions de C_4 induit et de C_4 isométrique correspondent ; il n'y a pas de cycle induit de longueur 4 et ponté. D'après le Corollaire 26, si G est 1/2-hyperbolique, alors G^2 l'est aussi, ce qui implique G^2 est sans C_4 d'après le Théorème 12. Nous prouvons que de plus :

Claim 9. *Supposons le carré G^2 sans C_4 . Alors, C_6 , C_7 et les graphes (a),(b) de la Figure 2 ne sont pas des sous-graphes isométriques de G .*

Démonstration. Par l'absurde.

D'abord supposons qu'il y ait un cycle isométrique C de longueur 6 dans G . On peut trouver un quadruplet $a, b, c, d \in V(C)$ tel que : $d(a, b) = d(c, d) = 1$; $d(a, c) = d(b, d) = 2$; $d(a, d) = d(b, c) = 3$. Mais alors, un tel quadruplet induit un quadrangle dans G^2 d'après le Claim 8, ce qui est une contradiction.

De même, supposons qu'il y ait un cycle isométrique C de longueur 7 dans G . On peut trouver un quadruplet $a, b, c, d \in V(C)$ tel que : $d(a, b) = 2$ et $d(c, d) = 1$; $d(a, c) = d(b, d) = 2$; $d(a, d) = d(b, c) = 3$. Mais alors, un tel quadruplet induit aussi un quadrangle dans G^2 d'après le Claim 8. Une contradiction.

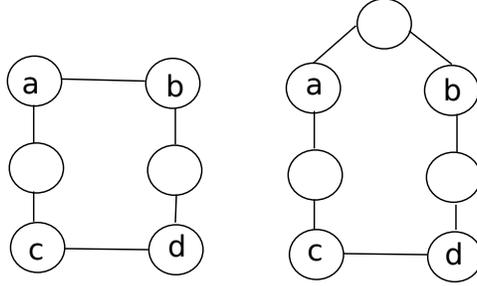


FIG. 10: C_4 induits dans G^2 depuis un C_6 ou un C_7 isométrique dans G .

Finalement, pour chacun des graphes $(a), (b)$ de la Figure 2, considérons le quadruplet de sommets qui sont représentés en gras. On peut aisément vérifier dans les deux cas qu'un tel quadruplet induit un C_4 dans le carré. Par conséquent, aucun des graphes $(a), (b)$ de la Figure 2 n'est un sous-graphe isométrique de G non plus. \square

Dans la suite, nous ne considérerons plus que le graphe G' de la Définition 13. D'abord, nous devons prouver que G' doit être sans C_4 pour que G soit 1/2-hyperbolique :

Lemme 30. *S'il y a un quadrangle induit dans G' , alors G n'est pas 1/2-hyperbolique.*

Démonstration. Soient $a, b, c, d \in V'$ tels que $G'[\{a, b, c, d\}]$ est un C_4 induit. Sans perte de généralité on supposera $d(a, b) = d(c, d) = 2$. Nous distinguons plusieurs sous-cas.

Si $a, b, c, d \in V \times \{0\}$, alors $G[\{a, b, c, d\}]$ est quadrangle induit également et donc, G n'est pas 1/2-hyperbolique d'après le Théorème 12.

Si $a, b, c, d \in V \times \{1\}$, alors $G^3[\{a, b, c, d\}]$ est aussi un cycle induit de longueur 4, d'où G^3 n'est pas 1/2-hyperbolique d'après le Théorème 12. Ceci implique que G n'est pas 1/2-hyperbolique d'après le Corollaire 26.

Pour tous les cas restants, nous prétendons qu'il n'y a aucun sommet $u \in V$ tel que $\{(u, 0), (u, 1)\} \subseteq \{a, b, c, d\}$. Cela vient de ce que $N_{G'}((u, 0)) \cup \{(u, 0)\} \subseteq N_{G'}((u, 1)) \cup \{(u, 1)\}$ ($(u, 1)$ domine $(u, 0)$). Nous pouvons donc écrire $(a, b, c, d) = ((u, i), (v, i'), (x, j), (y, j'))$, où $i, i', j, j' \in \{0, 1\}$ et les sommets u, v, x, y sont deux-à-deux distincts dans V .

Supposons $i = 0, i' = j = j' = 1$. Alors il vient que $\max\{d_G(u, x) + d_G(v, y), d_G(u, y) + d_G(v, x)\} \leq 2 + 3 = 5$, tandis que $d_G(u, v) + d_G(x, y) \geq 3 + 4 = 7$. En d'autres termes, $\delta(G) \geq \delta_G(u, v, x, y) \geq 1$.

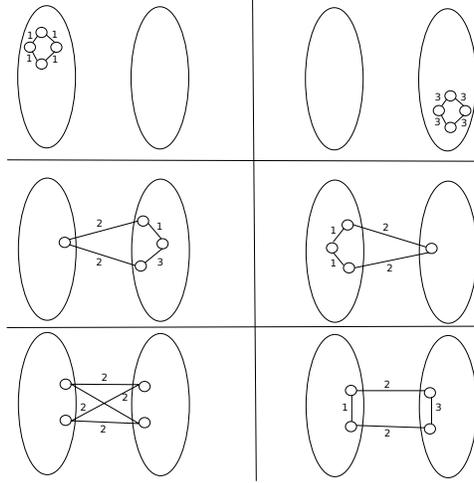


FIG. 11: Quadrangles possibles dans G' . Les poids sur les arêtes représentent les distances dans G .

Deuxièmement supposons $i = 1, i' = j = j' = 0$. En particulier, nous avons que $\{x, v\}, \{y, v\} \in E$ et ainsi, $d_G(x, v) = d_G(y, v) = 1, d_G(x, y) = 2$. Observons que $d_G(u, x) < 2$ ou $d_G(u, y) < 2$ entraînerait que $d_G(u, v) < 3$, d'où $\{a, b\} \in E'$, ce qui serait une contradiction. Donc, nous avons $d_G(u, x) = d_G(u, y) = 2$, donc $d_G(u, v) = 3$ et finalement, $\delta(G) \geq \delta_G(u, v, x, y) = (5 - 3)/2 = 1$.

À présent supposons $i = i' = 0, j = j' = 1$. Observons que $4 \leq d_G(x, y) \leq d_G(u, x) + d_G(u, y) \leq 2 + 2$, d'où l'on obtient $d_G(u, x) = d_G(u, y) = 2$. Par symétrie, nous avons aussi $d_G(v, x) = d_G(v, y) = 2$. Nous déduisons de façon similaire $d_G(x, y) = 4$. Alors il s'ensuit que $d_G(u, x) + d_G(v, y) = d_G(u, y) + d_G(v, x) = 4$, tandis que $d_G(u, v) + d_G(x, y) = d_G(u, v) + 4 \geq 6$. En d'autres termes, $\delta(G) \geq \delta(u, v, x, y) \geq 1$.

Finalement, supposons $i = j = 0, i' = j' = 1$. D'après la Définition 13, $d_G(u, x) + d_G(v, y) = 1 + d_G(v, y) \leq 4, d_G(u, y) + d_G(v, x) \leq 2 + 2 = 4$, tandis que $d_G(u, v) + d_G(x, y) \geq 3 + 3 = 6$. Donc, on a que $\delta(G) \geq \delta_G(u, v, x, y) \geq 1$. \square

L'étape finale est de prouver que, lorsque G' est sans C_4 , aucun des sous-graphes interdits restants (cf. Théorème 12) ne peut être un sous-graphe isométrique de G .

Lemme 31. *Supposons G' sans C_4 . Alors aucun des graphes C_4 et (c), (d), (e), (f) de la Figure 2 n'est un sous-graphe isométrique de G .*

Démonstration. Nous procédons par l'absurde. D'après la Définition 13, il est clair que puisque G' est sans C_4 , alors il en va de même pour G . Pour chacun des quatre autres graphes, nous ne considérerons que le quadruplet des sommets qui sont représentés en gras sur la Figure 2.

Considérons le graphe (c) de la Figure 2 comme un sous-graphe isométrique de G . Nous énumérons les quatre sommets du quadruplet dans l'ordre anti-horaire u, y, v, x , en démarrant du sommet u le plus en haut et à gauche sur le dessin. Observons que $d_G(u, x) = 1$, $d_G(u, y) = d_G(v, x) = 2$, $d_G(u, v) = d_G(x, y) = d_G(v, y) = 3$. Alors $(u, 0), (y, 1), (v, 1), (x, 0)$ induit un quadrangle dans G' . Une contradiction.

Dans les trois autres cas, nous énumérons toujours les quatre sommets dans l'ordre anti-horaire u, y, v, x , cette fois en partant du sommet le plus à gauche.

Considérons le graphe (d) sur la Figure 2 comme un sous-graphe isométrique de G . Observons que toutes les distances sauf $d_G(x, y)$ égalent 2, et que $d_G(x, y) = 4$. Par conséquent, $G'[\{(u, 0), (y, 1), (v, 0), (x, 1)\}]$ est un cycle de longueur 4. À nouveau, ce n'est pas possible.

Deuxièmement, considérons le graphe (e) de la Figure 2 comme un sous-graphe isométrique de G . Observons que $d_G(u, x) = d_G(x, v) = 2$, $d_G(u, v) = 4$, et toutes les distances restantes égalent 3. En conséquence, $G'[\{(u, 1), (y, 1), (v, 1), (x, 0)\}]$ est un C_4 induit, ce qui contredit que G' est sans C_4 .

Finalement, considérons le graphe (f) de la Figure 2 comme un sous-graphe isométrique de G . Les sommets $(u, 1), (y, 1), (v, 1), (x, 1)$ induisent un cycle sans corde de longueur 4 dans G^3 , donc dans G' , ce qui est une nouvelle fois une contradiction. \square

La preuve du Théorème 14 est ainsi complète, comme le Corollaire 26 et le Lemme 30 montrent que la condition est nécessaire, et que le Claim 9 et le Lemme 31 prouvent qu'elle est suffisante d'après le Théorème 12.

C Compléments à la Section 5

C.1 Graphes Planaires Extérieurs 1/2-hyperboliques

Le but de la Section C.1 est de prouver ce résultat :

Proposition 32. *Les graphes planaires extérieurs 1/2-hyperboliques peuvent être reconnus en temps linéaire.*

Nous verrons dans la Section D que ce résultat reste vrai dans le cas plus général où la largeur d'arborescence est bornée. Comme les graphes planaires extérieurs sont K_4 -minor free, leur largeur d'arborescence est bornée par 2 [10]. La Proposition 32 pourrait donc se déduire directement de la Section D. Néanmoins, une preuve plus naturelle est possible dans ce cas, qui exploite davantage la structure de ces graphes.

Nous commencerons par nous intéresser aux cycles isométriques dans un graphe planaire extérieur $G = (V, E)$. Sans perte de généralité, G est ici supposé biconnexe. En d'autres termes, un plongement planaire extérieur pour G consiste en un cycle non dirigé, avec un nombre arbitraire de cordes qui ne s'intersectent pas deux-à-deux. Par ailleurs, on observe que les cordes d'un tel cycle sont des cliques-séparatrices de taille 2, ce que nous avons appelé une arête-séparatrice. Comme un cycle isométrique dans un graphe doit nécessairement être contenu dans un unique atome (voir la Section 3 pour rappel de la définition), nous retrouvons le résultat précédemment évoqué dans la Section 5.1 :

Claim 10. *La clique-décomposition d'un graphe planaire extérieur $G = (V, E)$ a pour atomes des cycles non dirigés. En outre, ces cycles correspondent aux faces d'un plongement planaire extérieur de G , et ils sont exactement les cycles isométriques de G .*

D'après le Claim 10, puisqu'on obtient un plongement planaire extérieur en temps linéaire, il vient que la condition nécessaire de la Proposition 27, et donc la Condition 1 qui s'en déduit, peuvent être vérifiées en temps linéaire pour les graphes planaires extérieurs.

Nous supposons la condition de la Proposition 27 satisfaite dans la suite.

Lemme 33. *Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire extérieur dont toutes les boules sont convexes. G est 1/2-hyperbolique si, et seulement si, le graphe (a) sur la Figure 2 n'est pas un sous-graphe induit de G .*

Démonstration. D'après le Théorème 12, G est 1/2-hyperbolique si, et seulement si, aucun des graphes de la Figure 2 n'est un sous-graphe isométrique de G . En outre, les roues contiennent K_4 comme mineur, et les graphes (b), (c), (d), (e), (f) sur la Figure 2 contiennent tous une roue comme sous-graphe. Par conséquent, G ne contient aucun des sous-graphes (b), (c), (d), (e), (f) de la Figure 2 comme mineur, puisque K_4 -minor free. En d'autres termes, G est 1/2-hyperbolique si, et seulement si, le graphe (a) de la Figure 2 n'est pas un sous-graphe isométrique de G .

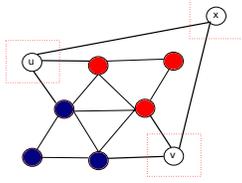


FIG. 12: Un mineur $K_{2,3}$ dans H' . Les arêtes du mineur sont tracées en gras. Les sommets coloriés et de même couleur doivent être contractés en un unique sommet.

À présent, nous prétendons que le graphe (a) sur la Figure 2 est un sous-graphe isométrique de G si, et seulement si, c'est un sous-graphe *induit* de G . Nous appellerons ce sous-graphe H dans le reste de la preuve. Clairement, tout sous-graphe isométrique est également induit. Réciproquement, supposons H induit mais ponté dans G . En particulier, il doit exister une paire de sommets u, v extrémales à distance 3 dans H telle que $d_G(u, v) = 2$. Soit $x \notin V(H)$ tel que $d_G(u, v) = d_G(u, x) + d_G(x, v)$, et soit $H' = G[V(H) \cup \{x\}]$. Nous sommes en mesure de montrer que H' contient $K_{2,3}$ comme mineur (voir la Figure 12), ce qui est absurde parce que G est $K_{2,3}$ -minor free par hypothèse. En conséquence, on a montré que toute copie induite de H dans G est isométrique. \square

Finalement, nous pouvons conclure par une application d'un résultat dans [30] : décider si un graphe planaire est sans H , pour H fixé, peut être effectué en temps linéaire.

C.2 Graphes Soleil

En premier lieu, nous ne considérerons qu'une classe spécifique de graphes planaires extérieurs, que nous nommerons *soleils*. Notre but est de prouver que calculer l'hyperbolicité pour un soleil peut être réalisé en temps linéaire. Nous en déduirons l'algorithme en temps linéaire pour le cas général dans la section suivante.

L'idée est qu'on a peu de quadruplets à considérer pour l'hyperbolicité, ce qui autorise une méthode de type *brute-force*. Pour le prouver, considérons d'abord un cycle C non dirigé. Nous caractérisons tous les quadruplets pour lesquels $\delta(C)$ est atteint.

Lemme 34. *Soit C un cycle à $n = 4p + r$ sommets, $0 \leq r \leq 3$. Il n'existe que $O(n)$ quadruplets a, b, c, d tels que $\delta(a, b, c, d) = \delta(C)$, et ils peuvent être*

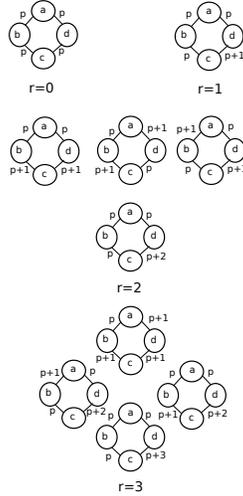


FIG. 13: L'ensemble des cas pour la preuve du Lemme 34.

énumérés en temps linéaire.

Démonstration. Rappelons que, d'après le Lemme 6, on a que $\delta(C) = p - 1/2$ si $r = 1$, et $\delta(C) = p$ sinon. Nous supposons dans le reste de la preuve qu'on a fixé une orientation arbitraire pour C . Soit a, b, c, d n'importe quel quadruplet tel que $\delta(a, b, c, d) = \delta(C)$. Sans perte de généralité, un parcours anti-horaire de C (défini suivant l'orientation choisie) donne l'ordre a, b, c, d pour ces sommets. Nous pouvons supposer sans perte de généralité (à une rotation près dans le plan) que $d(a, c) \geq d(b, d)$, et nous pouvons aussi supposer sans perte de généralité (à une symétrie près) que $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$ et $d(b, d) = d(a, b) + d(a, d)$.

Considérons maintenant $S_1 = d(a, b) + d(c, d)$, $S_2 = d(a, c) + d(b, d)$ et $S_3 = d(a, d) + d(b, c)$. On observera que $S_2 = 2d(a, b) + d(b, c) + d(a, d) = d(a, b) + (d(c, b) + d(b, a) + d(a, d)) \geq S_1$, et que $S_2 = S_3 + 2d(a, b)$. D'où, $S_2 = \max\{S_1, S_2, S_3\}$.

En outre, $d(a, c) \geq d(b, d)$ est à présent équivalent à ce que $d(b, c) \geq d(a, d)$. D'après l'inégalité triangulaire on a que $d(a, c) \leq d(a, d) + d(c, d)$ et ainsi, nous obtenons $d(c, d) \geq d(a, b)$.

On remarque que $\min\{d(a, b), d(b, c), d(c, d), d(a, d)\} \geq p - 1/2$ d'après le Lemme 5. Donc, $\min\{d(a, b), d(b, c), d(c, d), d(a, d)\} \geq p$, puisque toutes les distances sont des entiers positifs. De même on rappelle que $d(a, b) + d(b, c) + d(c, d) + d(a, d) = n$ par hypothèse. En particulier, quand $r = 0$, la

seule solution est que $d(a, b) = d(b, c) = d(c, d) = d(a, d) = p$.

Quand $r = 1$, la seule solution est $\max\{d(a, b), d(b, c), d(c, d), d(a, d)\} = \max\{d(b, c), d(c, d)\} = p + 1$, tandis que les trois autres distances dans $\{d(a, b), d(b, c), d(c, d), d(a, d)\}$ égalent p . Par ailleurs, puisque $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$, il vient que $d(c, d) = \max\{d(b, c), d(c, d)\} = p + 1$.

Quand $r = 2$, deux cas sont à prendre en compte : soit les deux plus grandes distances égalent $p + 1$ et les deux restantes sont égales à p , soit $\max\{d(b, c), d(c, d)\} = p + 2$ et les trois autres distances dans $\{d(a, b), d(b, c), d(c, d), d(a, d)\}$ valent p . Dans le premier cas, soit les deux plus larges distances sont $d(b, c)$ et $d(c, d)$, ou $d(b, c)$ et $d(a, d)$, ou $d(a, b)$ et $d(c, d)$; pour tous ces sous-cas, nous avons bien $\delta(a, b, c, d) = p$. Dans le second cas, un raisonnement similaire à celui déjà donné pour $r = 1$ montre que $\delta(a, b, c, d) = p - 1$. En conséquence de quoi, seul le premier cas mène à la valeur $\delta(C)$.

Finalement, quand $r = 3$, trois cas sont à considérer.

- D’abord supposons $d(b, c) = d(c, d) = \max\{d(a, b), d(a, d)\} = p + 1$ et $\min\{d(a, b), d(a, d)\} = p$. Puisque $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$, il vient que $\min\{d(a, b), d(a, d)\} = d(a, b)$. On a alors que $\delta(a, b, c, d) = (S_1 - S_3)/2 = ((4p + 2) - (2p + 2))/2 = p$.
- Deuxièmement, supposons $\max\{d(b, c), d(c, d)\} = p + 2$, la deuxième plus grande distance dans $\{d(a, b), d(b, c), d(c, d), d(a, d)\}$ vaut $p + 1$, et les deux distances restantes dans cet ensemble égalent p . Si $d(b, c) = \max\{d(b, c), d(c, d)\} = p + 2$, alors on a que $d(a, b) + d(b, c) \geq 2p + 2$ et $d(a, d) + d(c, d) \leq 2p + 1$. C’est absurde, car $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$. Donc, on a que $d(c, d) = p + 2$ et ainsi, $\max\{d(a, b), d(b, c)\} = p + 1$, tandis que $\min\{d(a, b), d(b, c)\} = d(a, d) = p$. À noter qu’on en déduit également $S_1 \geq 2p + 2$ tandis que $S_3 \leq 2p + 1$, d’où $S_1 \geq S_3$. Par conséquent, $\delta(a, b, c, d) = (S_2 - S_1)/2 = (2d(a, b) + d(b, c) + p - d(a, b) - p - 2)/2 = (d(a, b) + d(b, c) - 2)/2 = (2p - 1)/2 = p - 1/2$. Ceci implique clairement que $\delta(C) = p$ ne peut pas être atteint dans ce cas.
- Finalement, supposons $\max\{d(b, c), d(c, d)\} = p + 3$ et les trois autres distances dans $\{d(a, b), d(b, c), d(c, d), d(a, d)\}$ égales à p . Puisque $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$, il vient à nouveau que $\max\{d(b, c), d(c, d)\} = d(c, d)$. Ainsi, on obtient $\delta(a, b, c, d) = (S_2 - S_1)/2 = (4p - (2p + 3))/2 = p - 3/2$, ce qui est différent de $\delta(C) = p$.

Il est direct que, dès que les quatre distances $\{d(a, b), d(b, c), d(c, d), d(a, d)\}$ sont connues et fixées, il n’y a que $O(n)$ quadruplets dans C qui satisfont les contraintes requises sur leurs distances deux-à-deux. De plus, tous ces quadruplets sont énumérables par un simple parcours anti-horaire du graphe

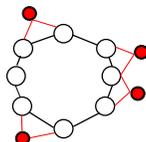


FIG. 14: Un soleil.

(défini selon son orientation arbitraire). En conséquence, l'énumération peut être réalisée en temps linéaire. \square

Une remarque utile est que, d'après le Lemme 6, calculer l'hyperbolicité pour un cycle est faisable en temps linéaire sans recourir à l'énumération du Lemme 34 : en effet, il suffit juste dans ce cas de calculer l'ordre du graphe, puis de le diviser par 4, et nous pouvons conclure. Considérons maintenant une légère extension de la classe des cycles, dont font partie les substituts des cycles en tant qu'atomes que nous avons mentionné en Section 5 :

Définition 35. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. G est un soleil s'il existe une bipartition $\{V_1, V_2\}$ de V telle que :

- $G[V_1]$ est un cycle C ;
- le voisinage de chaque sommet dans V_2 induit une arête dans C ;
- une arête de C est induite par le voisinage d'au plus un sommet.

Par ailleurs, C est appelé le cycle dominant de G .

Un exemple de soleil est présenté sur la Figure 14. Clairement, tout soleil est planaire extérieur. De plus, les atomes d'un soleil (Section 3) sont une union de triangles, plus son cycle dominant. Cela signifie que nous pouvons appliquer le Théorème 10 directement. Nous montrerons néanmoins que dans ce cas restreint, le résultat du Théorème 10 sur l'erreur additive sur l'hyperbolicité du graphe peut être amélioré :

Proposition 36. Soit $G = (V, E)$ un soleil, et soit C son cycle dominant. La double inégalité $\delta(C) \leq \delta(G) \leq \delta(C) + 1/2$ est satisfaite. De plus, $\delta(G)$ est calculable en temps linéaire.

Démonstration. Soit $\{V_1, V_2\}$ une bipartition de V telle que $G[V_1] = C$, dont on peut facilement observer qu'elle est unique. Remarquons, comme dit ci-dessus, que les atomes de G sont exactement C plus tous les $G[v \cup N_G(v)]$ avec $v \in V_2$; par ailleurs, pour tous les $v \in V_2$, $G[v \cup N_G(v)]$ est un triangle. En conséquence, on obtient $\delta(C) \leq \delta(G) \leq \delta(C) + 1$ d'après le Théorème 10.

Nous raisonnons à présent par l'absurde pour raffiner la borne supérieure. Nous prétendons que $\delta(G) = \delta(C) + 1$ entraînerait l'existence d'un $a \in V_1$

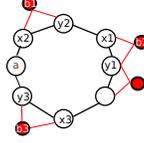


FIG. 15: Un quadruplet du type $(a|b_1, b_2, b_3)$.

et d'un triplet $b_1, b_2, b_3 \in V_2$ tel que $\delta(a, b_1, b_2, b_3) = \delta(C) + 1$. D'abord, par une application directe du Lemme 5 tout quadruplet a, b, c, d tel que $\delta(a, b, c, d) = \delta(C) + 1$ doit satisfaire $|\{a, b, c, d\} \cap V_2| \geq 3$; notre condition est donc nécessaire. Pour la partie suffisante, nous fixons au préalable une orientation pour C , que nous conserverons pour la suite de la preuve. Soient $b_i, b_j \in V_2$; on peut toujours écrire $N_G(b_k) = \{x_k, y_k\}$ pour tout $k \in \{i, j\}$, où $x_k y_k$ est un arc dans C (suivant l'orientation choisie). En tirant partie de cette convention, il peut être facilement vérifié que $d(b_i, b_j) = d(x_i, x_j) + 1 = d(y_i, y_j) + 1$. Par conséquent, pour tout quadruplet $b_1, b_2, b_3, b_4 \in V_2$, il s'en déduit l'existence d'un quadruplet $x_1, x_2, x_3, x_4 \in V_1$ tel que $\delta(b_1, b_2, b_3, b_4) = \delta(x_1, x_2, x_3, x_4) \leq \delta(C)$.

Finalement, soit $a \in V_1$ et soient $b_1, b_2, b_3 \in V_2$. Nous conservons les notations précédentes : une orientation arbitraire pour C est fixée, et pour tout i , nous avons $N_G(b_i) = \{x_i, y_i\}$, avec $x_i y_i$ un arc dans C (selon l'orientation choisie). Soient S_1, S_2, S_3 les trois sommes partie prenante dans le calcul de $\delta(a, b_1, b_2, b_3)$; soient S'_1, S'_2, S'_3 les trois mêmes sommes partie prenante dans le calcul de $\delta(a, x_1, x_2, x_3)$. Puisque pour tout i on a que $d(a, x_i) \leq d(a, b_i) \leq d(a, x_i) + 1$, il vient que $S'_i + 1 \leq S_i \leq S'_i + 2$. En conséquence, il s'ensuit que $\delta(a, b_1, b_2, b_3) \leq \delta(a, x_1, x_2, x_3) + 1/2 \leq \delta(C) + 1/2$. La borne supérieure est donc prouvée par contradiction.

Notre intérêt d'avoir réduit cette borne de $1/2$ n'est pas seulement théorique. En effet, considérons un quadruplet a, b, c, d tel que $\delta(a, b, c, d) = \delta(G)$. Chacun des sommets du quadruplet peut être remplacé par un sommet du cycle C : soit lui-même ou un de ses deux voisins dans C . On obtient un nouveau quadruplet $a', b', c', d' \in V_1$. Par ailleurs, soit $\delta(G) = \delta(C)$, soit $\delta(G) = \delta(C) + 1/2$ et alors : $\delta(C) + 1/2 = \delta(a, b, c, d) \leq \delta(a', b', c', d') + 1/2$ d'après le paragraphe précédent, ce qui entraîne $\delta(a', b', c', d') = \delta(C)$. En d'autres termes, nous pouvons restreindre notre étude aux quadruplets maximaux de C (ceux qui atteignent la valeur $\delta(C)$), et à leur voisinage dans V_2 .

Or, on observe que pour tout sommet du cycle $v \in V_1$, on a que $|N_G(v) \cap V_2| \leq 2$. D'après le Lemme 34, tous les quadruplets $a, b, c, d \in V_1$ tels que

$\delta(a, b, c, d) = \delta(C)$ peuvent être énumérés en temps linéaire. Donc, pour tous ces quadruplets-là, nous pouvons vérifier s'il est possible d'en augmenter localement la valeur de l'hyperbolicité de $1/2$, par la prise en compte de leur nombre (borné par 8) de voisins dans V_2 . On notera, pour être complet, que le calcul des distances peut se faire ici en temps constant, car les distances deux-à-deux pour les sommets dans a, b, c, d sont connues et fixées. Il s'en déduit finalement un algorithme en temps linéaire pour le calcul de l'hyperbolicité. \square

C.3 Preuves pour la Section 5.1

Nous rassemblons à présent les preuves des Sections C.1 et C.2 pour donner la preuve du Théorème 16, dont l'intuition et l'algorithme associé ont déjà été donnés dans la Section 5.1.

La preuve que les graphes planaires extérieurs d'hyperbolicité $1/2$ peuvent être reconnus en temps linéaire est l'objet de la Proposition 32. Nous pouvons donc effectivement supposer G biconnexe et $\delta(G) \geq 1$. Le Claim 10 formalise notre observation précédente selon laquelle la clique-décomposition d'un graphe planaire extérieur peut se calculer en temps linéaire. Nous en sommes donc ramenés à la preuve que les substituts des atomes peuvent être construits en temps linéaire.

Rappelons que d'après le Lemme 9, l'hypothèse $\delta(G) \geq 1$ entraîne que nous pouvons ignorer sans risque les quadruplets de type $(a_1, a_2|b_1, b_2)$ lors de la décomposition du graphe selon ses arêtes-séparatrices. De même que dans la Section A, nous nous intéressons à présent au cas où $\delta(G) > 1$.

Claim 11. *Soit $\delta(a, b, c, d) \geq \frac{3}{2}$. Il existe un cycle isométrique C dans G tel que, pour tout sommet $u \in \{a, b, c, d\}$, soit $u \in V(C)$, soit il existe une arête-séparatrice $\{x_u, y_u\} \in E(C)$ qui sépare u de $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$.*

Démonstration. D'après le Corollaire 23, il existe un atome A tel que pour tout sommet $u \in \{a, b, c, d\}$, soit $u \in A$ soit il existe une clique-séparatrice $X_u \subseteq A$ telle que X_u sépare u de $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$. Par ailleurs, d'après le Claim 10, un tel atome A est un cycle isométrique C de G . Il s'ensuit que les cliques maximum dans C sont les arêtes dans $E(C)$. En conséquence, chaque clique-séparatrice qui est contenue dans C est une arête-séparatrice. \square

Nous considérons à présent un cycle isométrique C de G qui satisfait la condition du Claim 11 pour le quadruplet a, b, c, d . D'après le Lemme 17 (et d'après la réduction du Claim 1), pour tout sommet $u \in \{a, b, c, d\}$, nous pouvons supposer sans perte de généralité (à une substitution de u près par

un sommet de C et qui ne change pas la valeur pour l'hyperbolicité) que s'il existe une arête-séparatrice $\{x_u, y_u\} \in E(C)$ qui sépare u de $\{a, b, c, d\} \setminus \{u\}$, alors on a : $d(u, x_u) = d(u, y_u) = 1$. En d'autres termes :

Claim 12. *Il existe un soleil G_S tel que $\delta(G) = \delta(G_S)$. En outre, le cycle dominant de G_S est isomorphe à un cycle isométrique de G .*

En fait, il est direct, d'après le Corollaire 36, que le soleil G_S du Claim 12 peut être supposé avoir son cycle dominant C_S isomorphe à un cycle isométrique de G d'hyperbolicité *maximum*. En pratique, le nombre d'atomes à considérer peut ainsi s'en trouver réduit. Reste à prouver que l'ensemble des choix possibles pour G_S peut s'énumérer en temps linéaire. Dans la Section 5.1, nous avons introduit dans ce but l'arbre dual (*weak dual*). Nous en rappelons ci-dessous la définition, dans une version plus formelle :

Définition 37. (*[2]*) *Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire extérieur biconnexe. Considérons un plongement planaire extérieur pour G , qui est contenu et délimité par un cercle C . Nous appelons faces intérieures toutes les faces du plongement qui sont contenues dans le disque délimité par C . Alors, l'arbre dual de G est un arbre T_G dont les sommets sont les faces intérieures du plongement ; deux faces intérieures sont adjacentes dans T_G si, et seulement si, elles ont en commun une arête-séparatrice dans le plongement planaire extérieur de G .*

Nous rappelons que la Figure 4 illustre la construction présentée dans la Définition 37. À noter également que, puisque un plongement planaire extérieur peut être obtenu en temps linéaire, alors il en est de même pour l'arbre dual de G .

Ce qui suit correspond à divers pré-traitements pour l'algorithme de la Section 5.1, tous réalisables en temps linéaire, et dont le résultat peut aussi être stocké pour utilisation ultérieure en n'utilisant qu'un espace de taille linéaire.

- D'une part, les arêtes dans T_G doivent toutes être étiquetées, de façon unique, par les arêtes-séparatrices de G .
- Nous supposons, d'autre part, que chaque sommet de l'arbre dual fournit un pointeur vers le cycle isométrique du graphe qu'il représente.
- On exige de pouvoir connaître la parité de la longueur d'un cycle isométrique en temps constant.
- Enfin, dans le cas où l'atome considéré est un cycle de longueur paire, on impose de pouvoir consulter en temps constant l'arête diamétralement opposée dans le cycle à n'importe quelle arête e de l'atome.

Toutes ces opérations peuvent être réalisées en temps et en espace linéaires, par un simple parcours de chaque face du plongement planaire extérieur. Ce faisant, nous avons complètement démontré la linéarité de notre algorithme.

Notre ultime étape sera de prouver la construction intuitive des substitués, que nous avons déjà mentionnée dans la Section 5.1. Nous la formalisons par le biais du Lemme 38 :

Lemme 38. *Soient C_1, C_2 deux cycles isométriques de G , qui ont en commun l'arête-séparatrice $e = \{x, y\}$. Soient A, B les deux composantes connexes de $G[V \setminus e]$ telles que $C_1 \subseteq A \cup e$ et $C_2 \subseteq B \cup e$. S'il existe un quadruplet de type $(a|b_1, b_2, b_3)$ tel que $\delta(a, b_1, b_2, b_3) > \delta(B)$, alors :*

- ou bien la longueur de C_1 est impaire ;
- ou bien l'arête $e' = \{x', y'\}$ qui est diamétralement opposée à e dans C_1 sépare a de C_1 .

De plus, dans ce dernier cas, soit C_0 l'unique cycle isométrique qui partage l'arête e' avec C_1 , et soient A', B' les deux composantes connexes de $G[V \setminus e']$ telles que $C_0 \subseteq A' \cup e'$ et $C_1 \subseteq B' \cup e'$. Alors a peut également être complété en un quadruplet du type $(a|b'_1, b'_2, b'_3)$ tel que $\delta(a, b'_1, b'_2, b'_3) > \delta(B')$.

Démonstration. Puisque l'arête e est une $(a|b_1, b_2, b_3)$ -clique-séparatrice, et que $\delta(a, b_1, b_2, b_3) > \max\{\delta(x, b_1, b_2, b_3), \delta(y, b_1, b_2, b_3)\}$ par hypothèse, il s'ensuit que $d(a, x) = d(a, y)$. Deux cas sont à considérer.

- Si $a \in C_1$, alors a est un sommet diamétralement opposé à e dans C_1 , ce qui implique que la longueur de C_1 est impaire.
- Supposons que $a \notin C_1$. Alors il existe une arête-séparatrice $e' = \{x', y'\} \in E(C_1)$ qui sépare a de C_1 (et de B).

Sans perte de généralité, $d(a, x') \leq d(a, y')$. Comme $d(a, x) = d(a, y)$ donc : soit e' est diamétralement opposée à e dans C_1 , soit $d(a, x') < d(a, y')$, ce dont on déduit $\delta(a, b_1, b_2, b_3) = \delta(x', b_1, b_2, b_3)$ (tous les plus courts chemins entre a et e peuvent passer par x'), ce qui nous ramène au cas précédent où $a \in C_1$.

Supposons donc e' diamétralement opposée à e dans C_1 . En particulier, la composante $B' \cup e'$ de l'énoncé du Lemme contient C_1 et B . Donc, s'il n'existe pas de quadruplet du type $(a|b'_1, b'_2, b'_3)$ tel que $\delta(a, b'_1, b'_2, b'_3) > \delta(B')$, alors en particulier pour $\{b'_1, b'_2, b'_3\} = \{b_1, b_2, b_3\}$ on en déduit l'existence d'un sommet $a' \in B' \setminus (B \cup e)$ tel que $\delta(a', b_1, b_2, b_3) = \delta(a, b_1, b_2, b_3)$. Si $a' \notin V_1$, alors a' est séparé de C_1 et de B par une arête-séparatrice e'' qui n'est pas diamétralement opposée à e dans C_1 , et donc on peut conclure. Sinon, $a' \in V_1$, et on s'en ramène de nouveau au premier cas.

□

Le Lemme 38 termine la preuve formelle du Théorème 16.

D Hyperbolicité et Largeur Arborescente

Dans cette brève Section, nous passerons en revue plusieurs paramètres de la théorie des graphes, la plupart pouvant être vus comme une mesure de la proximité du graphe avec un arbre selon certaines propriétés. Nous nous intéresserons aux relations entre ces paramètres et l'hyperbolicité du graphe.

Le résultat principal de la Section D sera un algorithme en temps linéaire pour reconnaître les graphes 1/2-hyperboliques dont la largeur d'arborescence est bornée par une constante.

Pour commencer, une *décomposition arborescente* d'un graphe $G = (V, E)$ est la donnée d'un arbre $T = (V', E')$ et d'une fonction $W : V' \rightarrow 2^V$. On impose que cette décomposition satisfait deux contraintes :

- pour toute arête $\{x, y\} \in E$, il doit exister un sommet $t \in V'$ tel que $\{x, y\} \subseteq W_t$;
- pour tout sommet $u \in V$ on a que $T[X_u]$ est un sous-arbre de T , avec $X_u = \{t \in V' : u \in W_t\}$.

En particulier, la décomposition arborescente est dite *connexe* si pour chaque sommet $t \in V'$ de l'arbre, on a que $G[W_t]$ est un sous-graphe connexe de G . La *largeur* d'une décomposition est définie comme : $\max_{t \in V'} |W_t| - 1$.

La *longueur* d'une décomposition est définie comme : $\max_{t \in V'} \max_{u, v \in W_t} d(u, v)$.

Trois paramètres importants (pour notre étude) peuvent se définir à l'aide d'une telle décomposition.

- la *largeur d'arborescence* de G (ou *treewidth*), notée $tw(G)$, est la plus petite largeur possible pour une décomposition arborescente de G ;
- la *longueur d'arborescence* de G (ou *tree-length*), notée $tl(G)$, est la plus petite longueur possible pour une décomposition arborescente de G ;
- la *largeur d'arborescence connexe* de G (ou *connected treewidth*), notée $ctw(G)$, est la plus petite largeur possible pour une décomposition arborescente connexe de G .

Nous ajouterons à cette liste un quatrième paramètre :

- le plus long cycle isométrique dans G , que nous noterons dans la suite $lic(G)$.

Il est connu, de longue date, que les paramètres $tw(G)$ et $\delta(G)$ sont incomparables. Dans un sens, cela vient de ce qu'un graphe complet d'ordre n a pour largeur d'arborescence $n - 1$, bien qu'il soit d'hyperbolicité 0. Dans l'autre sens, on peut le voir avec les cycles d'ordre n , d'hyperbolicité arbitrairement grande (Lemme 6), mais de largeur d'arborescence 2.

En revanche, $tl(G)$ et $\delta(G)$ sont comparables. Plus précisément, la longueur d'arborescence d'un graphe est une $O(\log n)$ -approximation de son hyperbolicité : $\delta(G) \leq tl(G) \leq (12 + 8 \log n)\delta(G) + 17$ [19].

Les relations entre $\delta(G)$ et $ctw(G)$ n'ont pas été étudiées à notre connaissance. Cependant, il est prouvé dans [54] que :

$$ctw(G) \leq tw(G) + \binom{tw(G)+1}{2}(lic(G)tw(G) - 1).$$

Enfin, il n'est pas difficile de montrer $lic(G) \leq 4\delta(G) + 3$. Cependant, la famille des graphes pontés (définie comme les graphes pour lesquels $lic(G) \leq 3$) admet des graphes d'hyperbolicité arbitrairement grande, ce qui prouve malheureusement qu'une borne supérieure pour $\delta(G)$ n'est pas déductible de ce seul paramètre [46].

Nous combinons ces résultats pour donner ce qui est, à notre connaissance, la première relation connue entre largeur d'arborescence et hyperbolicité :

Proposition 39. *Soit G un graphe connexe.*

$$\begin{aligned} \delta(G) \leq tl(G) \leq ctw(G) \leq tw(G) + \binom{tw(G)+1}{2}(lic(G)tw(G) - 1) \\ \leq tw(G) + \binom{tw(G)+1}{2}[(4\delta(G) + 3)tw(G) - 1] \leq O(tw(G)^3\delta(G)). \end{aligned}$$

Démonstration. L'unique observation nécessaire est que, dans une décomposition arborescente connexe, la longueur d'arborescence est toujours majorée par la largeur d'arborescence. D'où : $tl(G) \leq ctw(G)$. Le reste se déduit immédiatement des relations présentées ci-dessus. \square

Une première conséquence est qu'un algorithme d'approximation générique pour l'hyperbolicité est définissable pour les graphes dont la largeur d'arborescence est bornée par une constante :

Corollaire 40. *Il existe un algorithme en temps linéaire qui retourne une $O(tw(G)^3)$ -approximation pour l'hyperbolicité.*

Démonstration. D'après [27], il existe un algorithme en temps linéaire pour

une 3-approximation de $tl(G)$ ¹. D'après la Proposition 39, cette valeur est aussi une $O(tw(G)^3)$ -approximation pour l'hyperbolicité. \square

En particulier, le Corollaire 40 est intéressant pour les graphes G tels que $tw(G) = O((\log n)^{\frac{1}{3}})$ (le paramètre $tl(G)$ étant connu pour être une $O(\log n)$ -approximation de l'hyperbolicité).

Cet algorithme d'approximation générique est ce dont nous avons besoin pour aboutir à une reconnaissance en temps *linéaire* des graphes 1/2-hyperboliques, dans le cas des graphes de largeur d'arborescence bornée.

Proposition 41. *Décider si un graphe connexe G est 1/2-hyperbolique peut être réalisé en temps $O(f(tw(G))n + m)$.*

Démonstration. Nous calculons d'abord $tw(G)$ en temps $O(f_1(tw(G))n)$ [11]. Puis nous reprenons l'algorithme de la Section 4.1 (voir aussi la Section B.3).

Montrons comment vérifier la Condition 1 en temps $O(f_2(tw(G))n + m)$. On commence par calculer une $O(tw(G)^3)$ -approximation de l'hyperbolicité en temps $O(n + m)$ (Corollaire 40). Clairement, si la valeur retournée est trop grande, ce qu'on peut vérifier puisque $tw(G)$ nous est connu, alors le graphe G n'est pas 1/2-hyperbolique. Dans le cas contraire, on a d'après le Lemme 6 que tous les cycles de G d'une taille $\Omega(tw(G)^3)$ sont pontés. Pour vérifier la Condition 1, il reste encore à prouver que tous les cycles dans G de longueur au moins 8 et au plus $O(tw(G)^3)$ sont pontés.

Nous nous proposons, dans ce but, de définir un prédicat E_j , $j = O(tw(G)^3)$, pour la relation " x et y sont adjacents dans G^j " (voir la Section B.1 pour un rappel sur les puissances de graphe). Un tel prédicat est définissable récursivement, comme formule logique MSO_2 , par la relation $E_1(x, y) := E(x, y)$, et $E_j(x, y) := E_{j-1}(x, y) \vee (\exists z E(x, z) \wedge E_{j-1}(z, y))$. Aidé de ce prédicat, nous pouvons définir une formule MSO_2 qui vérifie si la puissance G^j est sans C_4 : $R_j := \exists a \exists b \exists c \exists d E_j(a, c) \wedge E_j(b, c) \wedge E_j(b, d) \wedge E_j(a, d) \wedge \neg E_j(a, b) \wedge \neg E_j(c, d)$.

Si G est d'hyperbolicité 1/2, alors G^j est 1/2-hyperbolique d'après le Corollaire 26 pour n'importe quelle valeur de j et donc, la formule R_j doit

¹Pour être exact, la méthode dans [27] retourne une décomposition arborescente de G de longueur au plus $3tl(G)+1$. Mais les auteurs n'indiquent pas clairement si leur méthode retourne la longueur, ou s'il est nécessaire de la calculer à partir de leur décomposition. Dans le cas où il faudrait faire le calcul, soit $\alpha(n)$ la fonction inverse d'Ackermann. Nous pouvons construire un *oracle* en temps $O(f(tw(G))n)$, qui calcule n'importe quelle distance dans le graphe en temps $O(tw(G)^4 \alpha(n))$ [18]. Une analyse plus fine de la décomposition dans [27] nous montre qu'à l'aide de cet oracle, une 2-approximation pour la longueur de la décomposition peut se déduire en temps quasi-linéaire $O(tw(G)^4 n \alpha(n))$.

être fausse d'après le Théorème 12.

Par ailleurs, il n'est pas difficile de voir que, si C est un cycle isométrique d'ordre $4p + \varepsilon$ dans G , $p \geq 2$ et $\varepsilon \in \{0, 1, 2, 3\}$, alors il y a un C_4 induit dans la puissance G^{2p-1} ; pour s'en convaincre, il suffit de prendre quatre sommets dans C de distances deux-à-deux $p, p + \lfloor \frac{\varepsilon}{2} \rfloor, p + (\lceil \frac{\varepsilon}{2} \rceil - \min\{1, \lceil \frac{\varepsilon}{2} \rceil\})$ et $p + \min\{1, \lceil \frac{\varepsilon}{2} \rceil\}$.

Par conséquent, nous proposons comme approche de tester la formule $\bigwedge_{j=8}^{O(tw(G)^3)} \neg R_{2j-1}$. Si elle est fausse, alors G n'est pas 1/2-hyperbolique. Sinon, la Condition 1 est satisfaite.

D'après le Théorème de Courcelle, le test d'une formule MSO_2 est réalisable en temps $O(f_2(tw(G))n)$ [23].

Il reste finalement à vérifier la condition du Théorème 14. En d'autres termes, nous en sommes ramenés à nous assurer que les graphes G^2 et G' sont sans C_4 , où G' désigne le graphe de la Définition 13. Nous pouvons procéder pour G^2 comme nous avons procédé pour les autres puissances de graphes G^j ci-dessus.

Le graphe G' nécessite plusieurs prédicats pour la relation d'adjacence qui lui est associée. Dans un premier temps, on remarque que le prédicat $E(x, y)$ donne directement un prédicat pour la relation " $(x, 0)$ et $(y, 0)$ sont adjacents dans G' ". Le prédicat $E_3(x, y)$, qu'on a défini plus haut, donne un prédicat pour la relation " $(x, 1)$ et $(y, 1)$ sont adjacents dans G' ". Finalement, on définit le prédicat $E'_2(x, y) := (x = y) \vee E_2(x, y)$ pour la relation " $(x, 0)$ et $(y, 1)$ sont adjacents dans G' " (resp. " $(x, 1)$ et $(y, 0)$ sont adjacents dans G' ", par symétrie de notre construction).

Notre but est de construire une formule MSO_2 notée $R_{i,i',j,j'}$, avec $i, i', j, j' \in \{0, 1\}$, qui détermine s'il existe un C_4 induit par un quadruplet $(a, i), (b, i'), (c, j), (d, j')$ du graphe G' .

- Si $i = i' = j = j' = 0$, alors $R_{0,0,0,0}(a, b, c, d) := E(a, c) \wedge E(c, b) \wedge E(b, d) \wedge E(d, a) \wedge \neg E(a, b) \wedge \neg E(c, d)$.
- Si $i = i' = j = j' = 1$, alors $R_{1,1,1,1}(a, b, c, d) := E_3(a, c) \wedge E_3(c, b) \wedge E_3(b, d) \wedge E_3(d, a) \wedge \neg E_3(a, b) \wedge \neg E_3(c, d) \equiv R_3(a, b, c, d)$.
- Si $i = 0, i' = j = j' = 1$, alors $R_{0,1,1,1}(a, b, c, d) := E'_2(a, c) \wedge E_3(c, b) \wedge E_3(b, d) \wedge E'_2(d, a) \wedge \neg E'_2(a, b) \wedge \neg E_3(c, d)$.
- Si $i = 1, i' = j = j' = 0$, alors $R_{1,0,0,0}(a, b, c, d) := E'_2(a, c) \wedge E(c, b) \wedge E(b, d) \wedge E'_2(d, a) \wedge \neg E'_2(a, b) \wedge \neg E(c, d)$.
- Si $i = i' = 0, j = j' = 1$, alors $R_{0,0,1,1}(a, b, c, d) := E'_2(a, c) \wedge E'_2(c, b) \wedge E'_2(b, d) \wedge E'_2(d, a) \wedge \neg E(a, b) \wedge \neg E_3(c, d)$.
- Enfin, si $i = j = 0, i' = j' = 1$, alors $R_{0,1,0,1}(a, b, c, d) := E(a, c) \wedge$

$$E'_2(c, b) \wedge E_3(b, d) \wedge E'_2(d, a) \wedge \neg E'_2(a, b) \wedge \neg E'_2(c, d).$$

Tester si G' est sans C_4 se réduit finalement à tester les six formules MSO_2 ci-dessus, ce qui est faisable en temps $O(f_2(tw(G))n)$ d'après le Théorème de Courcelle. \square

E Grilles Hexagonales et Contractions d'Arêtes

Les grilles "hexagonales" ont été brièvement introduites dans [46], comme un exemple contre-intuitif de graphes qui, bien que pontés, peuvent avoir une valeur pour l'hyperbolicité qui est arbitrairement grande. Pour rappel, un graphe est ponté si tous ses cycles de taille au moins 4 sont pontés. Les grilles hexagonales ont également une largeur d'arborescence arbitrairement grande, puisque contenant des grilles de larges dimensions comme sous-graphes [59]. Ce résultat aurait pu se déduire de ceux de la Section D : des graphes pontés d'hyperbolicité aussi grande que l'on veut doivent forcément avoir une largeur d'arborescence non bornée.

Définir les grilles hexagonales formellement s'apparente plus à une gageure qu'à autre chose. Pour tâcher d'y parvenir, on notera d'abord qu'un quadrangle, ou C_4 , peut être minimalement triangulé d'exactly deux façons différentes, et qui correspondent dans les deux cas à l'ajout d'une arête entre deux sommets à distance 2 dans le graphe. En particulier, quand on considère le carré comme carte planaire canonique du C_4 , cela revient à ajouter au choix une des deux diagonales possibles. Ces deux triangulations du cycle de taille 4 correspondent en fait aux deux motifs de base de la grille hexagonale. Partant d'une grille "classique" (ses C_4 ne sont donc pas encore triangulés), on fixe un plongement dans le plan de celle-ci, de sorte qu'ensuite :

- les C_4 sur une même ligne sont minimalement triangulés de manière identique (i.e. la même diagonale est ajoutée pour chacun d'entre eux) ;
- deux C_4 consécutifs sur une même colonne sont minimalement triangulés de façon différente (i.e. une diagonale différente a été ajoutée).

Cette définition, qui n'est pas complètement formelle, peut mieux se comprendre grâce à la Figure 16. À un isomorphisme près, il y a (au plus) deux grilles hexagonales différentes qui peuvent être construites selon la même grille classique (selon quelle dimension est choisie pour les lignes). En outre, il est à noter que par cette construction, nous avons défini une carte planaire "canonique" pour les grilles hexagonales. Nous nous référerons toujours implicitement à cette dernière dans la suite.

Dans cette annexe, nous nous proposons de complètement caractériser

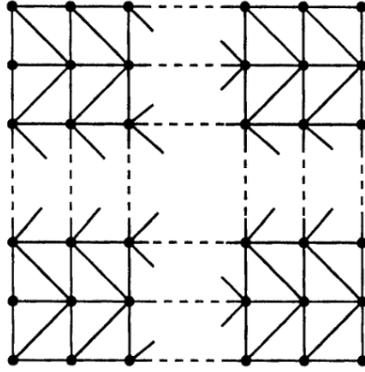


FIG. 16: Un exemple de Grille Hexagonale.

l'hyperbolicité des grilles hexagonales (Proposition 42), ce qui n'avait pas été fait dans [46], et qui viendra ainsi compléter les familles simples de graphes sur lesquelles on peut s'appuyer pour borner inférieurement l'hyperbolicité (voir les Lemmes 6 et 7). Connaître l'hyperbolicité de ces graphes a aussi des applications pour l'étude préliminaire de l'heuristique proposée dans [45], et que nous exposerons dans la dernière partie de cette Section.

Dans la suite, nous désignerons par $n+1$ le nombre de colonnes, et par $m+1$ le nombre de lignes. Ces deux paramètres sont suffisants pour caractériser la grille hexagonale étudiée de façon unique. Nous désignerons celle-ci par $Hex(n, m)$.

Distances dans une Grille Hexagonale

Connaître la valeur de l'hyperbolicité requiert certaines connaissances sur les distances dans le graphe. Dans cette Section, afin de faciliter le rai-

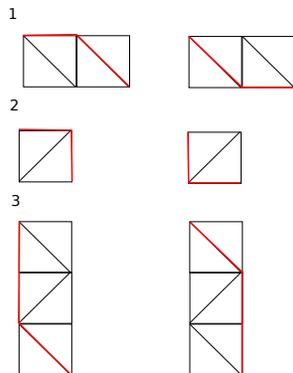


FIG. 17: Trois règles de substitution.

sonnement, nous supposons que les colonnes ont été numérotées de la gauche vers la droite, et les lignes du haut vers le bas. Dans les deux cas, on part de 0, d'où la numérotation $0, \dots, n$ pour les colonnes et $0 \dots m$ pour les lignes. Il s'ensuit évidemment un étiquetage unique de chaque sommet u par son numéro de colonne x_u et son numéro de ligne y_u . Par ailleurs, les grilles hexagonales n'étant somme toute qu'une extension des grilles classiques, il est prévisible qu'il existe des relations entre la distance $d(u, v)$ et les coordonnées x_u, x_v, y_u, y_v , et cela pour n'importe quels sommets u, v . Notre but est à présent de les exprimer, dans le but avoué d'obtenir une caractérisation partielle des paires *localement éloignées* dans le graphe (voir le Lemme 4, ainsi que le paragraphe qui le précède, pour rappel).

D'abord on observera qu'en raison des nombreuses symétries du graphe (ou plutôt de sa carte planaire), on pourra toujours supposer sans perte de généralité que $x_v \geq x_u$ et $y_v \geq y_u$ (à quelques transformations isométriques près de la carte planaire). Nous noterons dans la suite $\Delta_x(u, v) = |x_u - x_v| = x_v - x_u$, et $\Delta_y(u, v) = |y_u - y_v| = y_v - y_u$.

À présent, montrons comment restreindre les plus courts chemins à considérer dans notre étude. En premier lieu, il est évident qu'on peut toujours s'éviter d'augmenter Δ_x ou Δ_y . Nous avons ensuite défini trois règles de substitution qui sont illustrées par la Figure 17. Ce faisant, nous avons démontré qu'il existait toujours un plus court chemin entre u et v tel que :

- tous les mouvements horizontaux, s'il y en a, sont regroupés en un seul chemin horizontal, dont v est une extrémité ;
- il y a un unique mouvement vertical d'effectué entre deux mouvements diagonaux consécutifs (de la gauche vers la droite et du haut vers le

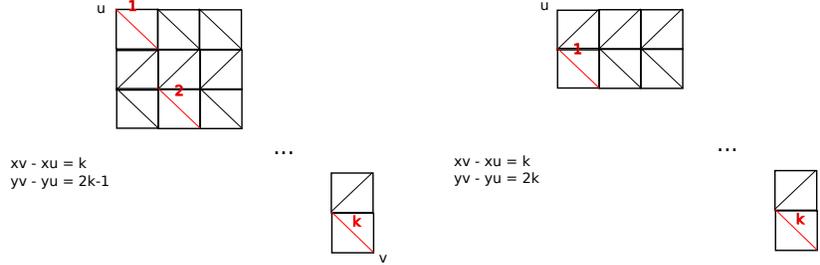


FIG. 18: Les deux cas à considérer.

bas) ;

- Si un chemin vertical a pour une de ses extrémités le sommet u , alors ce chemin se limite à un seul mouvement vertical.

Ici, les mouvements dont il est question sont des arêtes, dont on considère qu'elles sont verticales, horizontales ou diagonales, selon l'orientation de la carte planaire canonique de la grille hexagonale.

Par ailleurs, il est clair que, par définition d'un plus court chemin, le nombre de mouvement diagonal doit toujours y être maximisé (sans quoi nous pourrions en diminuer la longueur !). Les conditions ci-dessus amènent alors naturellement à la définition d'un unique plus court chemin entre u et v , que nous appellerons leur *plus court chemin canonique* par la suite. Soit k le nombre de mouvements diagonaux sur le plus court chemin canonique entre u et v . Alors, en utilisant les deux cas de la Figure 18, on peut aisément vérifier que $d(u, v) = \Delta_x(u, v) + \Delta_y(u, v) - k$.

Dans le cas de la Figure E (gauche), la maximisation du nombre de mouvements diagonaux nous donne $k = \min\{\Delta_x(u, v), \lfloor \frac{\Delta_y(u, v) + 1}{2} \rfloor\}$. Dans le cas de la Figure E (droite), on obtient en revanche $k = \min\{\Delta_x(u, v), \lfloor \frac{\Delta_y(u, v)}{2} \rfloor\}$. Il est à noter que, dans les deux cas, la valeur obtenue pour k est la même pourvu que $\Delta_y(u, v)$ soit pair. Cette observation n'apparaît pas tellement surprenante, une fois considérées plus en détails les alternances de triangulations de ligne en ligne (e.g. comprendre que la seule configuration atteignable dans ce cas-là est la configuration (a) de la Figure 19, à une symétrie près). En revanche, la valeur de k peut différer quand $\Delta_y(u, v)$ est impair. Aux symétries près de la grille hexagonale, nous pouvons donc finalement caractériser les distances possibles entre n'importe quels sommets u, v du graphe.

Claim 13. *Il existe au plus trois possibilités différentes pour la valeur $d(u, v)$:*

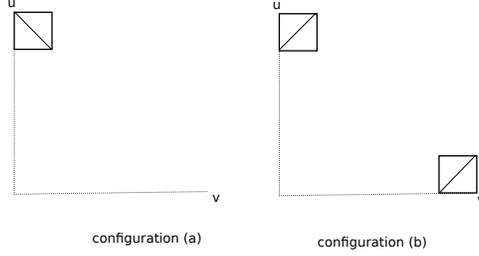


FIG. 19: Les deux configurations possibles.

- $d(u, v) = \Delta_y(u, v)$; en ce cas, le plus court chemin canonique contient $\Delta_x(u, v)$ mouvements diagonaux (type I) ;
- $d(u, v) = \Delta_x(u, v) + \lfloor \frac{\Delta_y(u, v)}{2} \rfloor$; en ce cas, nous sommes dans la configuration (a) de la Figure 19, et le plus court chemin canonique contient $\lfloor \frac{\Delta_y(u, v)+1}{2} \rfloor = \lceil \frac{\Delta_y(u, v)}{2} \rceil$ mouvements diagonaux (type II) ;
- $d(u, v) = \Delta_x(u, v) + \lceil \frac{\Delta_y(u, v)}{2} \rceil$; en ce cas, nous sommes dans la configuration (b) de la Figure 19, et le plus court chemin canonique contient $\lfloor \frac{\Delta_y(u, v)}{2} \rfloor$ mouvements diagonaux (type III).

Nous insistons de nouveau que la configuration (b) de la Figure 19 n'est atteignable que pour $\Delta_y(u, v)$ impair.

Par ailleurs, si u, v est du type II ou du type III, alors on observe qu'une augmentation de l'écart $\Delta_x(u, v)$ augmente toujours la distance $d(u, v)$ (tout en préservant le type). En conséquence :

Claim 14. *Si la paire u, v est localement éloignée et n'est pas du type I, alors $\Delta_x(u, v) = n$.*

Sous-graphes isométriques et Règles de réduction

Il est direct qu'une grille classique contient un très grand nombre de sous-grilles induites, et qu'elles sont isométriques. Cette propriété est préservée, et même renforcée dans le cas des grilles hexagonales. Nous montrerons dans cette Section comment en déduire des règles de *réduction*, dont l'objet est de diminuer les dimensions n, m de la grille hexagonale considérée. Ces réductions seront à la base de la caractérisation de l'hyperbolicité pour cette famille, que nous démontrerons dans la Section suivante. Nous détaillons à présent la structure de la grille hexagonale, au travers des six Claims qui suivent.

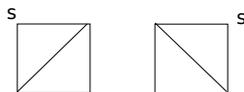


FIG. 20: Sommet simplicial s sur une ligne du bord.

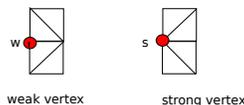


FIG. 21: Catégorisation des sommets intérieurs sur une colonne du bord.

Le plongement canonique de $Hex(n, m)$ dans le plan est naturellement délimité par deux lignes et deux colonnes extrémales. Ce que nous appellerons les *bords* de la grille. Chaque ligne et chaque colonne du bord s'intersectent en un unique sommet (il y en a donc quatre en tout), que nous appellerons un *coin*. Les sommets restants sur les bords seront appelés *sommets intérieurs* quand il faudra les différencier d'un coin. Dans un premier temps, nous proposons une classification plus fine de ces sommets :

Claim 15. *Chaque ligne du bord contient un unique sommet simplicial, et ce sommet est un coin.*

Démonstration. D'abord il est direct qu'un sommet simplicial ne peut être qu'un coin. Ensuite, il suffit d'observer qu'une ligne ou bien commence avec le carré de la Figure 20 (gauche), ou bien termine avec le carré de la Figure 20 (droite). \square

Il est à noter que tout sommet intérieur sur une colonne du bord n'est pas simplicial. Toutefois, on peut quand même en proposer une classification en deux catégories (voir la Figure 21). Ces appellations de sommets *faible* et *fort* prendront leur sens par la suite. L'idée sous-jacente est que les sommets faibles pourront être négligés (substitués par d'autres sommets) pour le calcul de la valeur de l'hyperbolicité, tandis que les sommets forts devront eux être pris en compte.

De même que pour les grilles classiques, une sous-grille hexagonale induite $Hex(L, l)$ peut s'obtenir en ne gardant que les lignes de i à $i + l$, $0 \leq i \leq i + l \leq m$, et les colonnes de j à $j + L$, $0 \leq j \leq j + L \leq n$. Ce faisant, la grille hexagonale obtenue est un sous-graphe isométrique, comme le prouve notre construction des plus courts chemins canoniques.

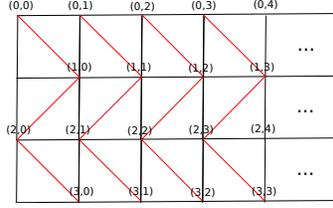


FIG. 22: La construction du Claim 16. Les sommets étiquetés sont ceux dans H' . Leur étiquette correspond à leurs coordonnées dans H' .

Une autre sous-grille intéressante, qui cette-fois n'a pas son équivalent dans les grilles classiques, s'obtient par une inversion des rôles des arêtes verticales et des arêtes diagonales dans le graphe. Plus formellement :

Claim 16. *Il existe un sous-graphe isométrique H' dans $Hex(n, m)$, qui est isomorphe à $Hex(n - 1, m)$ et tel que :*

- tous les sommets sur les lignes du bord, à l'exception des deux sommets simpliciaux du Claim 15, sont dans H' ;
- les sommets intérieurs des colonnes sont dans H' si, et seulement si, ils sont forts.

La construction est directe, ainsi que l'illustre la Figure 22.

À présent que nous sommes mieux familiarisés avec la structure de la grille, nous pouvons présenter nos règles de réduction mentionnées plus haut.

Soit un quadruplet quelconque a, b, c, d . Nous écrirons $\Delta_x(a, b, c, d) = \max_{u, v \in \{a, b, c, d\}} \Delta_x(u, v)$, et $\Delta_y(a, b, c, d) = \max_{u, v \in \{a, b, c, d\}} \Delta_y(u, v)$. Clairement, ces deux valeurs peuvent être choisies comme dimensions d'une sous-grille hexagonale et isométrique de $Hex(n, m)$, sur les bords de laquelle les quatre sommets a, b, c, d sont contenus. En d'autres termes :

Claim 17. $\delta(a, b, c, d) \leq \delta(Hex(\Delta_x(a, b, c, d), \Delta_y(a, b, c, d)))$.

Notre but est maintenant d'exhiber certaines conditions grâce auxquelles la borne supérieure du Claim 17 peut-être améliorée. Même dans le cas où ces conditions ne seront pas remplies, leur négation nous fournira davantage d'informations sur la disposition du quadruplet a, b, c, d dans le graphe, ce qui s'avèrera très utile dans la Section suivante.

Claim 18. *Étant donnée une ligne du bord, s'il s'y trouve un unique sommet de $\{a, b, c, d\}$, et que c'est un coin, alors :*

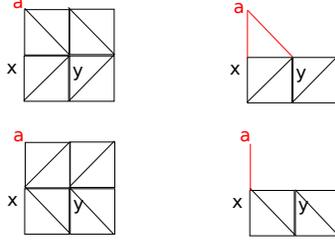


FIG. 23: La substitution d'un coin.

$$\delta(a, b, c, d) \leq \max\{1, \delta(\text{Hex}(\Delta_x(a, b, c, d), \Delta_y(a, b, c, d) - 1))\}.$$

En d'autres termes, cette ligne peut être virtuellement supprimée, et le coin remplacé par un de ses voisins sur la ligne suivante.

Démonstration. Sans perte de généralité, on supposera que le coin susmentionné est le sommet a du quadruplet. D'abord, observons que le coin a possède au plus deux voisins sur la ligne suivante : exactement un s'il est simplicial, et deux sinon. Par ailleurs, pour tout sommet v qui n'est pas sur la ligne du bord (celle qui contient le coin), on peut toujours trouver un plus court chemin entre v et a qui passe par un des voisins du coin sur la ligne suivante (voir la Figure 23).

Une première conséquence est que si le coin a est simplicial, alors le problème se réduit au cas d'un sommet pendant (de degré 1), ce qui revient à ce que a peut être substitué par son unique voisin x sur la ligne suivante et que, ce faisant $\delta(a, b, c, d) = \delta(x, b, c, d)$.

Dans un second temps, on suppose que le coin n'est pas simplicial. Étant donné que ses deux voisins sur la ligne suivante sont adjacents, le problème se réduit cette fois à celui d'un triangle avec une arête-séparatrice (voir les Sections 3 et 5). Soient x, y les deux voisins de a sur la ligne suivante (comme indiqué sur la Figure 23). D'après le Lemme 18, une condition nécessaire pour que l'hyperbolicité d'un quadruplet de type $(a|b_1, b_2, b_3)$ soit plus grande que celle de $\text{Hex}(n, m - 1)$ (i.e. la grille hexagonale privée de sa première ligne) est que pour un des sommets du triplet des b_i , disons b_2 , tous les plus courts chemins entre b_2 et a passent par x . Or, cette propriété ne peut être vérifiée que pour $b_2 = x$, puisque le sommet x est dominé par le sommet y (ou, de manière équivalente, $N(x) \cup \{x\} \subseteq N(y) \cup \{y\}$). Par ailleurs, si $x \in \{b, c, d\}$ alors, d'après le Lemme 5, on a $\delta(a, b, c, d) \leq d(a, x) = 1$.

D'où finalement, puisque $\Delta_y(x, b, c, d) = \Delta_y(y, b, c, d) = \Delta_y(a, b, c, d) - 1$ dans ce cas-là, on a $\delta(a, b, c, d) \leq \max\{1, \delta(\text{Hex}(\Delta_x(a, b, c, d), \Delta_y(a, b, c, d) - 1))\}$ d'après le Claim 17. \square

Un autre résultat utile pour la suite, et plus général, sera le Claim 7, dont nous avons donné l'énoncé et la preuve dans la Section A.4. Il est adapté aux graphes *cop-wins* en général, donc à la grille hexagonale en tant que graphe ponté, puisque tous les graphes pontés sont eux-mêmes *cop-win* [1]. Nous montrerons comment il s'applique aux colonnes du bord de la grille hexagonale, au même titre que le Claim 18 s'applique aux lignes.

Finalement, le Claim 19 nous servira dans la suite à nous ramener au Claim 18 ou au Claim 7 chaque fois que c'est possible.

Claim 19. *Supposons que sur chacun des bords de la grille, on trouve (au moins) un sommet de $\{a, b, c, d\}$. Si deux sommets parmi $\{a, b, c, d\}$ sont des sommets intérieurs d'une même colonne du bord, alors il existe une ligne du bord dont l'unique sommet dans $\{a, b, c, d\}$ est un coin.*

Démonstration. Sans perte de généralité, a et b sont des sommets intérieurs d'une même colonne du bord. En particulier, ils ne peuvent être contenus dans aucun autre bord de la grille. On en déduit par hypothèse que la colonne et les deux lignes du bord restantes contiennent chacune un sous-ensemble non-vide de $\{c, d\}$. En particulier, deux de ces bords doivent contenir le même sommet, disons c , ce qui implique que c est un coin. Finalement, puisque les lignes du bord n'ont aucun sommet en commun, alors par hypothèse la ligne du bord opposée à celle de c contient le sommet d et ainsi, c est l'unique sommet dans $\{a, b, c, d\}$ sur sa ligne. \square

Calcul de l'Hyperbolicité

L'hyperbolicité des grilles hexagonales n'avait été que très brièvement étudiée dans [46], où les auteurs avaient montré que $\delta(\text{Hex}(2p, 2p)) \geq p$. Nous sommes maintenant en mesure de prouver le résultat suivant :

Proposition 42. $\delta(\text{Hex}(n, m)) = \frac{\min\{n, m\}}{2}$.

Cette valeur est à comparer avec l'hyperbolicité des grilles classiques, qui est deux fois plus grande que pour les grilles hexagonales (voir le Lemme 7). Le reste de la Section est dévolu à la preuve de la Proposition 42.

La borne inférieure s'obtient facilement comme suit.

Claim 20. $\delta(\text{Hex}(n, m)) \geq \frac{\min\{n, m\}}{2}$.

Démonstration. Soit $l = \min\{n, m\}$. Considérons la sous-grille hexagonale et isométrique formée des l premières lignes et des l premières colonnes. Soient a, b, c, d les quatre coins de la sous-grille. Les distances qui sont associées à ce quadruplet sont alors : l pour chacun des quatre bords, $l + \lfloor \frac{l}{2} \rfloor$ et

$l + \lceil \frac{l}{2} \rceil$ pour les coins qui sont diamétralement opposés dans le sous-graphe. D'où : $\delta(a, b, c, d) = [(l + \lfloor \frac{l}{2} \rfloor) + (l + \lceil \frac{l}{2} \rceil) - 2l]/2 = (\lfloor \frac{l}{2} \rfloor + \lceil \frac{l}{2} \rceil)/2 = l/2$. \square

La preuve de la borne supérieure $\delta(Hex(n, m)) \leq \frac{\min\{n, m\}}{2}$ est une récurrence sur $N = n + m$.

Nous commencerons toutefois par une preuve directe dans le cas où $\min\{n, m\} \leq 1$. En effet, quand $\min\{n, m\} = 0$, nous sommes dans le cas dégénéré d'un chemin, donc d'un arbre, et la preuve est triviale. Quand $\min\{n, m\} = 1$, la caractérisation de Chepoi et al. s'applique (Théorème 12) et la 1/2-hyperbolicité du graphe s'en déduit. En fait, une telle grille hexagonale est forcément un graphe planaire extérieur et ainsi, la preuve peut même être simplifiée en utilisant le Lemme 33 au lieu du Théorème 12.

Si $N \leq 3$, alors $\min\{n, m\} \leq 1$, et la borne supérieure s'en déduit du paragraphe précédent. Donc, les cas de base de notre récurrence sont démontrés. Dans la suite on supposera $N \geq 4$. Si $\min\{n, m\} \leq 1$, alors la borne supérieure est directe par l'utilisation du paragraphe précédent. On ajoutera donc comme hypothèse $\min\{n, m\} \geq 2$ pour la suite de la preuve.

Soient deux paires localement éloignées u_1, v_1 et u_2, v_2 qui satisfont les conditions du Lemme 4. Si $\Delta_x(u_1, v_1, u_2, v_2) < n$ ou $\Delta_y(u_1, v_1, u_2, v_2) < m$ alors on conclut d'après le Claim 17 en utilisant l'hypothèse de récurrence (car $N' = \Delta_x(u_1, v_1, u_2, v_2) + \Delta_y(u_1, v_1, u_2, v_2) < N$). On prendra ainsi, comme troisième hypothèse, $\Delta_x(u_1, v_1, u_2, v_2) = n$ et $\Delta_y(u_1, v_1, u_2, v_2) = m$.

Enfin, si deux sommets parmi u_1, v_1, u_2, v_2 sont des sommets intérieurs d'une même colonne du bord, alors d'après le Claim 19, le Claim 18 s'applique et ainsi, nous pouvons à nouveau conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence : $\delta(u_1, v_1, u_2, v_2) \leq \max\{1, \delta(Hex(n, m - 1))\} \leq \min\{n, m\}/2$. En conséquence de quoi, notre quatrième et dernière hypothèse pour la suite sera que, quelle que soit la colonne du bord considérée, il existe au plus un sommet parmi u_1, u_2, v_1, v_2 qui en est un sommet intérieur.

Deux cas sont à distinguer, selon qui de n ou m est le minimum.

Cas où $m \leq n$. Dans un premier temps, supposons qu'au moins une paire parmi u_1, v_1 et u_2, v_2 est du type I pour les distances (voir le Claim 13). Alors, d'après le Lemme 5, on a que $\delta(u_1, v_1, u_2, v_2) \leq \min\{d(u_1, v_1), d(u_2, v_2)\}/2 \leq \Delta_y(u_1, v_1, u_2, v_2)/2 \leq m/2$.

Dans un second temps, si nous supposons qu'aucune des paires u_1, v_1 et u_2, v_2 n'est du type I pour les distances, alors d'après le Claim 14 on a que $\Delta_x(u_1, v_1) = \Delta_x(u_2, v_2) = n$. En conséquence de quoi, il doit y avoir exactement deux sommets du quadruplet sur chaque colonne du bord, dont au plus

un seul des deux est intérieur d'après notre quatrième hypothèse. Puisque $\Delta_y(u_1, u_2, v_1, v_2) = m$, on en déduit aussi que pour chaque ligne du bord, au moins un coin de celle-ci est un sommet dans u_1, u_2, v_1, v_2 . Comme d'après ce qui précède, on peut associer à chaque sommet du quadruplet une colonne du bord qui le contient, donc une ligne du bord dont (au moins) deux des sommets sont contenus dans l'ensemble $\{u_1, u_2, v_1, v_2\}$ est telle que ses deux coins sont contenus dans cet ensemble.

On en arrive ainsi à ce que, ou bien les quatre sommets u_1, u_2, v_1, v_2 correspondent exactement aux quatre coins de la grille, ou bien le Claim 18 s'applique. Dans le premier cas, les trois sommes S_1, S_2 et S_3 pour l'hyperbolicité des quatre coins du graphe valent respectivement $2n$ (pour les lignes), $2m$ (pour les colonnes), et $2n + \lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lceil \frac{m}{2} \rceil = 2n + m$ (pour les diagonales). En d'autres termes : $\delta(u_1, u_2, v_1, v_2) = [(2n + m) - 2n]/2 = m/2$ dans ce cas-là. Dans le second cas, on peut supprimer une ligne du bord et conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Cas où $m > n$. Dans un premier temps, supposons qu'aucun sommet faible n'est contenu dans les sommets u_1, u_2, v_1, v_2 . En d'autres termes, chaque sommet du quadruplet est ou bien fort, ou bien sur une ligne du bord. En outre, on se propose de substituer dans le quadruplet chaque sommet simplicial sur une ligne du bord par son unique voisin sur la même ligne. D'après le Claim 15, cette substitution advient au plus deux fois. Elle n'est alors qu'une application directe du Lemme 20, ce dont nous déduisons que nos opérations de substitution n'ont pu faire diminuer la valeur pour l'hyperbolicité que d'au plus $1/2$.

L'intérêt de ces opérations est qu'à présent, tous les sommets du quadruplet sont contenus dans une copie isométrique de $Hex(n - 1, m)$, d'après le Claim 16. Donc on peut utiliser l'hypothèse de récurrence pour conclure que $\delta(u_1, u_2, v_1, v_2) \leq \min\{n - 1, m\}/2 + 1/2 \leq (n - 1)/2 + 1/2 \leq n/2$.

Dans un second temps, supposons sans perte de généralité que u_1 est faible. Clairement, il y a un sommet u'_1 sur la colonne jouxtant celle de u_1 , qui est adjacent à u_1 et qui domine u_1 (voir la Figure 21).

Donc, si aucun autre sommet parmi v_1, u_2, v_2 n'est sur la même colonne du bord que le sommet u_1 alors, de façon similaire à ce que nous avons fait pour les sommets simpliciaux, nous remplaçons u_1 par u'_1 dans le quadruplet. Ce faisant, on a d'après le Claim 7 que $\delta(u_1, v_1, u_2, v_2) \leq \delta(u'_1, v_1, u_2, v_2) + 1/2$. Par ailleurs, une colonne a été virtuellement supprimée dans la manoeuvre. Ce dont on déduit $\delta(u_1, u_2, v_1, v_2) \leq \delta(u'_1, v_1, u_2, v_2) + 1/2 \leq \delta(Hex(n - 1, m)) + 1/2 \leq (n - 1)/2 + 1/2 \leq n/2$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Dans le cas contraire, soit v un sommet parmi u_2, v_1, v_2 qui est sur la même colonne du bord que le sommet u_1 . Comme u_1 est un sommet intérieur, donc la paire u_1, v n'est pas localement éloignée, et nous supposons sans perte de généralité $v = v_2$. De plus, le sommet v_2 est un coin d'après notre quatrième hypothèse. En particulier, si v_2 est l'unique sommet dans u_2, v_1, v_2 sur la ligne du bord qui le contient, alors le Claim 18 s'applique, et nous pouvons conclure en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Sinon, soit v' un autre sommet dans u_2, v_1 contenu sur la même ligne du bord que le sommet v_2 . Nous remarquons que lorsque v' n'est pas lui-même un coin, alors par élimination, le dernier sommet u parmi u_2, v_1 doit être commun à la ligne et à la colonne du bord restantes, dont il est le seul sommet présent dans le quadruplet. En d'autres termes, le Claim 18 s'applique au sommet u , et nous pouvons conclure une fois de plus en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Enfin, dans le cas où v' est également un coin, alors ou bien le dernier sommet restant dans le quadruplet est encore un coin, auquel cas on se ramène au sous-cas ci-dessus, ou bien le coin v' est l'unique sommet sur la colonne du bord qui le contient (puisque, dans tous les cas, le sommet u' doit être sur la ligne du bord opposée). Mais alors, dans ce dernier cas, nous prétendons que v' est nécessairement dominé par un sommet de la colonne qui jouxte la sienne. La preuve est directe si v' est simplicial. Dans le cas contraire, v' est une extrémité de l'unique diagonale du carré qui le contient (ou, de manière équivalente, de la corde du C_4 induit dont il fait partie), et il est facile de voir que l'autre extrémité de cette arête domine effectivement le sommet v' . Alors, au lieu de substituer u_1 , il suffit à présent de substituer v' dans le quadruplet, et on conclut de même.

Distortion de l'Hyperbolicité sous l'influence de contractions d'arêtes

Dans cette dernière Section, nous proposons une application étonnante de l'hyperbolicité des grilles hexagonales.

Rappelons pour commencer ce que nous entendons ici par contraction. Étant donné un graphe $G = (V, E)$, soit $e = \{x, y\} \in E$ une arête de G . Le graphe G/e s'obtient depuis G d'abord en supprimant les sommets x, y du graphe, puis en ajoutant un nouveau sommet v_e dont le voisinage sera $(N(x) \cup N(y)) \setminus \{x, y\}$. C'est cette opération que nous appellerons contraction d'une arête.

Clairement, les contractions diminuent l'ordre du graphe. C'est pour cette raison qu'il a été récemment proposé dans [45] de s'en servir dans une

heuristique pour le calcul de l'hyperbolicité du graphe. Les auteurs dans [45] prétendent que leur méthode, dont une description plus lâche est donnée dans la suite, préserve l'ordre de grandeur du paramètre : un graphe de faible hyperbolicité le reste après leur transformation, et de même pour un graphe de très grande hyperbolicité. Pour autant, aucun argument théorique n'a été avancé pour le prouver. Notre but sera de donner les premières réponses à ce problème.

Distorsion additive des suites d'une seule contraction

Notre premier objectif est de déterminer ce qui peut advenir quand une seule arête est contractée. On en déduira nos premières bornes pour le cas général, à une multiplication près par le nombre de contractions effectuées. Bien que plus simple que le cas général, le cas d'une unique contraction réserve déjà des surprises. Ainsi, nous montrerons que la valeur de l'hyperbolicité peut *augmenter* des suites d'une contraction.

Proposition 43. *La double inégalité suivante est satisfaite : $\delta(G) - 1 \leq \delta(G/e) \leq \delta(G) + 1/2$. Par ailleurs, les deux bornes sont atteintes, et ce pour une infinité de graphes.*

Démonstration. Soit ϕ l'application de V dans $V(G/e)$ telle que $\phi(x) = \phi(y) = v_e$ et, pour tout autre sommet u , $\phi(u) = u$. La fonction ϕ ne sert donc qu'à formaliser le résultat de la contraction : deux sommets ont été fusionnés en un seul. Clairement, pour tout sommet $u, v \in V$, on a que $d_{G/e}(\phi(u), \phi(v)) \leq d_G(u, v) \leq d_{G/e}(\phi(u), \phi(v)) + 1$. Par conséquent, la double-inégalité $\delta(G) - 1 \leq \delta(G/e) \leq \delta(G) + 1$ est satisfaite.

Supposons à présent $\delta(G/e) = \delta(G) + 1$. D'abord, rappelons que les graphes 0-hyperboliques sont exactement ceux dont les composantes biconnexes sont des sous-graphes complets ; ils sont donc stables par l'opération de contraction. On en déduit $\delta(G) > 0$.

Soit a, b, c, d un quadruplet tel que $\delta(\phi(a), \phi(b), \phi(c), \phi(d)) = \delta(G/e)$. Nous supposons sans perte de généralité : $d(a, b) + d(c, d) \geq d(a, c) + d(b, d) \geq d(a, d) + d(b, c)$.

De plus, dans le cas où $d(a, c) + d(b, d) = d(a, d) + d(b, c)$, on impose que : $d(\phi(a), \phi(c)) + d(\phi(b), \phi(d)) \geq d(\phi(a), \phi(d)) + d(\phi(b), \phi(c))$.

Alors, pour que la valeur de l'hyperbolicité augmente de 1, il faut que la somme médiane diminue de 2 et que la plus grande somme ne diminue pas.

En clair :

- $\delta(a, b, c, d) = \delta(G)$,
- et $d(\phi(a), \phi(b)) + d(\phi(c), \phi(d)) = d(a, b) + d(c, d)$,

- et $d(\phi(a), \phi(c)) + d(\phi(b), \phi(d)) = d(a, c) + d(b, d) - 2$,
- et $d(\phi(a), \phi(c)) + d(\phi(b), \phi(d)) \geq d(\phi(a), \phi(d)) + d(\phi(b), \phi(c))$.

Il s'ensuit que :

$$d(\phi(a), \phi(b)) = d(a, b),$$

$$d(\phi(c), \phi(d)) = d(c, d),$$

$$d(\phi(a), \phi(c)) = d(a, c) - 1$$

$$\text{et } d(\phi(b), \phi(d)) = d(b, d) - 1.$$

En particulier, $d(a, c) = d(a, \{x, y\}) + d(c, \{x, y\}) + 1$

et $d(b, d) = d(b, \{x, y\}) + d(d, \{x, y\}) + 1$.

Mais alors :

$$d(a, c) + d(b, d) = (d(a, \{x, y\}) + d(b, \{x, y\}) + 1) + (d(c, \{x, y\}) + d(d, \{x, y\}) + 1)$$

$\geq d(a, b) + d(c, d)$ et ainsi, $\delta(a, b, c, d) = \delta(G) = 0$. Une contradiction. On a donc montré par l'absurde que $\delta(G/e) \leq \delta(G) + 1/2$.

D'après le Lemme 6, un cycle d'ordre $4(n+1)$ a comme hyperbolicité $n+1$, tandis qu'un cycle d'ordre $4n+3$ a comme hyperbolicité n ; ainsi, la borne inférieure est atteinte. De même, d'après le Lemme 6, un cycle d'ordre $4n+1$ a comme hyperbolicité $n-1/2$, tandis que le cycle d'ordre $4n$ a comme hyperbolicité n ; ainsi, la borne supérieure est atteinte également. \square

Distortion des suites de la contraction d'un couplage

Un couplage est un ensemble d'arêtes dont les extrémités sont deux-à-deux disjointes. Dans une version simplifiée, l'heuristique proposée dans [45] revient à diminuer l'ordre du graphe par une application répétée de cette routine :

- Trouver un couplage maximal M du graphe ;
- Contracter toutes les arêtes dans M .

Nous appellerons G' le graphe G/M qui en résulte, et notre ambition est de borner le ratio $\frac{\delta(G)}{\delta(G')}$ (dans le pire des cas). En fait, à proprement parler, le ratio ne peut pas être borné supérieurement, puisqu'il est possible dans certains cas que G' soit un cactus de cliques (donc d'hyperbolicité 0 : prendre le cas simple du C_4 pour s'en convaincre).

Nous donnons à présent un argument simple qui montre pourquoi ce cas dégénéré (i.e. $\delta(G') = 0$) n'est pas possible au-delà d'une valeur limite pour l'hyperbolicité. En effet, soit $tl(G)$ la longueur d'arborescence du graphe G (ou *tree-length*, voir la Section D pour rappel de la définition). Clairement, les distances dans G' sont, au moins, égales à (la partie entière inférieure de) la moitié des distances originales dans G . Aussi, on a que $tl(G) \leq 2tl(G') + 1$. Or, il a été prouvé dans [19] que $\delta(G) \leq tl(G) \leq (12 + 8 \log n)\delta(G) + 17$. En

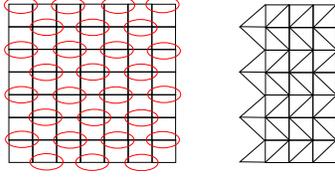


FIG. 24: La contraction du couplage M_n de la grille.

particulier, si $\delta(G) \geq 37$, alors de même $tl(G) \geq 37$ et donc, $tl(G') \geq 18$, ce qui rend impossible que $\delta(G') = 0$.

Il est à noter qu'en pratique, on connaît seulement des graphes G qui sont 1-hyperboliques pour lesquels G' est un *block-graph*. Dans la suite, on supposera l'hyperbolicité de G suffisamment grande pour que le cas dégénéré $\delta(G') = 0$ soit évité.

Proposition 44. $\max_{G,M} \frac{\delta(G)}{\delta(G')} \geq 5$.

De plus, pour tout $n \geq 1$, il existe un couplage maximal M_n de la grille carrée $(n+1) \times (n+1)$ (notée G_n) tel que le rapport $\frac{\delta(G_n)}{\delta(G'_n)}$ tend vers 4 quand n tend vers l'infini.

Démonstration. Le couplage M_n est défini comme suit.

- D'abord on fixe une carte planaire pour la grille G_n , plus une orientation pour celle-ci.
- On numérote les lignes de 0 à n , du haut vers le bas.
- Pour chaque ligne, on numérote les arêtes de 1 à n , de la gauche vers la droite.
- Si la ligne a un numéro pair, alors on ajoute dans M_n toutes ses arêtes de numéro impair (1, 3, ...).
- Sinon, on ajoute dans M_n toutes ses arêtes de numéro pair (2, 4, ...).

Il peut être vérifié quand n est pair que G'_n est isomorphe à la grille hexagonale $Hex(\frac{n}{2}, n)$, d'hyperbolicité $n/4$ d'après la Proposition 42.

Quand n est impair, G'_n est un sous-graphe isométrique de $Hex(\lceil \frac{n}{2} \rceil, n)$ qui contient lui-même $Hex(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n)$ comme sous-graphe isométrique (voir la Figure 24). D'où :

$$\frac{n-1}{4} \leq \frac{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}{2} \leq \delta(G'_n) \leq \frac{\lceil \frac{n}{2} \rceil}{2} \leq \frac{n+1}{4} \text{ d'après la Proposition 42.}$$

En pratique, nous avons observé que la borne supérieure était toujours atteinte quand $n \equiv 3 \pmod{4}$, et la borne inférieure toujours atteinte quand $n \equiv 1 \pmod{4}$. \square