



Guillaume Costeseque



Modélisation du trafic routier : passage du microscopique au macroscopique

Mémoire de master MEGA
I Prix abertis



chaire abertis



Guillaume Costeseque

Modélisation du trafic routier : passage du microscopique au macroscopique

Mémoire de master MEGA

I Prix abertis

chaire abertis

Première édition : avril 2012

© Guillaume Costeseque

© **Chaire abertis-Ecole des Ponts ParisTech-IFSTTAR**

Ecole des Ponts ParisTech

6 et 8 avenue Blaise Pascal

Cité Descartes, Champs-sur-Marne

77455 Marne-la-Vallée cedex 2

Contact : Aurélie Touchard

Tél : 33 00 1 64 15 34 12

aurelie.touchard@enpc.fr

Conception graphique : Vicenç Marco Design

Portail

L'appel à candidatures pour le premier Prix **abertis** en France de recherche en gestion d'infrastructures de transport a rencontré une participation importante, avec neuf travaux présentés dans la catégorie de Master ou Projet de fin d'étude, et six autres dans la modalité de Thèse de doctorat. Les recherches ont été effectuées dans six centres universitaires du pays. Un travail de fin d'études et deux thèses de doctorat ont été récompensés et publiés.

Le Prix **abertis** est une initiative de la **chaire abertis-ENPC-IFSTTAR**, inaugurée en janvier 2011. Il s'agit de la première chaire de gestion d'infrastructures de transport qu'**abertis**, groupe international opérant dans les secteurs des autoroutes, des télécommunications et des aéroports, inaugure dans un pays autre que l'Espagne, en accord avec l'École des Ponts ParisTech (ENPC), l'Institut français des sciences et technologies des transports, de l'aménagement et des réseaux (IFSTTAR) et la Fondation des Ponts.

L'ouverture de cette chaire est un pas de plus vers la création d'un réseau international de chaires spécialisées et de l'organisation d'un prix de recherche internationale, qui récompensera son premier gagnant au cours de l'année 2012. Ce réseau et ce prix prendront de l'importance au fur et à mesure qu'**abertis** inaugurera de nouvelles chaires dans les pays où le groupe exerce ses activités.

La première expérience d'**abertis** en faveur du transfert de savoirs entre l'université et l'entreprise, dans le cadre des actions de responsabilité sociale de l'entreprise, est née en 2003 avec la création de la première chaire pour la recherche et la formation en matière de gestion d'infrastructures de transport en accord avec l'Université polytechnique de Catalogne (UPC). Depuis, le groupe a élargi cette initiative à d'autres institutions académiques prestigieuses, conscient du fait que ses efforts contribuent au développement économique et social du territoire. Le site web **www.catedrasabertis.com** témoigne des résultats obtenus jusqu'à présent. Au total, les différentes chaires ont organisé une multitude de journées, de séminaires et de cours, et produit un grand nombre de recherches, publications, articles et cas d'étude, mis à la portée de l'ensemble de la société.

Nous espérons que les travaux produits, qui sont publiés maintenant, vous intéresseront et contribueront au progrès et à la diffusion des connaissances.



Presentation

Created in January 2011, the **abertis chair** Ecole des Ponts ParisTech IFSTTAR aims to develop training and research activities in the field of transport infrastructure management.

To stimulate innovation and attract the interest of students to this area, the chair creates in France the **abertis** price of transport infrastructure management. This national award recognizes a thesis, a Master's thesis or a project graduation, completed during the civil year 2011 and presenting an innovative work in analysis and modeling.

The launch of the first price of the chair resulted in a large diffusion on websites and near the doctoral schools of universities and engineering schools, and thus until the end of 2011. After this period, nine submissions were received in the category Master thesis. They cover the following topics: road traffic modeling, simulation of traffic operations, environmental consequences of public transportation's promotion, control on an interchange, assessment of speed limits impacts, trip modeling, numerical modeling of soil mixing columns, updating safety models of annual fatal accidents in Europe, transportation engineering as a lever to planning a sustainable urban infrastructure, electric mobility and new trends in management and design of urban services.

The winner of the first **abertis** price in the category Master thesis is Mr. Guillaume Costeseque from ENTPE, Lyon, for his dissertation entitled "Road traffic analysis and modeling: from microscopic to macroscopic scale".

In this Master thesis, the mathematical transition between microscopic and macroscopic models is rigorously established for the first order models. The work focuses on the justification of the relationship between the approximation obtained by discretization at both scales. The existing link between them is highlighted with real data, thus providing a new and comprehensive view of traffic.

Prof. **Simon Cohen**

Director of the **abertis chair** Ecole des Ponts IFSTTAR



ANALYSE ET MODELISATION DU TRAFIC ROUTIER : **Passage du microscopique au macroscopique**

Mémoire de master MEGA – Génie Civil

COSTESEQUE Guillaume

Transports - Exploitation des Infrastructures
Promotion 56

Avril – septembre 2011

Président du jury : M. LECLERCQ Ludovic
Maître de MASTER : M. LEBACQUE Jean-Patrick
Co-encadrant : M. MONNEAU Régis
Rapporteur : Mme BUISSON Christine
Expert : M. CANTIN Richard

NOTICE ANALYTIQUE

	NOM	PRENOM	
AUTEUR	COSTESEQUE	Guillaume	
TITRE DU MASTER	Modélisation du trafic routier : passage du microscopique au macroscopique		
	ORGANISME D'AFFILIATION ET LOCALISATION	NOM PRENOM	
MAITRE DE MASTER	GRET'TIA – IFSTTAR CERMICS - ENPC	M. LEBACQUE Jean-Patrick M. MONNEAU Régis	
COLLATION	Nbre de pages du rapport : 103	Nbre d'annexes : 5 Nbre de pages : 15	Nbre de réf. biblio. 70
MOTS CLES	Modélisation, trafic routier, microscopique, macroscopique, homogénéisation		
RESUME	<p>La modélisation du trafic routier fait intervenir différentes échelles d'observation. Il est alors possible de distinguer chacun des modèles selon la finesse de leur approche. Nous distinguons classiquement les modèles microscopiques et les modèles macroscopiques. Les premiers s'appliquent à représenter l'évolution individuelle des véhicules tandis que les seconds s'intéressent à l'écoulement global du flux de véhicules.</p> <p>La simulation du trafic routier fait désormais apparaître de réels besoins en termes de liens mathématiques cohérents entre ces deux échelles de représentation. Peu de travaux proposent un passage rigoureux du microscopique au macroscopique. Ce travail souhaite mettre en avant ce besoin et se propose d'explicitier une réponse à ce problème. De plus, nous soulignons sur un cas d'étude la nécessité d'une cohérence entre échelles microscopique et macroscopique. Pour cela, nous analyserons les mesures de trafic issues du programme NGSIM selon les deux échelles, tout en essayant de souligner le lien existant entre elles.</p>		
ABSTRACT	<p>Traffic modeling involves different observation scales. It is then possible to characterize each model depending on their precision of approach. Typically, one can distinguish microscopic and macroscopic models. The first ones apply to represent the individual evolution of vehicles while the second ones want to reproduce the flowing stream of road users.</p> <p>Henceforth, traffic simulation highlights a real need in terms of rigorous passage between both representation scales. Few works offer such a link from the microscopic models to the macroscopic ones. This work seeks to highlight this need and purposes one mathematical solution. Moreover, it searches for coherence between microscopic and macroscopic scales. In that way, the traffic database extracted from the NGSIM program is analyzed according to both scales, trying to stress on the existing link between them.</p>		

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier tout particulièrement Messieurs LEBACQUE et MONNEAU qui m'ont donné la chance de pouvoir travailler à leurs côtés durant cette période de stage. Je les remercie aussi de m'avoir soutenu quant à ma candidature à une thèse, thèse que je réaliserai sous leur co-encadrement à compter d'octobre prochain.

J'ai également à cœur de remercier l'ensemble des membres de l'équipe du GRETIA ainsi que ceux de l'équipe du CERMICS qui ont facilité mon intégration et ont su m'accompagner durant ces mois de travail, parfois délicats et perturbés.

Mes remerciements vont également à l'endroit de M. LECLERCQ, Mme BUISSON et M. CANTIN qui ont accepté de tenir les rôles respectifs de président, de rapporteur et d'expert pour ce mémoire de stage de master. Egalement, que toutes les personnes ayant accepté d'apporter leur contribution directe ou indirecte à ce travail se trouvent ici remerciées.

Enfin, mes pensées et mes plus profonds remerciements sont à l'égard de mes proches qui ont accepté et supporté mon absence du domicile familial durant les trois premiers mois de ce travail et d'avance merci pour les moments merveilleux que nous allons encore passer ensemble à l'avenir.

SOMMAIRE

REMERCIEMENTS	1
SOMMAIRE	3
LISTE DES ILLUSTRATIONS	5
INTRODUCTION	7
1 ETAT DE L'ART	9
1.1 Préliminaires	9
1.2 Modèles d'écoulement	10
1.2.1 Notations	11
1.2.2 Modèles microscopiques	14
1.2.3 Modèles macroscopiques	21
1.3 Synthèse	29
2 MATHEMATICAL PASSAGE FOR FIRST ORDER MODEL	30
2.1 Preliminaries	30
2.1.1 Notations	30
2.1.2 Considered microscopic models	30
2.1.3 Hypothesis	31
2.1.4 Conservation of initial vehicles order	32
2.1.5 PDE for the microscopic model	33
2.2 Viscosity solution	34
2.2.1 Definitions	34
2.2.2 Uniqueness and comparison principle	37
2.2.3 Convergence and error estimation	43
2.2.4 Transition to macroscopic variables	48
2.3 Delayed first order model	50
2.3.1 Discussion	50
2.3.2 Comparison principle for ODEs with delay	52
2.4 Opening to the second order model	56
3 ETUDE EN SIMULATION	58
3.1 Comparaison entre microscopique et macroscopique	58
3.1.1 Présentation des données	58
3.1.2 Prétraitement des données	60
3.1.3 Modèle microscopique	61
3.1.4 Modèle macroscopique	63

3.2 Etude du modèle premier ordre avec temps de retard	66
3.2.1 Amélioration mathématique formelle	66
3.2.2 Description du mode opératoire	68
3.2.3 Récapitulatif des résultats	70
3.3 Analyse du Travail	74
3.3.1 Limites	74
3.3.2 Pistes d'amélioration	75
3.3.3 Perspectives d'études	76
CONCLUSION	78
LEXIQUE	80
ANNEXES	81
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES	98

LISTE DES ILLUSTRATIONS

Figure 1.1 : Notations microscopiques	11
Figure 1.2 : Illustration de la notion de débit.....	12
Figure 1.3 : Illustration de la notion de concentration	12
Figure 1.4 : Illustration de la notion de vitesse de flot	13
Figure 1.5 : Illustration de la notion de vitesse moyenne spatiale.....	13
Figure 1.6 : Illustration de la notion de vitesse moyenne temporelle.....	13
Figure 1.7 : Modèle de poursuite à vitesse optimale de Bando.....	18
Figure 1.8 : Exemple de modèle de poursuite psycho-physique.....	20
Figure 1.9 : Profil de densité utilisé par [Daganzo, 1995]	25
Figure 1.10 : Diagramme fondamental – [Daganzo, 1993].....	26
Figure 1.11 : Principe du « cell transmission » – [Daganzo, 1993].....	27
Figure 2.1 : Vehicles order axis.....	30
Figure 2.2 : Considered bounded set.....	35
Figure 2.3 : Parabolic border of the bounded set.....	36
Figure 2.4 : Initial situation	50
Figure 2.5 : General form of the tested speed function	51
Figure 2.6 : Example of dumped oscillations.....	51
Figure 3.1 : Système d’acquisition de mesure NGSIM.....	58
Figure 3.2 : Photo aérienne du site de mesure NGSIM.....	59
Figure 3.3 : Diagrammes fondamentaux pour la simulation	62
Figure 3.4 : Simulation des trajectoires individuelles, d’après données NGSIM.....	62
Figure 3.5 : Représentations de l’écoulement sur la voie 2, période 17h00 -17h15, d’après NGSIM	64
Figure 3.6 : Diagramme fondamental proposé pour la simulation macroscopique, d’après NGSIM	65
Figure 3.7 : Situation initiale de la simulation	69
Figure 3.8 : Présentation de la loi de vitesse microscopique	69
Figure 3.9 : Découpage du plan en zones de « fonctionnement » du modèle premier ordre avec temps de retard	70
Figure 3.10 : Illustration du modèle premier ordre avec temps de retard pour la zone de « fonctionnement » (1).....	71
Figure 3.11 : Illustration du modèle premier ordre avec temps de retard pour la zone de « fonctionnement » (2).....	71
Figure 3.12 : Illustration du modèle premier ordre avec temps de retard pour la zone de « fonctionnement » (3) et (4).....	72
Figure 3.13 : Illustrations de deux cas simples et classiques de nœuds de réseaux.....	76
Figure 0.1 : Définition des fonctions d’offre et de demande [Lebacque, 1996]	83
Figure 0.2 : Histogramme des vitesses, d’après données NGSIM.....	92
Figure 0.3 : Histogramme des interdistances (mètres), d’après données NGSIM	92
Figure 0.4 : Exemples de courbes vitesse relative en fonction de l’interdistances, d’après données NGSIM	92

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1 : Proposition de valeurs pour les paramètres (m, l) du modèle GHR	17
Tableau 2 : Formes de relation fondamentale pour les modèles macroscopiques du premier ordre	23
Tableau 3 : Différentes expressions pour la célérité caractéristique intervenant dans les modèles macroscopiques de second ordre.....	25
Tableau 4 : Studied microscopic models classes	31
Tableau 5 : Description des données contenues dans la base de données NGSIM.....	59
Tableau 6 : Quelques statistiques pour le choix de la voie d'étude	60
Tableau 7 : Comportement du modèle avec temps de retard selon différents cas	72

INTRODUCTION

Depuis quelques années, le trafic routier attire tout particulièrement l'attention de l'opinion publique. Avec la montée en puissance des préoccupations environnementales et devant l'urgence de la situation, la congestion routière est de moins en moins acceptée par les parties prenantes du phénomène et notamment par les usagers. Aujourd'hui, les voies rapides urbaines des principales agglomérations connaissent une congestion importante et grandissante. Cela représente de nombreuses heures perdues par les usagers mais aussi des pollutions supplémentaires de diverses natures. Cela a donc un coût tant économique qu'environnemental. Afin d'améliorer les conditions de trafic sans pour autant élargir les voies existantes, les gestionnaires de réseaux font désormais l'usage de dispositifs de régulation, à l'image de la régulation d'accès ou de la régulation dynamique des vitesses.

Mais aujourd'hui, les exploitants se tournent également vers de nouvelles solutions qui rendent les couples véhicules-conducteurs, véritables acteurs des systèmes de régulation. En effet, avec le développement fulgurant des technologies de l'information et de la communication lors des dernières décennies, l'avenir de l'automobile semble étroitement lié à l'utilisation de systèmes innovants pouvant permettre entre autres, d'agir sur le comportement de conduite. Nous parlons alors de systèmes de transport intelligents (aussi dénommés ITS pour *Intelligent Transport Systems*). Dans la perspective de l'émergence de ces systèmes coopératifs de transport, pouvant proposer des interactions de communication entre véhicules ou entre véhicules et système global, l'enjeu sera de pouvoir prédire les spécificités du comportement macroscopique induit par ces interactions microscopiques.

Dans l'esprit des recherches déjà entreprises notamment au sein des unités du CERMICS (Centre d'Enseignement et de Recherches en Mathématiques, Informatique et Calcul Scientifique) ainsi que celles du GRETTIA (Génie des Réseaux de Transports Terrestres et Informatique Avancée), ce travail se propose d'aborder le problème de passage du microscopique au macroscopique dans le domaine du trafic routier. Le problème lié à cet enjeu est relativement complexe : les véhicules sont trop nombreux pour que l'on puisse connaître tous les éléments nécessaires à la description et à la prédiction de leurs trajectoires individuelles mais aussi pour en déduire un comportement macroscopique. A contrario, ils ne sont pas suffisamment nombreux pour que l'on puisse leur appliquer les concepts de la physique des milieux continus, comme cela est généralement pratiqué pour les fluides. Le travail de stage a donc pour but de proposer un lien mathématique entre modèles microscopiques et modèles macroscopiques.

Les principaux résultats de ce travail de master ont été de mettre en évidence un théorème de convergence et un théorème d'estimation d'erreur pour les modèles du premier ordre. Le premier théorème caractérise la convergence de la solution discrète de l'équation d'évolution microscopique vers une solution continue de l'équation d'écoulement macroscopique. Le second théorème permet de quantifier l'erreur commise lorsqu'il est considéré le modèle discret en lieu et place du modèle continu. Ce travail a également permis de vérifier l'existence d'un principe de comparaison qui nous permet de montrer la conservation de l'ordre des véhicules. Le dernier résultat mis à jour par ce travail est l'existence d'un temps de retard critique au-delà duquel il est incorrect de considérer une approximation basée sur les développements limités de Taylor.

Ce mémoire de master se structure autour de trois parties majeures. Dans un premier temps, nous nous proposons de réaliser l'état de l'art de la modélisation du trafic routier. Cet état de l'art nous permettra en outre de dégager un certain formalisme des modèles classiquement usités. Dans un second temps, nous proposerons une approche mathématique du passage microscopique-macroscopique, faisant intervenir une technique d'homogénéisation et la notion de solutions de viscosité. Nous attirons l'attention de notre lecteur sur le fait que cette partie a été exclusivement rédigée en anglais dans l'optique de la rédaction d'un article destiné à être publié. Enfin, l'objet du stage étant d'étudier la question de la dynamique émergente dans un contexte très simple, nous nous appuyerons sur des mesures microscopiques de trafic, à savoir les données issues du programme NGSIM (*Next Generation Simulation*). Il s'agira alors de s'interroger sur la cohérence entre les deux approches, par simulation numérique.

1 ETAT DE L'ART

Afin de pouvoir cibler le plus précisément possible les modèles de trafic qu'il serait intéressant de prendre en compte dans le cadre de ce travail, il était important de pouvoir réaliser une analyse bibliographique des modèles existants. Cette analyse sera complétée en annexe du travail par un état des lieux de la pratique de la modélisation routière en France.

1.1 Préliminaires

Tout d'abord, il est important d'attirer l'attention du lecteur sur les différences de dénominations des approches de modélisation. En effet, il apparaît que les appellations semblent varier selon les personnes qui les utilisent. Ainsi, au niveau des bureaux d'études, la dénomination « macroscopique » est essentiellement donnée à la modélisation statique à l'échelle du réseau d'une grande maille. A contrario, la modélisation « microscopique » désigne davantage l'écoulement dynamique de la demande de transport. Dans le cadre de ce travail, nous nous intéressons aux définitions du « microscopique » et du « macroscopique » adaptée aux modèles d'écoulement du trafic routier : cela s'apparente donc à la différence d'échelle utilisée dans la description de l'écoulement dynamique.

La problématique de la modélisation du trafic routier suscite un vif intérêt parmi le cercle scientifique depuis plus d'une soixantaine d'années. L'esprit général de la modélisation du trafic est de pouvoir reproduire la réalité physique à l'aide de modèles qui permettent d'améliorer la compréhension du phénomène réel complexe. Il est possible de décrire le trafic routier très trivialement comme étant le transport de personnes et/ou d'objet depuis un endroit géographique de départ appelé l'origine, vers un autre endroit d'arrivée, dénommé destination. Le processus de transport se définit alors comme étant le parcours d'un chemin donné, permettant de relier l'origine à la destination. Le trafic routier résulte alors de la somme de comportements individuels des usagers cherchant à rejoindre ainsi une certaine destination, depuis leurs points d'origine.

La modélisation du trafic au sens large comprend à minima deux stratégies d'approche différentes. En effet, la modélisation du trafic routier est classiquement scindée en deux branches, distinctes mais non indépendantes. La première est reliée à l'étude du processus d'affectation des usagers sur un réseau donné. Il s'agit ainsi de pouvoir représenter la façon dont se répartissent le volume connu d'individus (définissant une demande) sur un ensemble donné de chemins, formant un réseau d'infrastructures possédant des caractéristiques (formant l'offre). La seconde branche, complémentaire de la première dans le sens où elle exploite les résultats de cette affectation, se propose de décrire plus finement l'écoulement des véhicules sur un chemin fixé. Il s'agit dans ce cas de comprendre les comportements des usagers en poursuite ou encore les phénomènes d'insertion et de changements de voie. L'étude de l'écoulement du trafic a aussi pour ambition de pouvoir décrire et expliquer les phénomènes de congestion.

Nous nous intéressons tout particulièrement à la modélisation de l'écoulement du trafic sur un réseau donné. L'autre voie destinée à modéliser l'affectation des usagers sera partiellement abordée en annexe de ce travail, afin de prendre du recul sur l'utilisation concrète de la modélisation dans les métiers de l'ingénierie routière en France.

1.2 Modèles d'écoulement

Dans la grande majorité des approches de modélisation, le trafic automobile est assimilé à un fluide où les véhicules sont identifiés à des particules en interaction. Ces interactions ont été étudiées avec soin depuis le milieu du XX^{ème} siècle et ont permis de dégager un grand nombre de lois de comportement. Celles-ci permettent par exemple de construire des modèles microscopiques très utiles, en particulier pour la conception et pour la simulation à petite échelle du trafic. Cependant, ces modèles microscopiques se révèlent n'être plus cohérents pour de nombreuses autres applications telles que la gestion du trafic, la planification et l'évaluation des réseaux. En effet, l'utilisation de ces modèles est parfois limitée par l'impossibilité d'avoir accès à la description détaillée des dynamiques individuelles des véhicules. Dans ces cas, l'utilisation de modèles macroscopiques s'impose.

A l'image des classifications usuelles proposées par la littérature, nous considérons les modèles de trafic selon le niveau de détail qu'ils proposent. Nous distinguerons ainsi les modèles microscopiques des modèles macroscopiques. Nous faisons volontairement l'impasse sur l'existence des modèles dits mésoscopiques qui permettent de caractériser le comportement du trafic selon des paquets de véhicules. Notons que la classification des modèles pourrait également s'effectuer selon leur mise en œuvre ou encore la représentation du phénomène.

A l'échelle la plus fine à savoir l'échelle microscopique, le trafic routier se modélise par l'évolution individuelle de chaque véhicule. Dans ce modèle, la vitesse d'un véhicule est directement fonction de la distance qui le sépare du véhicule le précédant (véhicule *leader*), modulo un temps de retard. Ce temps de retard est généralement assimilé au temps de réaction du conducteur afin de prendre en compte les variations de comportement de son véhicule *leader*. Il s'agit d'un modèle de poursuite.

A l'échelle la plus grande, le modèle le plus simple est le modèle développé par Lighthill-Whitham et Richards, également appelé LWR. Il s'agit d'une équation hyperbolique non linéaire. Dans celle-ci, la vitesse des véhicules est supposée être une fonction de la densité de véhicules. Ce modèle peut être obtenu par le passage à la limite du modèle microscopique de poursuite présenté ci-dessus, dans le cas où le temps de retard est négligeable. Dans les cas contraires où il n'est pas possible de négliger le temps de retard, les modèles de trafic sont complétés en un système couplé de deux équations aux dérivées partielles. L'une porte sur le champ de vitesses et l'autre sur la densité de véhicules. Ce sont les modèles macroscopiques de second ordre.

Actuellement, dans le cas d'une section courante unidirectionnelle, le lien entre le schéma macroscopique et l'approximation microscopique est relativement bien établi grâce aux solutions de discrétisation. Nous pouvons ainsi citer l'exemple des schémas numériques du type de celui proposé par Godunov dans [Godunov, 1959]. En revanche, peu de travaux ont pu expliciter le passage général de la modélisation microscopique au modèle macroscopique. Les travaux de [Bando, 1995] ou encore [Aw et al., 2002] par exemple établissent un modèle macroscopique à partir de modèles microscopiques. Cependant, cela n'offre qu'une réponse partielle au problème puisque le passage ne reste valable que pour les modèles considérés.

1.2.1 Notations

Nous commençons par une rapide présentation des notations utilisées par la suite. Notons tout d'abord le temps par la variable $t > 0$.

Dans le cas des modèles microscopiques, nous utiliserons les notations suivantes :

- La position du véhicule i au temps t , notée $x_i(t)$;
- La vitesse instantanée du véhicule i au temps t , notée $v_i(t) = \dot{x}_i(t)$;
- L'accélération du véhicule i au temps t , notée $a_i(t) = \ddot{x}_i(t)$. Nous noterons $b_i(t) = \ddot{x}_i(t)$, $b_i(t) < 0$ la décélération du véhicule i au temps t ;
- La longueur du véhicule i notée L_i .
- L'interdistance entre le véhicule i et son véhicule *leader* ($i-1$) au temps t , notée $S_i(t) = x_{i-1}(t) - x_i(t)$;
- La vitesse relative du véhicule i par rapport à son véhicule *leader* ($i-1$) au temps t , notée $\dot{S}_i(t) = \dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t)$;

Ces notations sont reprises sur l'illustration ci-dessous.

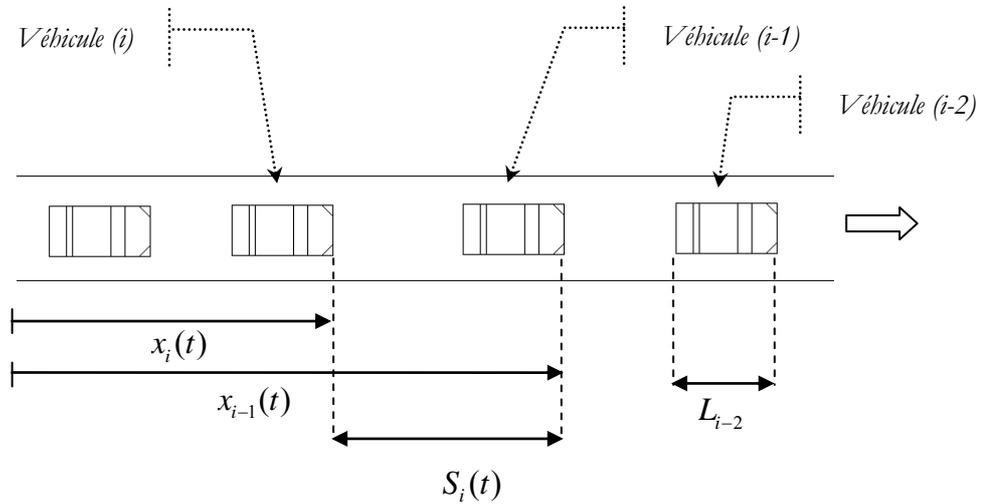


Figure 1.1 : Notations microscopiques

Dans le cas des modèles macroscopiques, nous introduisons les variables qui suivent :

- Le nombre de véhicules noté $N(x, t)$;
- Le débit noté classiquement $Q(x, t)$ correspondant au nombre de véhicules s'écoulant à un point d'abscisse x et au temps t par unité de temps ;

$$Q(x, t) = \frac{N(x, t \rightarrow t + dt)}{dt}$$

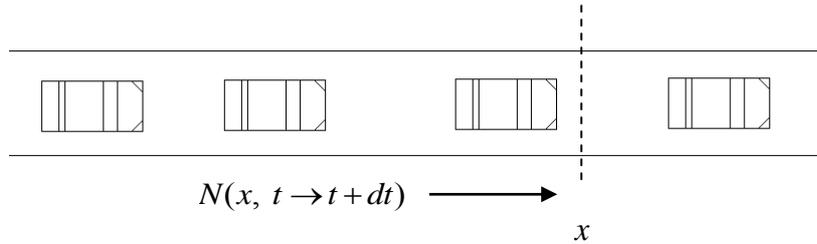


Figure 1.2 : Illustration de la notion de débit

- La concentration (appelée également densité spatiale instantanée) notée $K(x, t)$ correspondant au nombre de véhicules par unité de longueur se trouvant sur une section voisine du point d'abscisse x , au temps t ;

$$K(x, t) = \frac{N(x \rightarrow x + dx, t)}{dx}$$

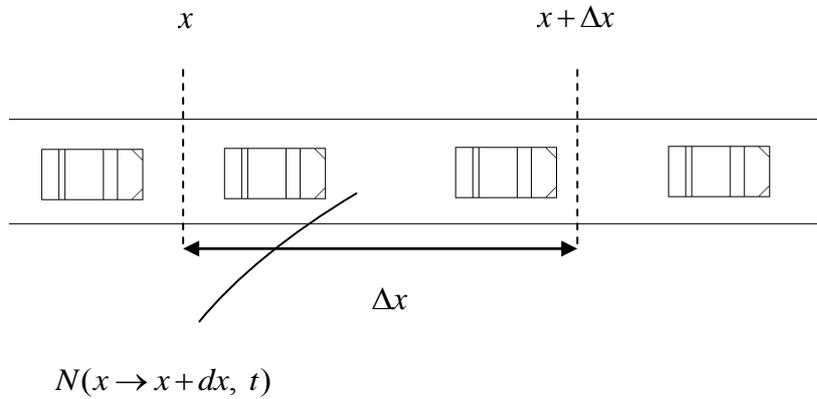


Figure 1.3 : Illustration de la notion de concentration

- La vitesse de flot, notée $V(x, t)$ correspondant à la vitesse moyenne spatiale des véhicules situés dans la section $[x ; x - \Delta x]$ au temps t . Cette vitesse de flot est donnée par le rapport entre le débit instantané et la concentration.

$$V(x, t) = \frac{Q(x, t)}{K(x, t)}$$

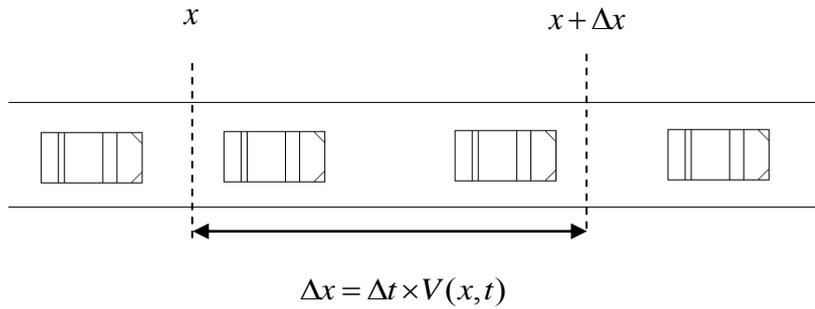


Figure 1.4 : Illustration de la notion de vitesse de flot

En outre, il est possible de montrer que la vitesse de flot est égale à la vitesse moyenne spatiale des vitesses individuelles.

La vitesse moyenne spatiale est définie par :

$$\bar{V}_s(x \rightarrow x + \Delta x, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

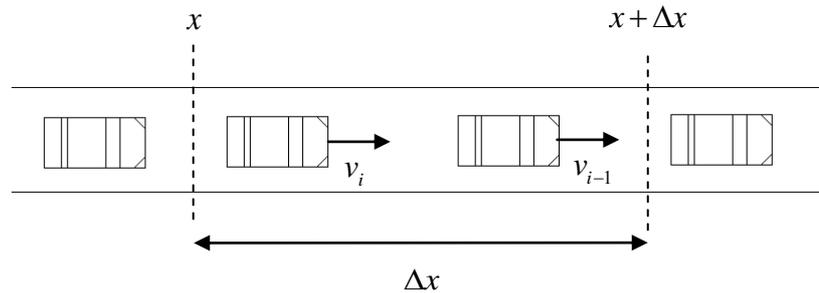


Figure 1.5 : Illustration de la notion de vitesse moyenne spatiale

La vitesse moyenne temporelle est quant à elle définie par :

$$\bar{V}_T(x, t \rightarrow t + \Delta t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i$$

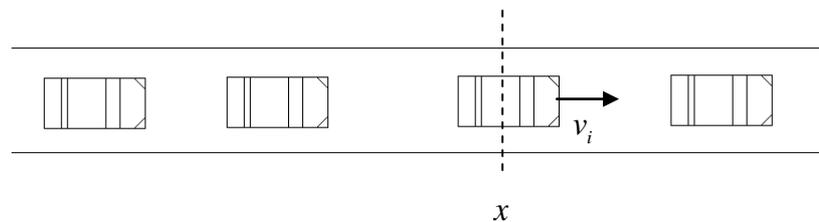


Figure 1.6 : Illustration de la notion de vitesse moyenne temporelle

1.2.2 Modèles microscopiques

Classiquement, les modèles microscopiques ont pour principale vocation de pouvoir décrire les comportements individuels des usagers pour deux situations de conduite :

- Le comportement en poursuite, correspondant au comportement d'un conducteur en réponse aux actions du véhicule qui le précède ;
- Le comportement de changement de voie au sens large. Cela comprend les manœuvres de dépassement en section courante tout comme les manœuvres d'insertion.

Par la suite, nous nous intéressons essentiellement aux modèles dits de poursuite car nous nous limiterons dans notre étude à un travail sur une section où nous ne considérerons pas de phénomènes de dépassement ou d'insertion. De plus, notons que la littérature ne propose encore que peu de travaux sur le sujet des changements de voie. Citons tout de même [Ahmed et al., 1996], [Hidas, 2002], [Laval et Daganzo, 2006] et [Laval et Leclercq, 2008].

Dans le cas des modèles de poursuite, il est courant de distinguer deux cas types de conduite :

- Le véhicule ne perçoit pas le véhicule qui le précède du fait d'un écart intervéhiculaire suffisamment important et dans ce cas, le conducteur circule à sa vitesse maximale désirée. Il s'agit du cas de conduite libre ;
- Le conducteur souhaite circuler à sa vitesse libre mais son véhicule *leader* ne le lui permet pas, le contraignant ainsi à adopter une vitesse inférieure à sa vitesse désirée. Il s'agit alors du cas de conduite en poursuite où le véhicule entretient de fortes interactions avec son véhicule *leader*.

Les modèles de poursuite se proposent essentiellement de reproduire le comportement de conduite d'un véhicule lorsque sa propre vitesse est contrainte par le véhicule précédent.

1.2.2.1 Modèles à distance de sécurité

Ces modèles cherchent à décrire simplement la dynamique du seul véhicule en relation avec son prédécesseur, de sorte à respecter une certaine distance de sécurité. Un des premiers modèles à avoir été développé sur cette idée-là est le modèle simple de Pipes [Pipes, 1953]. Ce modèle supposait la règle d'interdistance minimale suivante : « une bonne règle pour suivre un autre véhicule à une distance sûre est de laisser au moins l'équivalent d'une longueur de son propre véhicule tous les dix *miles* par heure [soit 16,1 km/h] ». Cela nous donne la relation suivante :

$$S_{i, \text{ sécurité}}(t) = L_i \cdot \left(1 + \frac{v_i(t)}{16,1} \right)$$

Dans ce modèle, la distance minimale de sécurité $S_{i, \text{ sécurité}}(t)$ augmente linéairement avec la vitesse du véhicule $v_i(t)$. [Forbes et al., 1958] ont proposé une approche relativement similaire.

Il est également possible de distinguer les modèles dits de *collision avoidance* (CA) soit littéralement, modèles de prévention des accidents. Le premier développement d'un modèle de ce type a été effectué par Kometani et Sasaki dans [Kometani et al., 1959]. Leur travail ne cherche pas à reproduire un caractère de poursuite entre deux véhicules du type de la réponse à un changement dans le comportement de conduite du véhicule *leader*. Le modèle vise plutôt à retranscrire la trajectoire d'un véhicule en fonction d'une distance de sécurité minimale. Le développement de ce

type de modèles s'appuie sur une utilisation des simples équations newtoniennes du mouvement. Le modèle de Kometani et Sasaki spécifie que l'interdistance minimale permettant d'éviter toute collision est donnée par :

$$S_{i, \text{ sécurité}}(t) = \alpha \cdot v_{i-1}^2(t) + \beta \cdot v_i^2(t+T) + \gamma \cdot v_i(t+T) + \delta$$

Les coefficients α et β représentent l'inverse de la capacité maximale de décélération respectivement du véhicule *leader* et du véhicule suiveur. Le coefficient γ est homogène à l'inverse d'un temps et δ est homogène à une distance. Ce sont des paramètres du modèle à calibrer. Le temps T nécessaire à la prise en compte d'une modification de vitesse du conducteur peut être interprété comme un temps de réaction. Cependant, les travaux de Kometani et Sasaki ne permettent pas de dire si ce temps a été réellement considéré comme un temps de réaction, d'où la simple notation T et non pas T_r .

Les travaux de [Gipps, 1981] ont eu pour but de compléter cette approche initiale en incorporant une vitesse maximale désirée $V_{i, \text{ désirée}}$ ainsi qu'un un taux de freinage maximal b_i^{\max} , s'apparentant aux termes cinétiques de l'équation précédente. Ainsi, la vitesse du véhicule est définie par la valeur minimale entre $v_i^a(t+T_r)$ la vitesse qu'il peut réellement atteindre d'un point de vue dynamique et $v_i^b(t+T_r)$ la vitesse qu'il est possible d'adopter en connaissant les contraintes de sécurité liées à la présence du véhicule *leader*. Cela s'exprime comme suit :

$$v_i(t+T_r) = \min(v_i^a(t+T_r), v_i^b(t+T_r))$$

$$\begin{cases} v_i^a(t+T_r) = v_i(t) + 2,5 \cdot a_i^{\max} \cdot T_r \cdot \left(1 - \frac{v_i(t)}{V_{i, \text{ désirée}}}\right) \sqrt{0,025 + \frac{v_i(t)}{V_{i, \text{ désirée}}}} \\ v_i^b(t+T_r) = b_i^{\max} \cdot T_r + \sqrt{b_i^{\max} \cdot 2 \cdot T_r^2 - b_i^{\max} \left[2 \{S_i(t) - \hat{S}_i\} - v_i(t) \cdot T_r - \frac{v_{i-1}(t)^2}{\hat{b}_{i-1}^{\max}}\right]} \end{cases}$$

La quantité \hat{S}_i représente une interdistance minimale ; elle prend en compte la longueur du véhicule *leader* ainsi qu'une distance minimale dans laquelle le véhicule suiveur ne pénètre jamais, même à l'arrêt. La décélération maximale du véhicule *leader* est estimée visuellement par le conducteur du véhicule suivant ; elle est exprimée par \hat{b}_{i-1}^{\max} .

Ce type de modèle semble relativement facile à calibrer. Certains auteurs ont souligné que ce modèle permettait d'obtenir des résultats bien souvent conformes aux observations. Il est par ailleurs utilisé par plusieurs logiciels de simulation du marché dont SISTIM, CARSIM mais également par AIMSUN.

L'idée que le conducteur tente de circuler à la vitesse la plus élevée possible tout en évitant la collision avec son prédécesseur a été reprise par Krauss dans [Krauss, 1997]. Ses travaux proposent un modèle discret en temps dans lequel la vitesse est recalculée selon le processus suivant :

- (i) On considère l'inéquation assurant que le véhicule (i) n'entre pas en collision lors d'un freinage avec son véhicule *leader* (i-1). Celle-ci est donnée par une relation sur les

distances de freinage du véhicule *leader* et du véhicule suiveur, fonctions des vitesses de chacun d'eux ;

- (ii) La vitesse permettant d'éviter la collision, appelée « vitesse sûre » est prise égale à la solution cette inéquation. Krauss assure alors que :

$$v_{i, \text{ sécurité}}(t) = v_{i-1}(t) + \frac{S_i(t) - v_{i-1}(t) \cdot T_r}{\frac{\bar{v}_i(t)}{\bar{b}_i(t)} + T_r} \text{ avec } \begin{cases} \bar{v}_i(t) = \frac{v_{i-1}(t) + v_i(t)}{2} \\ \bar{b}_i(t) = \frac{b_{i-1}(t) + b_i(t)}{2} \end{cases} . \text{ Le produit}$$

$v_{i-1}(t) \cdot T$ est considéré comme étant l'interdistance désirée et $b_i(t)$ est la décélération du véhicule, supposée identique pour l'ensemble des véhicules ;

- (iii) La vitesse désirée est alors prise égale à :

$$V_{i, \text{ désirée}} = \min(v_i(t) + a_i(t) \cdot \Delta t, v_{i, \text{ sécurité}}, v_{\max}) \text{ où } a_i(t) \text{ est l'accélération du véhicule et } v_{\max} \text{ la vitesse maximale règlementaire ;}$$

- (iv) La vitesse est alors mise à jour, en considérant que $v_i(t + \Delta t) = \max(0, v_{\text{désirée}} - \eta)$ où η représente une perturbation aléatoire introduite pour représenter les cas déviants d'une conduite optimale. Et ainsi, la position du véhicule est donnée par $x(t + \Delta t) = x(t) + v_i(t + \Delta t) \cdot \Delta t$.

1.2.2.2 Modèles de type réponse à un stimulus

Le principe de ces modèles peut être illustré par une relation linéaire de la forme suivante :

$$\text{réponse}(t + T_r) = \text{sensibilité} \times \text{stimulus}(t)$$

Ce type de modèles suppose l'existence d'une relation linéaire entre la vitesse ou l'accélération du véhicule à l'instant t (auquel s'ajoute parfois un temps de réaction T_r , non nul) et le différentiel de vitesse du véhicule et de son véhicule *leader* à l'instant t , selon un coefficient de sensibilité. Ainsi, un véhicule réagit en réponse à un stimulus symbolisé par une modification de sa vitesse relative.

Un des modèles pionniers est le modèle linéaire de Chandler, Herman et Montroll [Chandler et al., 1958] dont voici l'expression :

$$\ddot{x}_i(t + T_r) = \alpha \cdot (\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t))$$

Ce modèle présente l'expression de l'accélération du véhicule suiveur ($i+1$) en fonction de la sensibilité (homogène à l'inverse d'un temps) du conducteur au différentiel de vitesse entre les deux véhicules et d'un temps de réaction. De même, les travaux entrepris considèrent un temps de relaxation $\tau = \frac{1}{\alpha}$. Ce temps de relaxation à différencier d'un temps de réaction, traduit un temps caractéristique du système nécessaire pour retourner à l'équilibre.

Le modèle de Gazis, Herman et Rothery [Gazis et al., 1961], également connu sous la dénomination de modèle General Motors (GM), propose une expression généralisée pour le coefficient de sensibilité α . Le modèle de poursuite ainsi proposé est non linéaire :

$$\ddot{x}_i(t+T_r) = \beta \frac{\dot{x}_i^m(t+T_r)}{(x_{i-1}(t) - x_i(t))^l} (\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t))$$

Ce modèle permet de prendre en compte l'interdistance entre les deux véhicules. Les coefficients β , l et m sont des paramètres du modèle. Il est possible de retrouver le modèle linéaire de Chandler *et alii* dans le cas où $m=l=0$. Le coefficient de sensibilité est homogène au produit d'une longueur à la puissance $(l-m)$ par un temps à la puissance $(m-1)$.

De nombreuses études ont été menées afin de déterminer la combinaison « optimale » du couple de paramètres $(l; m)$ parmi lesquelles [Gazis et al., 1961], [May et Keller, 1967], [Heyes et Ashworth, 1972], [Ceder et May, 1976]. Ces études ont été très nombreuses durant les quinze années qui ont suivi la publication du modèle GRH ; peu de chercheurs ont persévéré ensuite dans cette voie. Le lecteur pourra se référer à [Brackstone et McDonald, 1999] pour plus de détails.

	Valeur de m	Valeur de l
Gazis et al. (1961)	$m \in [0; 2]$	$l \in [1; 2]$
Edie (1963)	$m = 1$	$l = 2$
May and Keller (1967)	$m = 0,8$	$l = 2,8$
Heyes and Ashworth (1972)	$m = -0,8$	$l = 1,2$
Ceder and May (1976)	$m = 0,6$	$l = 2,4$

Tableau 1 : Proposition de valeurs pour les paramètres (m, l) du modèle GHR

Citons également l'existence du modèle linéaire d'Helly [Helly, 1961]. Cette approche se base sur différents indices pour l'élaboration par le conducteur de la consigne d'accélération à appliquer à son propre véhicule.

$$\begin{cases} \ddot{x}_i(t+T_r) = C_1 \cdot (\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t)) + C_2 \cdot [(x_{i-1}(t) - x_i(t)) - S_i(t+T_r)] \\ S_i(t+T_r) = \alpha + \beta \cdot \dot{x}_i(t) + \gamma \cdot \ddot{x}_i(t) \end{cases}$$

Où $S_i(t+T_r)$ représente l'interdistance désirée. Egalement, C_1 , C_2 ainsi que α , β et δ sont des paramètres du modèle. Nous retrouvons le modèle de Chandler dans le cas où $C_2 = 0$.

Ce modèle est utilisé par les logiciels de simulation DYNASIM et également par SITRA.

1.2.2.3 Modèles à vitesse optimale

Un des premiers modèles s'appuyant sur une analyse des trajectoires des véhicules est le modèle de Newell [Newell, 1961]. Sa formulation est donnée par :

$$\dot{x}_i(t + T_r) = V_0(x_{i-1}(t) - x_i(t))$$

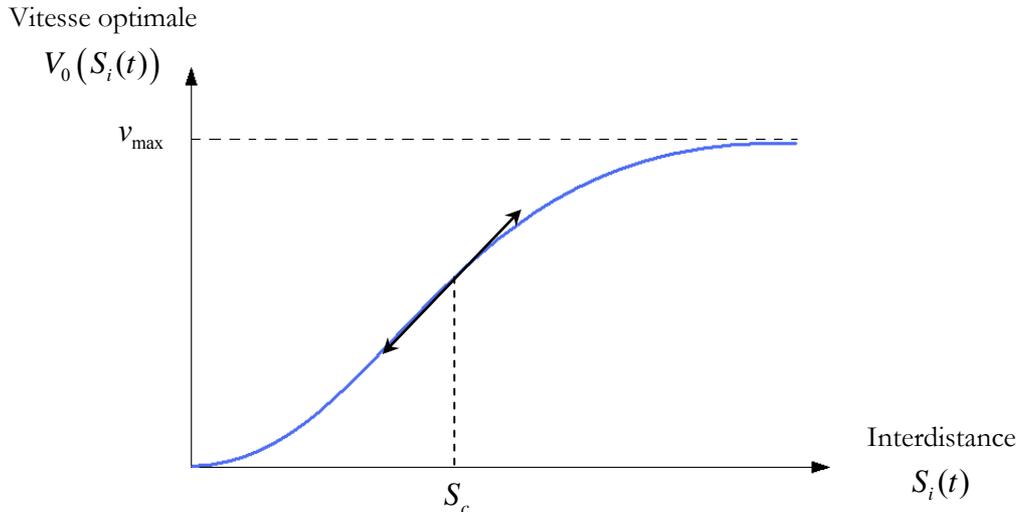
La fonction V_0 représente la vitesse optimale, correspondant à la vitesse jugée satisfaisante par le conducteur. Le temps Δt ne correspond plus à un temps de réaction du conducteur mais au temps nécessaire au changement de vitesse du véhicule.

Au milieu des années 90, Bando a introduit la notion de vitesse désirée, choisie comme étant une fonction de l'interdistance [Bando et al., 1995]. Cela a ouvert la voie au développement de modèles exploitant cette idée et baptisés « *optimal velocity models* » (OVM). L'accélération du véhicule est donnée par la relation suivante :

$$\ddot{x}_i(t + T_r) = \alpha \cdot [V_0(x_{i-1}(t) - x_i(t)) - \dot{x}_i(t)]$$

$$\text{Avec } V_0(x_{i-1}(t) - x_i(t)) = \frac{v_{\max}}{2} \cdot [\tanh(x_{i-1}(t) - x_i(t) - S_c) + \tanh(S_c)]$$

La fonction V_0 est la fonction dite de vitesse optimale. Le coefficient S_c est un paramètre de la vitesse optimale à calibrer. Il correspond à une interdistance caractéristique du comportement de poursuite.



Fonction de vitesse optimale de Bando

Figure 1.7 : Modèle de poursuite à vitesse optimale de Bando

Remarquons que le modèle de Bando peut être perçu comme étant un modèle issu du développement limité au premier ordre du modèle de Newell précédent.

1.2.2.4 Modèle de conducteur intelligent

Ce modèle Intelligent Driver Model (IDM) a été développé par M. Treiber dans [Treiber et al., 2000]. Ce modèle privilégie une définition de l'accélération mais n'intègre pas de temps de retard. Il s'appuie sur l'expression suivante :

$$\ddot{x}_i(t) = a \cdot \left[1 - \left(\frac{\dot{x}_i(t)}{V_0} \right)^\delta - \left(\frac{\tilde{S}}{x_{i-1}(t) - x_i(t)} \right)^2 \right]$$

$$\text{Où } \tilde{S} = S_0 + \dot{x}_i(t) \cdot T + \dot{x}_i(t) \cdot \left(\frac{\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t)}{2\sqrt{a \cdot b}} \right).$$

δ est un paramètre du modèle dont la valeur est généralement prise égale à 4. a et b sont respectivement l'accélération et la décélération maximales admissibles. V_0 et S_0 représentent respectivement la vitesse libre désirée et l'interdistance minimale admissible. Le paramètre T représente l'espace-temps désiré entre un véhicule et le véhicule le précédant.

1.2.2.5 Modèles d'automates cellulaires

Ces modèles microscopiques représentent l'écoulement du flot sous la forme d'une dynamique simple : l'évolution de cellules échangeant entre elles de l'information sous forme de véhicules. Un modèle d'automates cellulaires nécessite que les axes de l'espace et du temps soient discrétisés.

Bien que le premier modèle d'automate cellulaire appliqué au cas du trafic routier soit le modèle de [Cremer et Ludwig, 1986], le modèle le plus connu est celui de [Nagel et Schreckenberg, 1992]. Dans ce modèle, la vitesse des véhicules est considérée comme étant un nombre entier compris entre 0 et v_{\max} . La voie de circulation est représentée à chaque instant par un certain nombre de sections ; une section est soit libre, soit occupée par un et un seul véhicule. L'état des cellules est actualisé chaque pas de temps, en suivant des règles faisant intervenir les caractéristiques des plus proches voisines. Une étape d'aléa est incorporée au processus. Celle-ci permet de prendre en compte les différents comportements des conducteurs et permet aussi l'apparition spontanée de la congestion, classiquement observée *in situ*.

D'après [Farhi, 2008], un autre modèle classique d'automates cellulaires est le modèle de Biham-Middleton-Levine (BML) proposé dans [Biham et al., 1992]. Dans ce modèle, les véhicules se déplacent dans une ville à deux dimensions. Les véhicules considérés sont de deux types à savoir les « bleus » et les « rouges ». Les véhicules rouges se déplacent horizontalement de la gauche vers la droite tandis que les véhicules bleus se déplacent verticalement, de bas en haut. Nous prenons une certaine densité initiale de véhicules sur le réseau. La dynamique des véhicules est relativement simple : à chaque instant, les véhicules rouges essaient d'avancer tout en se dirigeant vers la droite puis les véhicules bleus essaient à leur tour d'avancer vers le haut. Un véhicule rouge (respectivement bleu) ne peut avancer que si la place immédiatement à droite (respectivement en haut) est libre. Les simulations numériques de ce modèle montrent l'existence d'une densité critique en dessous de laquelle les véhicules circulent librement et au dessus de laquelle un blocage complet du système se produit. Ces régimes s'établissent après un régime transitoire de longueur finie.

1.2.2.6 Autres modèles

Il existe un ensemble d'autres modèles microscopiques. Certains ouvrages comme [Brakstone et McDonald, 1999], [Helbing, 2001] ou encore [Hoogendoorn et al., 2001] proposent des développements de ces modèles originaux.

Soulignons toutefois l'existence de modèles dits psychophysiques qui se basent sur les aspects psychophysiques du comportement de conduite. Les principaux modèles de ce type sont le modèle présenté dans [Leutzbach, 1986] ainsi que le modèle de Wiedemann, [Wiedemann, 1974] et [Wiedemann, 1992]. Ce dernier modèle représente un processus de psycho-écart entre un véhicule et son véhicule *leader*, en fonction de sa vitesse relative. Le modèle de Wiedemann est à l'origine de nombreux logiciels de simulation microscopique comme VISSIM ; il est aujourd'hui également très utilisé dans le développement de la modélisation des flux piétons.

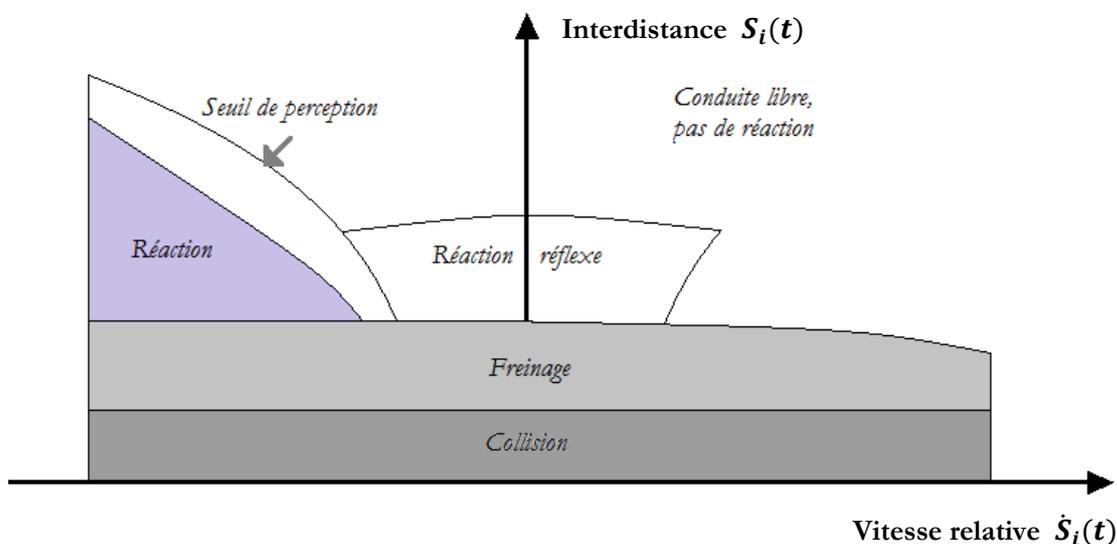


Illustration du modèle de Wiedemann

Figure 1.8 : Exemple de modèle de poursuite psycho-physique

1.2.2.7 Limites des modèles microscopiques

Classiquement, les critiques concernant les modèles de poursuite portent essentiellement sur les hypothèses simplificatrices des modèles. Ainsi, [Leclercq, 2002] souligne que :

- La plupart des modèles microscopiques considèrent les conducteurs comme étant uniformes. Notamment, une des hypothèses simplificatrices de ces modèles est de considérer que le temps de réaction est égal entre chaque conducteur. Il n'y a donc pas de prise en compte de la variabilité des conducteurs et donc des différences de comportements entre chacun d'eux ;
- Certains des modèles supposent une optimisation continue de la vitesse. Pourtant, des éléments psychologiques tendent à prouver qu'un conducteur ne va pas forcément augmenter sa vitesse même dans le cas où son prédécesseur augmente la sienne, notamment s'il souhaite accorder moins d'attention à sa tâche de conduite ;

- A contrario, le modèle GHR suppose que pour un différentiel de vitesse nul, l'accélération sera elle-aussi nulle pour toute valeur d'interdistance ; intuitivement, si un véhicule se retrouve relativement éloigné de son véhicule *leader*, même si au temps t les deux véhicules se trouvent à la même vitesse, le véhicule suiveur peut tout à fait accélérer sa progression.
- Les modèles de poursuite semblent n'être utilisables que dans des conditions de trafic dense. En effet, si la distance intervéhiculaire est suffisamment grande, alors il n'y a plus d'interactions entre véhicules et chacun roule à sa vitesse libre.

1.2.3 Modèles macroscopiques

Les modèles macroscopiques sont issus d'une analogie hydrodynamique de l'écoulement des véhicules. L'objet de ces modèles est de pouvoir caractériser le comportement global du trafic, à une échelle d'étude relativement importante. Ils sont donc tout particulièrement utilisés dans le cadre de la modélisation des grands réseaux. Leurs applications courantes couvrent la simulation du trafic en vue de la planification et de la conception des infrastructures, mais aussi la gestion dynamique du trafic et l'évaluation de ces mesures de gestion *a posteriori*.

1.2.3.1 Modèles du premier ordre

Le modèle le plus couramment utilisé est également un des modèles pionniers en modélisation du trafic routier. Il s'agit du modèle développé simultanément par [Lighthill et Whitham, 1955] ainsi que [Richards, 1956], s'appuyant sur une analogie avec la dynamique des fluides. Plus communément appelé modèle LWR, ce modèle fait intervenir trois variables décrites précédemment à savoir la vitesse, le débit et la concentration. Pour que le système soit totalement déterminé, il se compose des trois équations suivantes :

- L'équation de définition de la vitesse, vue précédemment comme étant le rapport du débit sur la concentration ;
- L'équation de conservation, provenant de la conservation du nombre de véhicules sur une section de longueur infinitésimale et pendant un laps de temps ;
- Le diagramme fondamental permettant de postuler que la vitesse de flot est obtenue en permanence pour un état d'équilibre, celui-ci ne dépendant uniquement que de la concentration instantanée. Il s'agit d'une équation d'état séparant généralement une partie fluide et une partie congestionnée.

Soit le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} Q(x,t) = K(x,t) \times V(x,t) \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} = 0 \\ V(x,t) = V_e(K(x,t)) \end{cases}$$

Ce système d'équations peut être condensé en une équation aux dérivées partielles hyperbolique sous forme non conservative :

$$\frac{\partial K(x,t)}{\partial t} + Q_e'(K(x,t)) \frac{\partial K(x,t)}{\partial x} = 0$$

Où $Q_e(K(x,t)) = K(x,t) \times V_e(K(x,t))$, la forme de la fonction de vitesse à l'équilibre V_e étant obtenue grâce au diagramme fondamental.

C'est la raison pour laquelle il est commun de parler de modèles de premier ordre pour cette famille de modèles. La résolution de cette équation permet de déterminer la valeur de concentration et de déduire d'après la relation d'équilibre, les valeurs de débit et de vitesse correspondantes.

Il n'existerait pas moins de 25 diagrammes fondamentaux (DF) différents dans la littérature [Gerlough, 1975]. Nous pouvons toutefois citer le diagramme fondamental parabolique de [Greenshields, 1933], le diagramme fondamental bi-parabolique ou encore le diagramme fondamental triangulaire. Globalement, les diagrammes fondamentaux peuvent être considérés en deux classes :

- Les diagrammes fondamentaux linéaires par morceaux, se révélant être essentiellement obtenus pour les zones de circulation urbaines ;
- Les diagrammes fondamentaux quadratiques par morceaux.

Les diagrammes fondamentaux doivent répondre à certaines observations expérimentales fondamentales :

- Lorsque le nombre de véhicules est suffisamment faible sur la section considérée, ces véhicules n'interagissent pas et chacun peut circuler à la vitesse désirée, appelée vitesse libre (prise généralement égale à la vitesse maximale moyenne) ;
- En augmentant le nombre de véhicules dans la section, les interactions deviennent plus importantes et les vitesses pratiquées diminuent. La vitesse de flot est donc une fonction décroissante de la concentration ;
- Dans le cas extrême où la section est saturée et donc la concentration est maximale, la vitesse et le débit sont nuls.

A noter que ces observations conduisent la plupart du temps à considérer un DF décomposé en deux parties distinctes, à savoir le régime libre et le régime congestionné. Cependant, certains auteurs comme Boris S. KERNER [Kerner, 1998] ont mis en avant une théorie basée sur une description en trois phases : en sus de la phase de trafic fluide, se trouvent une phase de trafic synchronisé et une phase congestionnée.

Les diagrammes fondamentaux en débit peuvent être présentés par la formule généralisée suivante [Gerlough, 1975], [Mammar, 2006] :

$$Q_e(K) = K \cdot V_{\max} \left[1 - \left(\frac{K}{K_{\max}} \right)^l \right]^p$$

D'où le système d'équation devient :

$$\begin{cases} Q(x,t) = K(x,t) \times V(x,t) \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} = 0 \\ V(x,t) = V_{\max} \left[1 - \left(\frac{K(x,t)}{K_{\max}} \right)^l \right]^p \end{cases}$$

Voici quelques formes proposées dans la littérature pour le diagramme fondamental :

Auteurs	Diagramme fondamental
[Chandler, 1958]	$Q_e(K) = Q_{\max} \left[1 - \left(\frac{K}{K_{\max}} \right) \right]$
[Greenberg, 1959]	$Q_e(K) = K \cdot V_{\text{critique}} \cdot \ln \left(\frac{K}{K_{\max}} \right)$ <i>V_{critique} est une vitesse optimale non directement observable</i>
[Greenshields, 1935]	$Q_e(K) = K \cdot V_{\max} \cdot \left[1 - \left(\frac{K}{K_{\max}} \right) \right]$
[Edie, 1960]	$Q_e(K) = K \cdot V_{\max} \cdot \exp \left(- \left(\frac{K}{K_{\max}} \right) \right)$
May [1990]	$Q_e(K) = K \cdot V_{\max} \cdot \exp \left(- \frac{1}{a} \left(\frac{K}{K_{\text{critique}}} \right)^a \right)$

Tableau 2 : Formes de relation fondamentale pour les modèles macroscopiques du premier ordre

Il existe deux types de résolution pour les modèles de premier ordre :

- Une résolution analytique qui fait intervenir la notion de caractéristiques, c'est-à-dire des lieux où dans le diagramme espace-temps, la concentration est constante. Cela donne lieu au calcul d'ondes de choc et d'ondes de raréfaction. En effet, tout ce passe comme si l'information se propage : il existe deux cas de figures à savoir, si l'information garde sa forme, nous parlons d'onde de choc ou si elle s' « affaiblit », nous parlons alors d'onde de raréfaction.

En utilisant la théorie variationnelle (la démonstration est disponible en annexe A), il est possible de montrer que le modèle LWR est égal à la solution de l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\partial_t N = Q_e(-\partial_x N)$$

L'idée est alors d'utiliser les courbes de débits cumulés $N(x, t)$ où la solution de LWR se trouve être l'enveloppe inférieure des valeurs multiples de $N(x, t)$. Le travail s'effectue désormais en coordonnées Lagrangiennes, c'est-à-dire dans un repère (N, t) et non plus (x, t) comme dans le cas Eulérien. Le repère Lagrangien est désormais « solidaire » des particules en mouvement.

- Une résolution numérique faisant intervenir une discrétisation à l'aide d'un schéma numérique aux différences finies. Classiquement, le schéma de [Godunov, 1959] est utilisé. Il est cependant important de noter qu'une telle discrétisation introduit généralement une forte viscosité numérique.

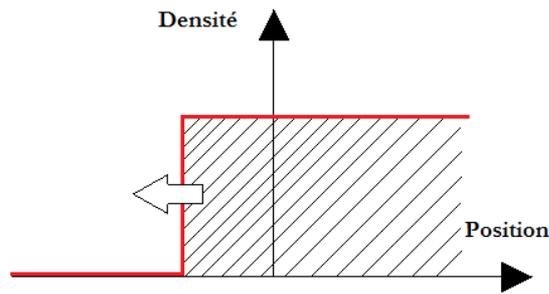
Les modèles type LWR sont couramment utilisés. Ils sont notamment appréciés pour leur robustesse, leur simplicité d'utilisation mais aussi par l'existence de solutions analytiques pour des cas simples. De plus, de nombreuses extensions en ont été déduites afin de pouvoir permettre la prise en compte de la variabilité des usagers dans leurs comportements mais pour introduire aussi la variabilité des véhicules.

Malgré tout, le modèle LWR présente certains inconvénients. Le principal est le fait qu'il considère le trafic dans un état d'équilibre à chaque instant. Les phases transitoires ne sont de ce fait pas prises en compte car le modèle considère que le trafic passe d'un état d'équilibre à un autre état d'équilibre instantanément. De plus, il est possible de souligner que la vitesse n'est pas utilisée comme variable fondamentale.

1.2.3.2 Modèles du second ordre

Les modèles de second ordre permettent de prendre en compte les états de non équilibre ainsi que les situations de convergence vers un état d'équilibre. L'équation d'équilibre utilisée dans le cadre des modèles de premier ordre est ainsi remplacée par une équation dynamique exprimant l'accélération du flux. L'accélération est composée d'un terme de relaxation vers la vitesse d'équilibre $V_e(K)$ ainsi qu'un terme physique de comportement individuel.

Les premiers travaux dans cette direction ont été proposés par Payne dans [Payne, 1971]. D'autres modèles ont ensuite été introduits afin de pouvoir corriger les principales failles du modèle de Payne, dont le caractère isotropique du modèle. Il existe certaines lacunes sur les modèles d'ordre supérieur (c'est-à-dire les modèles faisant intervenir plus de deux équations) comme souligné dans l'article [Daganzo, 1995] où l'auteur met en évidence l'existence de solutions négatives lorsque l'on considère un problème de Riemann, avec un profil en densité comme suit :



Dynamique d'un profil de densité mise en avant par [Daganzo, 1995]

Figure 1.9 : Profil de densité utilisé par [Daganzo, 1995]

Cela signifierait par exemple que les derniers véhicules situés en queue d'un peloton à l'arrêt à un feu tricolore reculeraient ! Cela est dû à l'isotropie de la formule utilisée pour le modèle.

Ce problème a ensuite été corrigé dans les modèles proposés par [Aw et Rascle, 2000] ainsi que [Zhang, 2002]. Il est possible de dégager un formalisme commun des modèles de second ordre :

$$\begin{cases} \frac{\partial K}{\partial t} + \frac{\partial KV}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} = \frac{1}{\tau} (V_e(K) - V) - \frac{1}{K} C^2(K) \frac{\partial K}{\partial x} \end{cases}$$

Où C correspond à la célérité caractéristique du trafic. Différentes expressions de cette célérité ont été proposées :

Auteur(s)	Expression de C
[Payne, 1971]	$C(K) = \sqrt{\frac{-V_e'(K)}{2\tau}}$
[Aw et Rascle, 2000]	$C(K) = -K.P'(K)$ avec $P(K) = a.K^\gamma$
[Zhang, 2002]	$C(K) = K.V_e'(K)$
[Jiang et al., 2002]	$C(K) = -c_0$ avec c_0 vitesse de propagation des perturbations

Tableau 3 : Différentes expressions pour la célérité caractéristique intervenant dans les modèles macroscopiques de second ordre

De même τ désigne un temps de réaction. Il est alors classique de prendre un temps de réaction jugé identique pour chaque conducteur afin de pouvoir en donner une définition au sens macroscopique de l'écoulement du trafic.

Nous pouvons reconnaître les « rôles » de chacun des termes dans l'expression de l'accélération particulière, à savoir :

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x}}_{\text{accélération}} = \underbrace{\frac{1}{\tau} (V_e(K) - V)}_{\text{relaxation}} - \underbrace{\frac{1}{K} C^2(K) \frac{\partial K}{\partial x}}_{\text{anticipation}}$$

Le terme de relaxation $\frac{1}{\tau} (V_e(K) - V)$ permet en outre d'expliquer la dispersion des points de mesure autour du diagramme fondamental.

Sous forme non conservative, le système s'écrit grâce à l'équation de Hamilton-Jacobi suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t} U + A(U) \frac{\partial}{\partial x} U = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\tau} (V_e(K) - V) \end{pmatrix}$$

Avec $U = \begin{pmatrix} K \\ V \end{pmatrix}$ et $A(U) = \begin{pmatrix} V & K \\ \frac{C^2(K)}{K} & V \end{pmatrix}$.

Il est intéressant de retenir que l'information se propage dans le modèle à la vitesse des valeurs propres de la matrice $A(U)$. Ces deux valeurs propres valent $\lambda_{j \in \{1,2\}} = V \pm C(K)$.

1.2.3.3 Modèle cellulaire

Nous nous arrêtons sur le modèle cellulaire proposé par [Daganzo, 1993]. Ce modèle reprend l'idée de « *cell transmission* » (CT) des modèles à automates cellulaires. Pourtant, ce modèle est basé sur une loi macroscopique de type Lighthill-Whitham-Richards (LWR). Le modèle proposé par Daganzo s'appuie sur un diagramme fondamental linéaire par morceaux, de formulation :

$$Q(K(x,t)) = \min(V_{\max} \cdot K(x,t), Q_{\max}, w \cdot \{K_{\max} - K(x,t)\}) \text{ pour } 0 \leq K(x,t) \leq K_{\max}$$

Soit le diagramme fondamental suivant :

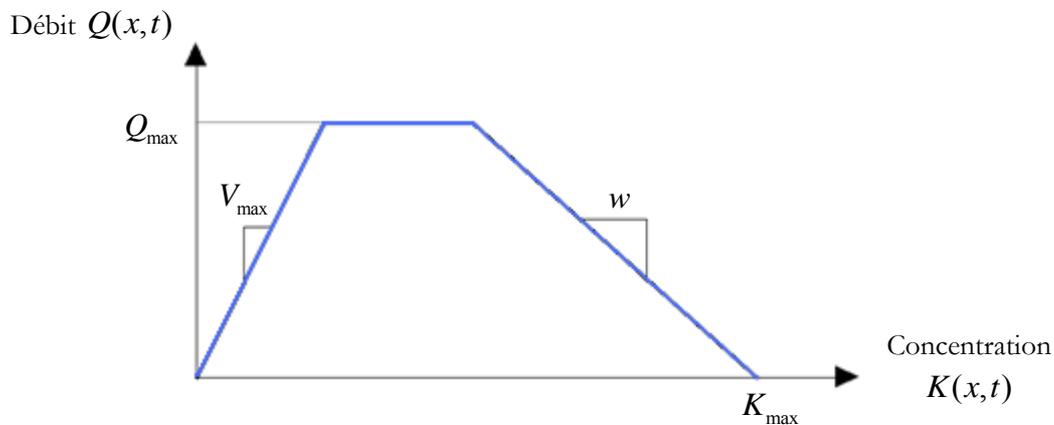
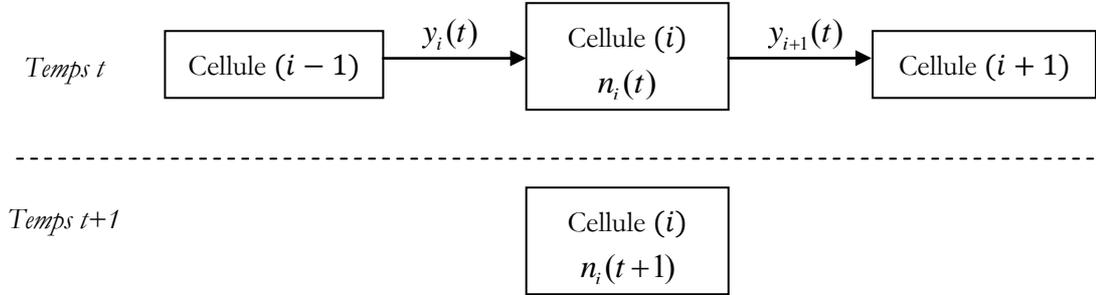


Diagramme fondamental du modèle « *cell transmission* »

Figure 1.10 : Diagramme fondamental – [Daganzo, 1993]

Le réseau est divisé en cellules de longueur égale à la distance parcourue par un véhicule à la vitesse maximale (soit en condition fluide de trafic). Chaque cellule i contient au temps t , $n_i(t)$ véhicules. Le nombre maximal de véhicules pouvant être contenus par la cellule i est donné par $N_i(t)$.



Organisation des cellules du « cell transmission »

Figure 1.11 : Principe du « cell transmission » – [Daganzo, 1993]

La loi de transmission est alors donnée sous la forme d'une suite réursive sur les cellules par :

$$n_i(t+1) = n_i(t) + y_i(t) - y_{i+1}(t)$$

Où $y_i(t)$ représente le flux entrant dans la cellule i au temps i , donné par :

$$y_i(t) = \min \left(n_{i-1}(t), Q_i(t), \frac{w}{v(x,t)} [N_i(t) - n_i(t)] \right)$$

Ce modèle a été aussi bien testé dans le cas d'une portion d'autoroute que dans le cas d'un réseau à plus grande échelle, avec diverses intersections.

1.2.3.4 Modèles cinétiques

Ces modèles ont été introduits afin de prendre en compte le caractère stochastique du trafic et des flux. Ils sont basés sur une analogie avec les méthodes utilisées pour la théorie cinétique des gaz de Boltzmann.

Le premier modèle de ce type a été développé par Prigogine et Herman, dans [Prigogine et Herman, 1971]. Il s'agit d'un modèle macroscopique qui se veut être plus précis que le modèle LWR décrit précédemment. Ce modèle s'appuie sur une distribution des vitesses $f(x, v, t)$. La quantité $f(x, v, t).dx.dv$ décrit alors la quantité de véhicules contenus entre les positions x et $x + dx$ au temps t . Le modèle donne ainsi l'évolution de la densité des particules $K(x, t)$ comme une fonction du temps t , de la position d'une particule x et de sa vitesse v .

$$K(x, t).dx = \int_0^{+\infty} f(x, u, t).dx.du$$

La vitesse se définit comme le rapport du débit sur la concentration, soit :

$$v = \frac{\int_0^{+\infty} f(x, u, t).u.du}{\int_0^{+\infty} f(x, u, t).du}$$

Le modèle s'appuie sur une équation d'évolution de conservation pour f qui est du même type qu'une équation de Boltzmann. Le flux est modélisé en combinant un flux libre, un terme de décélération ainsi qu'un terme de relaxation :

$$\partial_t f + v \cdot \partial_x f = \underbrace{S_K(f)}_{\text{accélération}} + \underbrace{R_K(f)}_{\text{relaxation}}$$

Le terme d'accélération $S_K(f)$ est notamment donné par l'intégration d'une loi de poursuite basé sur l'idée que si un véhicule rattrape le véhicule le précédant directement, il a une probabilité P de le dépasser si sa vitesse est supérieure :

$$S_K(f) = (1 - P(K)) \cdot \int_0^{V_{\max}} (v' - v) \cdot f(v') \cdot dv'$$

Où V_{\max} est la vitesse maximale.

Ce terme d'accélération dépend logiquement de la probabilité de dépassement P qui est souvent supposée dépendre linéairement de K :

$$P(K) = 1 - \frac{K}{K_{\max}}$$

Où K_{\max} est la densité maximale de véhicules dans l'état de congestion.

Le terme de relaxation $R_K(f)$ est donné par :

$$R_K(f) = -\frac{f - f_0}{T(K)}$$

Où f_0 est la distribution de la vitesse désirée, supposée de la forme :

$$f_0(x, v, t) = K(x, t) \cdot F_0(v)$$

Avec $F_0(v)$ une fonction indépendante de t et où T est le temps de relaxation dépendant de K :

$$T(K) = \frac{K}{K_{\max} - K}$$

Ce genre de modèle plus coûteux en termes de temps de calcul par comparaison au modèle LWR, est généralement peu utilisé. De nombreuses critiques ont été formulées du fait de la difficulté de déterminer des solutions analytiques ou encore de le calibrer et de le valider. Ces critiques sont par exemple présentées dans [Nelson, 2008].

D'autres modèles cinétiques ont été développés par la suite dans le but d'améliorer le modèle de Prigogine et Herman. Il est possible de citer les travaux de [Helbing, 2001] ou encore de [Hoogendoorn et Bovy, 2001]. Ces travaux se sont ainsi proposés d'inclure les effets des changements de voies ou encore les hétérogénéités des véhicules.

Dans le cadre de ce travail de MASTER, relevons toutefois que les modèles cinétiques proposent un cadre formel très intéressant pour le passage du microscopique vers les équations macroscopiques du trafic. Le lecteur est par exemple renvoyé à [Billot et al., 2010].

1.3 Synthèse

Tout d'abord, rappelons que chaque modèle a ses propres limites de représentation. En effet, nous avons pu voir rapidement que chaque type de modèle a un domaine d'utilisation bien particulier et il est très difficile de pouvoir appliquer un modèle sur un domaine différent. Souvent les résultats en sont décevants car le modèle est inadapté. Pour illustrer ces propos, imaginons qu'une personne souhaite décrire finement l'écoulement du trafic en un point particulier du réseau. Son étude porte sur une section de l'ordre de quelques dizaines de mètres et dure pendant quelques minutes. Il semble tout à fait inadapté d'utiliser ici un modèle macroscopique pour plusieurs raisons : tout d'abord, il sera très difficile de pouvoir juger de la pertinence d'indicateurs macroscopiques comme la concentration (respectivement le débit) étant donné la longueur de la section concernée (respectivement la période d'agrégation). D'autre part, la variabilité des comportements individuels ne pourra pas être correctement retranscrite du fait du faible nombre de véhicules qui seront considérés.

Le travail de Bourrel [Bourrel, 2003] souligne l'importance des problèmes d'échelle dans un domaine comme la modélisation du trafic routier. En effet, avant de pouvoir réaliser une quelconque étude portant sur le trafic routier, il est nécessaire de préciser les échelles spatiale et temporelle de cette étude. Cela traduit en outre la volonté de l'expérimentateur d'observer plus ou moins finement le réseau. Ce choix se fait parfois en fonction des moyens (données de mesure préexistantes, moyens matériels de mesure...) dont dispose l'observateur mais principalement les échelles s'adaptent selon les objectifs qui sont poursuivis.

Dans la partie qui suit, nous nous intéressons à montrer qu'il existe un lien mathématique rigoureux entre les modèles microscopiques et les modèles macroscopiques du premier ordre. Tandis qu'il est classique de travailler avec la formulation hyperbolique des systèmes de lois de conservation en trafic, notre propos est ici d'utiliser ces équations sous leur forme dite d'Hamilton-Jacobi. Cette technique nous permet ensuite d'introduire des concepts forts utiles comme les solutions de viscosité pour les équations d'Hamilton-Jacobi. Les solutions de viscosité forment des outils rendant possible en outre la démonstration de l'unicité de la solution et elles nous permettent également d'exhiber une estimation d'erreur, ce qui est non trivial à comparer à l'approche classique hyperbolique. Comme cela a été précédemment évoqué, cette partie a été exclusivement rédigée en anglais.

2 MATHEMATICAL PASSAGE FOR FIRST ORDER MODEL

2.1 Preliminaries

This part proposes a mathematical development with the goal to allow an asymptotic passage between the traffic microscopic models and the macroscopic ones. Just before to start, it is necessary to describe some differences with all above.

2.1.1 Notations

We would like to highlight that the notation of the vehicles index is now reversed. Until that point, we have considered an axis from which the vehicle indexed “ i ” is preceded by the vehicle indexed “ $i-1$ ”. It is that order which is reversed, that is to say that the axis is now increasing.

The new notations are presented on the scheme just right down:

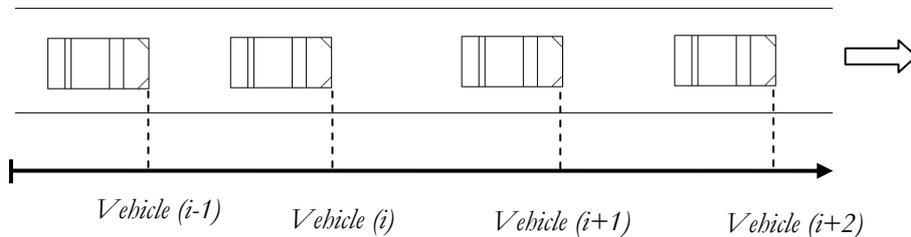


Figure 2.1 : Vehicles order axis

This switch in the vehicles numbering sense could be the occasion for some discussions. Indeed, the sense adopted until that point is right from the traffic physics. At a given spatial point, the vehicles which succeed will be numbered in an increasing way. But in our study, we focus on a pseudo continuum of vehicles which is observed from a macroscopic point of view. It is like an observer steps back or zooms out for a successive time sets. In that way, regarding from the left to the right, the order switch finds its justification. In a mathematical way, it is then easier to work with such an axis because of the positive signs.

2.1.2 Considered microscopic models

In order to focus our study, we sought to propose a new classification of following microscopic models. This classification is based on the general form of mathematical expressions of these models. We have indeed noticed that the presented models put forward a law using either speed or acceleration as a function depending on other variables like the headway, the relative speed, the instantaneous speed of the leader and the one of the follower.

Thus, we have extracted three models classes, completed with a fourth category which is more or less a particular case of the second one, for make easier its study. The justification of such a classification by classes is proposed in annex of this work. The categories are presented in the table just right down:

Code	General expression	Author(s)
(1)	$\dot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t))$	Pipes, 1953 ; Forbes, 1958.
(2)	$\ddot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_i(t), \dot{x}_{i+1}(t))$	Kometani et al., 1959 ; Gipps, 1981 ; Krauss, 1997.
(2')	$\ddot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_i(t))$	Chandler et al., 1958 ; Gazis et al., 1961 ; Newell, 1961.
(3)	$\ddot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t), \dot{x}_i(t), \dot{x}_{i+1}(t), \ddot{x}_i(t))$	Helly, 1961 ; Bando et al., 1995 ; Treiber et al., 2000.

Tableau 4 : Studied microscopic models classes

We could remark that the simplest model has been developed in the mid of 50s that is to say at the beginning of traffic engineering. The models proposed later integrate some new variables, making more complex the general form of these models.

Model (3) seems not to be realistic: to obtain it, we have considerate Taylor expansions according to time delay.

In our study, we have been limited by time, as a matter of fact that we only focus on the first order model. We try to entirely describe and analyzed it. Then, we have tried to incorporate a non-zero time delay in such a model. The aim of this part was to justify (or not) the assumption of the Taylor expands made previously for the models classification. We finish by presenting some preliminary results about second order models which will be developed later.

2.1.3 Hypothesis

Let's consider the first microscopic model equation previously referenced as (1), given by the following ordinary differential equation:

$$\frac{dx_i}{ds}(s) = \dot{x}_i(s) = F(x_{i+1}(s) - x_i(s)) \quad (1.1)$$

With $i \in \mathbb{Z}$. The variable $x_i(s)$ and the function F are respectfully the location and speed of i^{th} vehicle at a given time $s > 0$.

More generally, we make the following assumptions:

(A1) **Regularity**

$$\begin{cases} F \text{ is continuous} \\ F \text{ is Lipschitz in } S_i(s) = x_{i+1}(s) - x_i(s) \end{cases}$$

(A2) **Monotony**

$$F \text{ is non - decreasing in } S_i(s) = x_{i+1}(s) - x_i(s)$$

Moreover, we will simply assume that the initial data satisfies the assumption

(A3) **Initial condition**

$$X_0 \text{ satisfies } 0 < \frac{1}{K_0} < (X_0)_y \leq K_0 \text{ with } K_0 \geq 1$$

And $X_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is Lipschitz.

The initial vehicles density is thus bounded. The gradient is invariant according to space and time shifts.

(A4) **Regularity**

$$\begin{cases} \forall i \in \mathbb{Z}, & x_i \in C^1([0, +\infty)) \\ \forall i \in \mathbb{Z}, & x_i \text{ is Lipschitz continuous in } t \in [0, +\infty) \end{cases}$$

2.1.4 Conservation of initial vehicles order

Lemma 2.1 (Formal comparison principle)

On a single lane road, the vehicles keep ordered according to their initial order, that is to say there is no overtaking maneuver.

If

$$x_{i+1}(0) \geq x_i(0), \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Then

$$x_{i+1}(t) \geq x_i(t), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad \forall t > 0$$

Proof (Formal)

Let's consider for any $i \in \mathbb{Z}$ and $t > 0$, $S_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$ and $\min_i S_i(t) = m(t)$. Let's suppose that $m(t)$ is reached for $i = i_0$. Then

$$m'(t) = S_{i_0}'(t) = x_{i_0+1}'(t) - x_{i_0}'(t) = F(S_{i_0+1}) - F(S_{i_0})$$

Under the assumption (A2) that F is a non-decreasing function, we obtained that $m'(t) \geq 0$. So

$$m(t) \geq m(0) \geq 0$$

Remark 2.2: The function F represents the speed of the considered vehicle. It is not surprising to choose the speed as a non-decreasing function of the headway distance. However, many recent

studies have showed that there exists a cycle of hysteresis. In the case of first order model, the main causes of hysteresis lap, for example time delay and leader vehicle speed, are not considered.

2.1.5 PDE for the microscopic model

Let's suppose that there exists a function X such as:

$$x_i(s) = \frac{1}{\varepsilon} X^\varepsilon(i\varepsilon, \varepsilon s) \quad (1.2)$$

With $\varepsilon > 0$ representing a scale factor and i the position index. The index $i \in \mathbb{Z}$ is a discrete variable. In order to work with a pseudo continuum of vehicles, we define continuous variables $y \in \mathbb{R}$ and $t \in [0, T]$ such as $y = i\varepsilon$ and $t = \varepsilon s$. In this way, the function X^ε describes the rescaled position of the vehicles.

So

$$x_i(s) = \frac{1}{\varepsilon} X^\varepsilon(i\varepsilon, \varepsilon s) \Leftrightarrow X^\varepsilon(y, t) = \varepsilon \cdot x_{\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \rfloor} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right)$$

Where $\lfloor \cdot \rfloor$ denotes the floor integer.

Proposition 2.3 (PDE solved by the microscopic first order model)

If x_i given by (1.2) is a solution of (1.1), then X^ε solves formally the following equation:

$$\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial t}(y, t) = F \left(\frac{X^\varepsilon((i+1)\varepsilon, \varepsilon s) - X^\varepsilon(i\varepsilon, \varepsilon s)}{\varepsilon} \right) \quad (1.3)$$

Remark 2.4: The equation (1.3) is a first order Hamilton-Jacobi equation.

Proof of Proposition 2.3 (Formal)

We have

$$X_t^\varepsilon = \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial t}(i\varepsilon, \varepsilon s) = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial X^\varepsilon}{\partial s}(i\varepsilon, \varepsilon s) = \frac{\partial x_i}{\partial s}(s) = \dot{x}_i(s)$$

And

$$x_{i+1}(s) - x_i(s) = \frac{X^\varepsilon((i+1)\varepsilon, \varepsilon s) - X^\varepsilon(i\varepsilon, \varepsilon s)}{\varepsilon} = X_y^\varepsilon$$

Thus

$$\frac{\partial X^\varepsilon}{\partial t}(i\varepsilon, \varepsilon s) = F(x_{i+1}(s) - x_i(s)) = F \left(\frac{X^\varepsilon((i+1)\varepsilon, \varepsilon s) - X^\varepsilon(i\varepsilon, \varepsilon s)}{\varepsilon} \right)$$

So

$$X_t^\varepsilon = F(X_y^\varepsilon)$$

■

2.2 Viscosity solution

For a more general introduction to viscosity solutions, the reader could refer to [Barles, 1994] and above all, to the user's guide of [Crandall and al., 1992].

Let us mention that our result can be seen as one among many homogenization results for Hamilton-Jacobi equations for which the literature is now huge. But homogenization could be applied for other different models. For instance, we could mention that the homogenization technique has been applied to the Frenkel-Kontorova model involving interactions with an infinite number of particles. It has been studied in [Forcadel and al., 2011]. The Frenkel-Kontorova model allows describing dislocation dynamics.

2.2.1 Definitions

Now, we introduce the definitions used along this part.

Definition 2.5 (Upper and lower semi-continuous envelopes)

For any function $X : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, upper and lower semi-continuous envelopes are respectfully defined as:

$$\begin{aligned} X^*(y, t) &= \lim_{(y', t') \rightarrow (y, t)} \sup X(y', t') \\ X_*(y, t) &= \lim_{(y', t') \rightarrow (y, t)} \inf X(y', t') \end{aligned}$$

Moreover, we assume that:

$$\begin{cases} X \text{ is upper semi continuous if and only if } X = X^* \\ X \text{ is lower semi continuous if and only if } X = X_* \\ X \text{ is continuous if and only if } X = X^* = X_* \end{cases}$$

Definition 2.6 (Viscosity solutions)

We say that a function $X : \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ is a subsolution (resp. a supersolution) of (1.3) on an open set $\Omega \subset \mathbb{R} \times [0, T)$ if its upper semi-continuous (resp. lower semi-continuous) function is locally bounded and if for any $(y, t) \in \Omega$ and any test function $\phi \in C^1(\mathbb{R})$, we have:

$$\begin{cases} \phi_t(y, t) \leq F(X_y) \\ \text{(resp. } \phi_t(y, t) \geq F(X_y)) \end{cases}$$

The function X^* (resp. X_*) is said to be a subsolution (resp. supersolution) on $\mathbb{R} \times [0, T)$ if X^* is a subsolution (resp. X_* is a supersolution) on $\Omega \subset \mathbb{R} \times [0, T)$ and if moreover it satisfies:

$$\begin{cases} X^*(y, 0) \leq X_0(y) \text{ for } y \in \mathbb{R} \\ \text{(resp. } X_*(y, 0) \geq X_0(y) \text{ for } y \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

where the initial data X_0 are assumed to be continuous.

A function X is said a viscosity solution of (1.3) if X^* is a subsolution and X_* is a supersolution.

The first main property of this notion of solution is its stability when passing to the limit. Indeed, we have

Proposition 2.7 (Stability of viscosity solutions)

Assume (A1) - (A2) and $0 < T < +\infty$. Assume that $(X^\varepsilon)_\varepsilon$ is a sequence of subsolutions (resp. supersolutions) of equation (1.3) on $\mathbb{R} \times [0, T)$ satisfying (1.3), and let us set:

$$\bar{X}(y, t) = \limsup_\varepsilon X^\varepsilon(y, t) = \limsup_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (y', t') \rightarrow (y, t)}} X^\varepsilon(y', t')$$

$$\left(\text{resp. } \underline{X}(y, t) = \liminf_\varepsilon X^\varepsilon(y, t) = \liminf_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (y', t') \rightarrow (y, t)}} X^\varepsilon(y', t') \right)$$

Then \bar{X} is a subsolution (resp. \underline{X} is a supersolution) of (1.3) on $\mathbb{R} \times [0, T)$.

We skip the proof which is straightforward adaptation of the classical proof proposed in [Barles, 1995].

The second main property is the following

Proposition 2.8 (Comparison principle)

Assume (A1) - (A2) - (A3). Assume that \bar{X} and \underline{X} are respectively a subsolution and a supersolution of (1.3) on $\mathbb{R} \times [0, T)$. Then we have $\bar{X} \leq \underline{X}$ on $\mathbb{R} \times [0, T)$.

We also need to localize the comparison principle:

Proposition 2.9 (Comparison principle on bounded sets)

Assume (A1) - (A2). Let us fix a point $(y_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [0, T)$ and for any $r, R > 0$, let us set

$$Q_{r,R} = (y_0 - r, y_0 + r) \times (t_0 - R, t_0 + R)$$

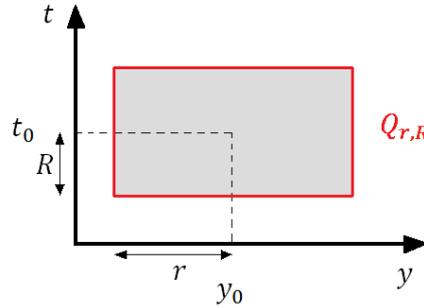


Figure 2.2 : Considered bounded set

Assume that \bar{X} is a subsolution (resp. \underline{X} is a supersolution) of (1.3) on the open set $Q_{r,R} \subset \mathbb{R} \times [0, T)$. Then

$$\begin{cases} \bar{X} \leq \underline{X} \text{ on } Q_{r,R} \\ \bar{X} \leq \underline{X} \text{ on } \partial_p Q_{r,R} \end{cases}$$

Where

$$\partial_p Q_{r,R} = ([y_0 - r, y_0 + r] \times \{t_0 - R\}) \cup (\{y_0 - r\} \times [t_0 - R, t_0 + R] \cup \{y_0 + r\} \times [t_0 - R, t_0 + R])$$

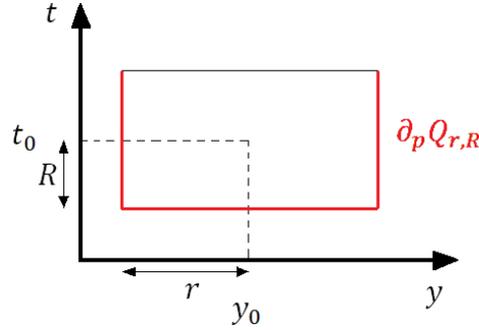


Figure 2.3 : Parabolic border of the bounded set

The third main property of viscosity solutions is the following:

Proposition 2.10 (Existence by Perron's method)

Assume (A1) – (A2). Assume that \bar{X} is a subsolution (resp. \underline{X} is a supersolution) of (1.3) on $\mathbb{R} \times [0, T)$ such that

$$\bar{X} \leq \underline{X} \text{ on } \mathbb{R} \times [0, T)$$

Let \mathcal{S} the set of all supersolution \tilde{X} of (1.3) on $\mathbb{R} \times [0, T)$ satisfying $\bar{X} \leq \tilde{X}$. Let

$$Y(y, t) = \inf\{\tilde{X}(y, t) \text{ such that } \tilde{X} \in \mathcal{S}\}$$

Then Y_* is a solution of (1.3) on $\mathbb{R} \times [0, T)$ satisfying $\bar{X} \leq Y_* \leq \underline{X}$.

We skip the proofs of Propositions 2.8, 2.9 and 2.10 which follow the classical method; see for instance [Crandall and al., 1992].

Theorem 2.11 (Viscosity solution)

Assume that (A1), (A2) and (A3) are satisfied.

Let $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ solution of (1.1) and the initial conditions given by:

$$x_i(0) = \frac{1}{\varepsilon} X_0(i\varepsilon)$$

Let us define

$$X^\varepsilon(y, t) = \varepsilon \cdot x_{\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \rfloor} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right)$$

(1) Let X^0 be the unique solution of

$$\begin{cases} X_t^0 = F(X_y^0) \\ X^0(y, 0) = X_0(y) \end{cases}$$

Then we have

$$|\varepsilon \cdot x_i(t/\varepsilon) - X^0(i\varepsilon, t)| \leq C_T \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

For $i \in \mathbb{Z}$, $t \in [0, T)$ and $C_T > 0$.

(2) Let X^0 be the unique solution of (1.3)

Then we have

$$|X^\varepsilon(y, t) - X^0(y, t)| \leq C_T \cdot \sqrt{\varepsilon}$$

For $y \in \mathbb{R}$, $t \in [0, T)$ and $C_T > 0$.

2.2.2 Uniqueness and comparison principle

Theorem 2.12 (Uniqueness)

We consider the equation defined by (1.3) completed by the initial data $(x_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ such as (A3) is respected, i.e. the gradient $(x_i^0)_t$ is bounded.

If F satisfies (A0) then there exists a unique solution $x_i^0(t)$ of (1.1) and $|x_i(t) - x_i^0(t)| \leq C \cdot t$.

Proof

Step 1: Reformulation of the problem in a Banach space

We have

$$\dot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t))$$

Where F is a Lipschitz function such as:

$$\exists L > 0 : \forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, |F(a) - F(b)| \leq L \cdot |a - b|$$

Let

$$U = ((x_i)_{i \in \mathbb{Z}}) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$$

And we assume that we can find a function \mathcal{F} such as

$$\dot{U} = \mathcal{F}(U)$$

Consider $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ such as:

$$\mathcal{B} = \{U \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}, \quad (u_i - x_i^0) \leq r\}$$

where $(x_i^0)_{i \in \mathbb{Z}}$ are the initial data and $r > 0$ is the ball radius.

We have $U : [0, T] \rightarrow \mathcal{B}$ where \mathcal{B} is a Banach space equipped with its norm defined as:

$$\|U\| = \sup_{i \in \mathbb{Z}} |x_i|$$

Step 2: \mathcal{F} is Lipschitz

Then

$$\begin{aligned} \|\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(V)\| &= \sup_i |\mathcal{F}_i(U) - \mathcal{F}_i(V)| \\ &= \sup_i |F_i(u_{i+1} - u_i) - F_i(v_{i+1} - v_i)| \\ &\leq L \cdot \sup_i |(U_{i+1} - V_{i+1}) - (U_i - V_i)| \\ &\leq 2L \cdot \sup_i |(U_i - V_i)| = 2L \cdot \|U - V\| \end{aligned}$$

Note that \mathcal{F} is also Lipschitz and its constant is such $Lip(\mathcal{F}) \leq 2L$.

Step 3: Contraction

We consider

$$U(t) = U(0) + \int_0^t \mathcal{F}(U(s)) ds = (A(U(t)))$$

The function A is such as:

$$\begin{aligned} A(U(t)) - A(V(t)) &= \int_0^t ds. (\mathcal{F}(U(s)) - \mathcal{F}(V(s))) \\ &\leq \int_0^t ds. Lip(\mathcal{F}). \|U(s) - V(s)\| \\ &\leq T. Lip(\mathcal{F}). \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t) - V(t)\| \\ &\leq \alpha. \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t) - V(t)\| \end{aligned}$$

We have just proved that:

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|A(U(t)) - A(V(t))\| \leq \alpha. \sup_{0 \leq t \leq T} \|U(t) - V(t)\|$$

If the time period T is small enough, for example $T < \frac{1}{Lip(\mathcal{F})}$ with $Lip(\mathcal{F}) > 0$, then $T. Lip(\mathcal{F}) = \alpha < 1$. This condition on T implies that we have to work with a succession of small time periods such as $[0, T]$, $[T, 2T]$, etc...

Step 4: Conclusion

As A is a contracting function, according to the fixed point theorem in a Banach space, we know that there exists a unique $U \in \mathcal{B}$ such as $U(t) = A(U(t))$.

This closes the proof. ■

Theorem 2.13 (Comparison principle)

Considering $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ and $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ two solutions of (1.1) such that $x_i(0) \leq y_i(0)$, $\forall i \in \mathbb{Z}$ with $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ and $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ both satisfying assumption (A4) and Theorem 2.12. As $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ and $(y_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ are both Lipschitz, we can also consider that we have:

$$\begin{cases} x_i(t) \leq x_i(0) + C. t \\ y_i(t) \geq y_i(0) - C. t \end{cases}$$

With a constant $C > 0$ which is independent from i .

Then, under the assumptions (A1) and (A2), we have:

$$x_i(t) \leq y_i(t), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall t > 0$$

Proof (Comparison principle theorem)

Step 1: Setting

Let $T > 0$. We will suppose that the inequality stated in the Theorem 2.13 is false, trying to highlighting a contradiction. Therefore, we consider that:

$$M = \sup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq t \leq T}} x_i(t) - y_i(t) > 0$$

We introduce another supremum, using a duplication of variables by penalizing. This one allows considering that the index i and the time t are not huge and their expansions are somehow bounded:

$$M_{\alpha,\eta} = \sup_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ 0 \leq t \leq T}} x_i(t) - y_i(t) - \alpha \cdot i^2 - \eta \cdot t$$

Where $\alpha > 0$ and $\eta > 0$.

We assume that for α and η small enough, we have:

$$M_{\alpha,\eta} \geq \frac{M}{2} > 0$$

Step 1.1: Proof of inequality $M_{\alpha,\eta} > M/2$

Actually, we have $M_{\alpha,\eta} \geq M_{\alpha,0} - \eta \cdot T$ where we can assume that $\eta < M/4T$.

We could bound $M_{\alpha,0}$ for certain α , recalling that

$$\forall \delta > 0, \quad \exists (i_\delta, t_\delta) \in \mathbb{Z} \times [0, T), \quad M \geq |x_{i_\delta}(t_\delta) - y_{i_\delta}(t_\delta)| \geq M - \delta$$

Thus, we have for any $\delta > 0$, the existence of $(i_\delta, t_\delta) \in \mathbb{Z} \times [0, T)$ such that

$$\begin{aligned} M_{\alpha,0} &\geq x_{i_\delta}(t_\delta) - y_{i_\delta}(t_\delta) - \alpha \cdot (i_\delta)^2 \geq M - \delta - \alpha \cdot (i_\delta)^2 \\ &\geq \frac{3M}{4} \quad \text{for } \alpha < \alpha_0 = \frac{1}{(i_\delta)^2} \cdot \left(\frac{M}{4} - \delta\right) \end{aligned}$$

From which we find back the inequality, according to the one complied by η ($\eta < M/4T$):

$$M_{\alpha,\eta} \geq \frac{M}{2}$$

Step 1.2:

Consider that $M_{\alpha,\eta}$ is reached for $i = i_\alpha$ and $t = t_\alpha$.

Then

$$M_{\alpha,\eta} = x_{i_\alpha}(t_\alpha) - y_{i_\alpha}(t_\alpha) - \alpha \cdot (i_\alpha)^2 - \eta \cdot t_\alpha \geq \frac{M}{2} > 0$$

One can remark that $t_\alpha > 0$ because of the assumptions

$$M = \sup_{i \in \mathbb{Z}} x_i(t) - y_i(t) > 0 \text{ for } t = 0 \text{ and } x_i(0) \leq y_i(0), \quad \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Step 2: Obtaining inequalities

We now consider the following function:

$$\begin{aligned} \varphi: [0, T) &\rightarrow \mathbb{R} \\ t &\mapsto x_{i_\alpha}(t) - y_{i_\alpha}(t) - \alpha \cdot (i_\alpha)^2 - \eta \cdot t \end{aligned}$$

As $M_{\alpha,\eta}$ is a supremum, we assume that $\dot{\varphi}(t_\alpha) \geq 0$, thus:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{i_\alpha}(t_\alpha) - \dot{y}_{i_\alpha}(t_\alpha) - \eta &\geq 0 \\ F(x_{i_\alpha+1}(t_\alpha) - x_{i_\alpha}(t_\alpha)) - F(y_{i_\alpha+1}(t_\alpha) - y_{i_\alpha}(t_\alpha)) &\geq \eta \end{aligned}$$

We also have that:

$$\begin{aligned} M_{\alpha,\eta} = x_{i_\alpha}(t_\alpha) - y_{i_\alpha}(t_\alpha) - \alpha \cdot (i_\alpha)^2 - \eta \cdot t_\alpha &\geq x_{i_\alpha+1}(t_\alpha) - y_{i_\alpha+1}(t_\alpha) - \alpha \cdot (i_\alpha + 1)^2 - \eta \cdot t_\alpha \\ y_{i_\alpha+1}(t_\alpha) - y_{i_\alpha}(t_\alpha) + 2\alpha \cdot (i_\alpha) + \alpha &\geq x_{i_\alpha+1}(t_\alpha) - x_{i_\alpha}(t_\alpha) \end{aligned}$$

Then

$$\text{Lip}(F) \cdot |2\alpha \cdot i_\alpha + \alpha| \geq F(x_{i_\alpha+1}(t_\alpha) - x_{i_\alpha}(t_\alpha)) - F(y_{i_\alpha+1}(t_\alpha) - y_{i_\alpha}(t_\alpha)) \geq \eta > 0$$

Step 3: Proof of $\alpha \cdot i_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$

As

$$\begin{cases} x_i(t) \leq x_i(0) + C \cdot t \\ y_i(t) \geq y_i(0) - C \cdot t \end{cases}$$

Thus

$$2CT \geq M_{\alpha,\eta} \geq \frac{M}{2} > 0$$

$$2CT - \alpha \cdot (i_\alpha)^2 \geq x_{i_\alpha}(t_\alpha) - y_{i_\alpha}(t_\alpha) - \alpha \cdot (i_\alpha)^2 - \eta \cdot t_\alpha \geq x_0(0) - y_0(0)$$

And

$$\alpha \cdot (i_\alpha)^2 \leq \underbrace{2CT - (x_0(0) - y_0(0))}_{=C'}$$

So

$$\alpha \cdot |i_\alpha| \leq \sqrt{C'} \cdot \alpha$$

Step 4: Conclusion

Under the assumption $\alpha \cdot i_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$, we obtain a contradiction while

$$0 \geq \eta > 0$$

So $M < 0$ and $x_i(t) \leq y_i(t)$, $\forall i \in \mathbb{Z}, \forall t > 0$. ■

Corollary 2.14 (Conservation of initial order)

Considering $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ solution of (1.2) such that $x_i(0) \leq x_{i+1}(0)$, with $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfying both assumption (A4) and Theorem 2.12.

Then, under the assumptions (A1) and (A2), we have:

$$x_i(t) \leq x_{i+1}(t), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall t > 0$$

Proof

We consider x_i and x_{i+1} such as both are solutions of (1.2) such as:

$$x_i(0) \leq x_{i+1}(0), \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

with $x_i \in C^1(\mathbb{R}), \forall i \in \mathbb{Z}$ and $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ Lipschitz.

And

$$|x_i(t) - x_i(0)| \leq C \cdot t, \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

Applying the previous theorem for $y_i = x_{i+1}$, the proof is direct. ■

Remark 2.15 This corollary is another faster mean to prove the conservation of vehicles initial order; at all time, a given vehicle is positioned at a biggest abscissa than its following vehicle.

Theorem 2.16 (Hamilton-Jacobi equation)

Considering that we satisfy the assumptions (A1), (A2) and (A3), there exists a unique solution X^0 of the Hamilton-Jacobi equation given by:

$$\begin{cases} X_t^0 = F(X_y^0) \\ X^0(y, 0) = X_0(y) \end{cases} \quad (1.4)$$

Proof: Hamilton-Jacobi equation

Step 1: Inequality between super and subsolutions

We assume that if \bar{X} is a subsolution and \underline{X} is a supersolution of (1.4), then $\bar{X} \leq \underline{X}$.

In the same way, we assume that
$$\begin{cases} \bar{X}(y, t) \leq X_0(y) + C \cdot t \\ \underline{X}(y, t) \geq X_0(y) - C \cdot t \end{cases}.$$

Let $T > 0$.

If $M = \sup_{\substack{y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq t \leq T}} \bar{X}(y, t) - \underline{X}(y, t) > 0$,

Then

$$M_{\alpha, \eta, \varepsilon, \delta} = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq t, s \leq T}} \bar{X}(x, t) - \underline{X}(y, s) - \frac{|x - y|^2}{2\varepsilon} - \frac{|t - s|^2}{2\delta} - \alpha \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{\eta}{T - t} > \frac{M}{2} > 0$$

Where $\alpha > 0$, $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ and $\delta > 0$.

As previously, we introduce another supremum using a duplication of variables by penalizing.

Step 1: Inequality between super and subsolutions

$$M_{\alpha, \eta, \varepsilon, \delta} > \frac{M}{2} > 0$$

for α and η small enough.

Express the penalization as $p = \frac{|x - y|^2}{2\varepsilon} + \frac{|t - s|^2}{2\delta} + \alpha \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{\eta}{T - t}$.

$$M_{\alpha, \eta, \varepsilon, \delta} \geq \bar{X}(0, 0) - \underline{X}(0, 0) - \frac{\eta}{T} = -C_1$$

And

$$X_0(x) - X_0(y) + C \cdot t + C \cdot s - p \geq M_{\alpha, \eta, \varepsilon, \delta}$$

Let $d = |x - y|$ and $C' = 2CT + C_1$. We have $C' \geq p - L \cdot d$ in such a way that we obtain:

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{|x - y|^2}{2\varepsilon} + \frac{|t - s|^2}{2\delta} - L \cdot d &\leq C' \\ \frac{d^2}{2\varepsilon} - L \cdot d &\leq C' \end{aligned}$$

Step 1.2: Viscosity inequalities

Step 1.2.1: Subsolution inequality

On one hand, we have:

$$\bar{X}(x, t) \leq M_{\alpha, \eta, \varepsilon, \delta} + \underline{X}(y, s) + \frac{|x - y|^2}{2\varepsilon} + \frac{|t - s|^2}{2\delta} + \alpha \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{\eta}{T - t} = \varphi(x, t)$$

The inequality is available when $M_{\alpha,\eta,\varepsilon,\delta}$ is reached.

And thus, we obtain that $\varphi_t \leq F(\varphi_x)$ at the sup point.

$$\frac{\eta}{(T-t)^2} + \frac{t-s}{\delta} \leq F\left(\frac{x-y}{\varepsilon} + \alpha x\right)$$

Step 1.2.2: Supersolution inequality

On the other hand, we have:

$$\underline{X}(y, s) \geq -M_{\alpha,\eta,\varepsilon,\delta} + \bar{X}(x, t) - \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon} - \frac{|t-s|^2}{2\delta} - \alpha \frac{x^2}{2} - \frac{\eta}{T-t} = -\psi(y, s)$$

And thus, we obtain that $\psi_s \leq F(\psi_y)$.

$$\frac{t-s}{\delta} \geq F\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right)$$

Step 1.2.3: Difference

Making the difference between both supersolution and subsolution inequalities, we obtain that:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\eta}{T^2} &\leq \frac{\eta}{(T-t)^2} \leq F\left(\frac{x-y}{\varepsilon} + \alpha x\right) - F\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) \\ &\leq Lip(F) \cdot \alpha |x| \end{aligned}$$

The proof that $\alpha |x| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$ is similar of what it was previously done for proving $\alpha \cdot i_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$.

Step 1.3: Conclusion

Two cases are thus possible: either $t = 0$ or $s = 0$. Both cases are similar and we only focus on one which is $t = 0$.

As

$$\begin{aligned} \frac{|x-y|^2}{2\varepsilon} + \frac{|t-s|^2}{2\delta} &\leq C \\ 0 < \frac{M}{2} < M_{\alpha,\eta,\varepsilon,\delta} &\leq \bar{X}(x, 0) - \underline{X}(y, 0) + C \cdot s \\ \bar{X}(x, 0) - \underline{X}(y, 0) &\leq X_0(x) - X_0(y) \leq Lip(X_0) \cdot |x-y| \end{aligned}$$

We know that:

$$X_0(x) - X_0(y) = \mathcal{O}(\sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\delta})$$

From where,

$$\bar{X} \leq \underline{X}$$

This first step is the main useful for the next demonstrations. To make the Hamilton-Jacobi demonstration completed, there are two more steps to do. Both are well presented in [Barles, 1995] and more particularly, the reader could refer at p.52 and following.

Step 2: Barriers

Step 3: Existence by Perron's method

■

2.2.3 Convergence and error estimation

Theorem 2.17 (Convergence to the viscosity solution)

Consider X^0 the unique solution of (1.4), checking the assumptions (A1), (A2) and (A3). If the function X^ε is defined as

$$X^\varepsilon: \mathbb{R} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(y, t) \mapsto \varepsilon \cdot x_{\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \rfloor} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right)$$

with $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ solution of (1.1).

Then for all compact set $\mathcal{K} \subset \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, X^ε converges uniformly to X^0 on \mathcal{K} when $\varepsilon \rightarrow 0$, i.e.

$$\|X^\varepsilon - X^0\|_{L^\infty(\mathcal{K})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Proof

Step 1: Obtaining barriers

Let $C = \|F\|_\infty$ such that

$$|x_i(t) - x_i(0)| \leq C \cdot t$$

We also consider

$$\left| \varepsilon \cdot x_i \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) - \varepsilon \cdot x_i(0) \right| \leq C \cdot \frac{t}{\varepsilon} \cdot \varepsilon$$

So

$$|X^\varepsilon(y = i\varepsilon, t) - X^0(y = i\varepsilon)| \leq C \cdot t$$

As $i\varepsilon \leq y \leq (i+1)\varepsilon$ and $|X^0(i\varepsilon) - X^0(y)| \leq \text{Lip}(X^0) \cdot \varepsilon$, we finally obtain that:

$$|X^\varepsilon(y, t) - X^0(y)| \leq C \cdot t + \text{Lip}(X^0) \cdot \varepsilon$$

Step 2: Setting

Let the semi-relaxed limits defined as follows:

$$\bar{X}(y, t) = \limsup_{\varepsilon}^* X^\varepsilon(y, t) = \limsup_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (y', t') \rightarrow (y, t)}} X^\varepsilon(y', t')$$

And

$$\underline{X}(y, t) = \liminf_{\varepsilon}^* X^\varepsilon(y, t) = \liminf_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (y', t') \rightarrow (y, t)}} X^\varepsilon(y', t')$$

Step 3: Proof of subsolution of (1.4)

Step 3.1: Setting

As we have $|X^\varepsilon(y, t) - X^0(y)| \leq C \cdot t + \text{Lip}(X^0) \cdot \varepsilon$, we meet at the following initial condition:

$$\bar{X}(y, 0) \leq X^0(y)$$

Consider a test function $\varphi \in C^1(\mathbb{R} \times [0, +\infty))$ which is defined as:

$$\begin{cases} \bar{X} \leq \varphi \\ \bar{X} = \varphi \text{ at } (y_0, t_0) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty) \end{cases}$$

Let show that $\varphi_t \leq F(\varphi_y)$ in (y_0, t_0) . In order to prove it by contradiction, we suppose that $\varphi_t(y_0, t_0) = \theta + F(\varphi_y(y_0, t_0))$ with $\theta > 0$.

Let $P = (y, t), P_0 = (y_0, t_0)$ and the set $Q_{r,R}(P_0)$ defined as previously i.e. $Q_{r,R}(P_0) = (y_0 - r, y_0 + r) \times (t_0 - R, t_0 + R)$. Consider $\tilde{\varphi}(P) = \varphi(P) + |P - P_0|^2$ such as $\begin{cases} \tilde{\varphi}_t = \varphi_t \\ \tilde{\varphi}_y = \varphi_y \end{cases}$ at P_0 .

$$\begin{cases} \bar{X} < \tilde{\varphi} \text{ in } Q_{r,R}(P_0) \setminus \{P_0\} \\ \bar{X} = \tilde{\varphi} \text{ at } P_0 \end{cases}$$

In this way, we have $M_0 = \sup_{Q_{r,R}(P_0)} \bar{X} - \tilde{\varphi} = 0$ and $\sup_{\partial Q_{r,R}(P_0)} \bar{X} - \tilde{\varphi} \leq -2\delta$ with $\delta > 0$.

Step 3.2: Introduction of $\varepsilon > 0$

Let consider

$$\begin{aligned} M_\varepsilon &= \sup_{Q_{r,R}(P_0)} X^\varepsilon - \tilde{\varphi} \\ \sup_{\partial Q_{r,R}(P_0)} X^\varepsilon - \tilde{\varphi} &\leq -\delta \end{aligned}$$

We want to prove that $M_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} M_0 = 0$.

Step 3.3: Subsolution inequality

It is then possible to find a suite R_ε converging to P_0 such as:

$$\bar{X}(P_0) = \limsup X^\varepsilon(R_\varepsilon)$$

Thus,

$$\begin{aligned} M_\varepsilon &= X^\varepsilon(R_\varepsilon) - \tilde{\varphi}(R_\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (X^\varepsilon - \tilde{\varphi})(P_0) = 0 \\ \begin{cases} \bar{X} - \tilde{\varphi} < M_\varepsilon \\ \bar{X} - \tilde{\varphi} = M_\varepsilon \text{ at } R_\varepsilon = (y_\varepsilon, t_\varepsilon) \notin \partial Q_{r,R}(P_0) \end{cases} \end{aligned}$$

It is equivalent to write that

$$\begin{aligned} \varepsilon \cdot x_{\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \rfloor} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) &\leq \tilde{\varphi}(y, t) + M_\varepsilon = \hat{\varphi}(y, t) \\ x_{\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \rfloor} \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) &\leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi}(y, t) \end{aligned}$$

Considering that $y_\varepsilon = \varepsilon \cdot (i_\varepsilon + \alpha_\varepsilon)$ with $\alpha_\varepsilon \in [0, 1[$ and $y = \varepsilon \cdot (i + \alpha_\varepsilon)$ such that $\lfloor \frac{y}{\varepsilon} \rfloor = i$ and $\frac{t_\varepsilon}{\varepsilon} = \tau$, we have:

$$\begin{cases} x_i(\tau) \leq \frac{1}{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi}(\varepsilon \cdot i + \varepsilon \cdot \alpha_\varepsilon, \varepsilon \cdot \tau) = \psi(i, \tau) \\ x_i(\tau) = \psi(i, \tau) \text{ for } i = i_\varepsilon \text{ and } \tau = \frac{t_\varepsilon}{\varepsilon} \end{cases}$$

As

$$\dot{x}_{i_\varepsilon}(t) = F(x_{i_\varepsilon+1}(t) - x_{i_\varepsilon}(t))$$

According to the previous inequality and to the non-decrease of function F , we have:

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \psi \leq F(\psi(i_\varepsilon + 1, \tau) - \psi(i_\varepsilon, \tau))$$

Step 3.4: Conclusion

By construction,

$$\begin{aligned}\psi(i, \tau) &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \hat{\varphi}(\varepsilon \cdot i + \varepsilon \cdot \alpha_\varepsilon, \varepsilon \cdot \tau) \\ &= \frac{1}{\varepsilon} \cdot \tilde{\varphi}(\varepsilon \cdot i + \varepsilon \cdot \alpha_\varepsilon, \varepsilon \cdot \tau) + \frac{M_\varepsilon}{\varepsilon}\end{aligned}$$

From which we deduce that:

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_t(y_\varepsilon, t_\varepsilon) &\leq F\left(\frac{1}{\varepsilon} \cdot (\tilde{\varphi}(y_\varepsilon + \varepsilon, t_\varepsilon) - \tilde{\varphi}(y_\varepsilon, t_\varepsilon))\right) \\ &\leq F\left(\tilde{\varphi}_y(\xi, t_\varepsilon)\right) \text{ with } \xi \in [y_\varepsilon, y_\varepsilon + \varepsilon]\end{aligned}$$

And as $\varphi = \tilde{\varphi}$ at P_0

$$\varphi_t \leq F(\varphi_y) \text{ at } P_0$$

But it is contradictory with $\varphi_t(P_0) = \theta + F(\varphi_y(P_0))$ because of $\theta > 0$.

Step 4: Final conclusion

We show that if \bar{X} is a supersolution and if \underline{X} is a subsolution of equation (1.4), using the previous comparison principle for (1.4) we obtain that $\bar{X} \leq \underline{X}$. The proofs of both assumptions are available in the following paragraphs. However, we have by construction $\bar{X} \geq \underline{X}$. So,

$$\bar{X} = \underline{X} = X^0$$

And finally, $\forall \mathcal{K} \subset \mathbb{R} \times [0, +\infty)$,

$$|X^\varepsilon - X^0|_{L^\infty(\mathcal{K})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

■

Theorem 2.18 (General error estimation)

If \tilde{X}^ε is a general solution of equation (1.4),

Then $\forall y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, T)$ we have $|\tilde{X}^\varepsilon(y, t) - X^0(y, t)| \leq C_T \sqrt{\varepsilon}$.

Corollary 2.19 (Particular error estimation)

If $X^\varepsilon = \varepsilon \cdot x_{|\frac{y}{\varepsilon}|}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ is a particular solution of equation (1.4),

Then $\forall y \in \mathbb{R}, \forall t \in [0, T)$ we have $|X^\varepsilon(y, t) - X^0(y, t)| \leq C_T \sqrt{\varepsilon}$.

Proof of Theorem 2.18

Step 0: Preliminary

Considering (1.1), we introduce $x(y, t) = x_i(t)$ where we considerate a continuum of vehicles which indices pass from $i \in \mathbb{Z}$ to $y \in \mathbb{R}$. Thus,

$$\frac{\partial X}{\partial t}(y, t) = F(x(y+1, t) - x(y, t))$$

If X^ε which is defined as follows

$$\begin{cases} X^\varepsilon = \varepsilon \cdot x \lfloor \frac{y}{\varepsilon} \rfloor \left(\frac{t}{\varepsilon} \right) \\ X^\varepsilon(y, t = 0) = X_0 \left(\varepsilon \cdot \lfloor \frac{y}{\varepsilon} \rfloor \right) = X_0^\varepsilon(y) \end{cases}$$

Solves

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{X}^\varepsilon}{\partial t}(y, t) = F \left(\frac{\tilde{X}^\varepsilon(y + \varepsilon, t) - \tilde{X}^\varepsilon(y, t)}{\varepsilon} \right) \\ \tilde{X}^\varepsilon(y, t = 0) = X_0(y) \end{cases}$$

Then

$$X_0^\varepsilon(y) \leq X_0(y) \leq X_0^\varepsilon(y) + \varepsilon \cdot \text{Lip}(X_0)$$

And

$$X^\varepsilon(y, t) \leq \tilde{X}_0^\varepsilon(y) \leq X^\varepsilon(y, t) + \varepsilon \cdot \text{Lip}(X_0)$$

The aim of the proof is to show that $|\tilde{X}^\varepsilon(y, t) - X^0(y, t)| \leq C_T \sqrt{\varepsilon}$.

Let $T > 0$. Consider

$$M_\eta = \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ 0 \leq t \leq T}} X^\varepsilon(x, t) - X^0(x, t) - \eta t > 0$$

And

$$M_{\alpha, \eta, \gamma, \delta} = \sup_{\substack{x, y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq t, s \leq T}} X^\varepsilon(x, t) - X^0(y, s) - \frac{|x - y|^2}{2\gamma} - \frac{|t - s|^2}{2\delta} - \alpha \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{\eta}{T - t} > \frac{M}{2} > 0$$

Where $\alpha > 0$, $\eta > 0$, $\gamma > 0$ and $\delta > 0$.

Step 1: Obtaining barriers

$$M_{\alpha, \eta, \gamma, \delta} > \frac{M_\eta}{2} > 0$$

for α and η small enough.

We still express the penalization as $p = \frac{|x - y|^2}{2\gamma} + \frac{|t - s|^2}{2\delta} + \alpha \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{\eta}{T - t}$.

$$M_{\alpha, \eta, \gamma, \delta} \geq X^\varepsilon(0, 0) - X^0(0, 0) - \frac{\eta}{T} = -C^{(0)}$$

And

$$X_0(x) - X_0(y) + C \cdot t + C \cdot s - p \geq M_{\alpha, \eta, \gamma, \delta}$$

Let $d = |x - y|$ and $C^{(1)} = 2CT + C^{(0)}$. We have $C^{(1)} \geq p - L \cdot d$ in such a way that we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{\eta}{T - t} + \alpha \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{|x - y|^2}{2\gamma} + \frac{|t - s|^2}{2\delta} - L \cdot d &\leq C^{(1)} \\ \frac{d^2}{2\gamma} - L \cdot d &\leq C^{(1)} \end{aligned}$$

We then deduce that $d = |x - y| \leq C^{(2)}$ from where we obtain that

$$\frac{\eta}{T - t} + \alpha \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{|t - s|^2}{2\delta} \leq C^{(3)}$$

Step 2: Viscosity inequalities

Step 2.1: Subsolution inequality

On one hand, we have:

$$X^\varepsilon(x, t) \leq M_{\alpha, \eta, \gamma, \delta} + X^0(y, s) + \frac{|x - y|^2}{2\gamma} + \frac{|t - s|^2}{2\delta} + \alpha \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{\eta}{T - t} = \varphi(x, t)$$

The inequality is available when $M_{\alpha, \eta, \varepsilon, \delta}$ is reached.

And thus, we obtain that $\varphi_t \leq F(\varphi_x)$ at the sup point.

$$\frac{\eta}{(T - t)^2} + \frac{t - s}{\delta} \leq F\left(\frac{x - y}{\gamma}\right)$$

Step 2.2: Supersolution inequality

On the other hand, we have:

$$X^0(y, s) \geq -M_{\alpha, \eta, \gamma, \delta} + X^\varepsilon(x, t) - \frac{|x - y|^2}{2\gamma} - \frac{|t - s|^2}{2\delta} - \alpha \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{\eta}{T - t} = -\psi(y, s)$$

And thus, we obtain that $\psi_s \leq F(\psi_y)$.

$$\frac{t - s}{\delta} \geq F\left(-\alpha y + \frac{x - y}{\gamma}\right)$$

Step 2.3: Difference

(2.13) – (2.14)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\eta}{T^2} &\leq \frac{\eta}{(T - t)^2} \leq F\left(\frac{x - y}{\gamma}\right) - F\left(\frac{x - y}{\gamma} - \alpha y\right) \\ &\leq Lip(F) \cdot \alpha |y| \end{aligned}$$

The proof that $\alpha |y| \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$ is similar of what it was previously done for proving $\alpha \cdot i_\alpha \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0} 0$.

Step 3: Distinction

If we choose to take $\frac{\eta}{T^2} > Lip(F) \cdot \alpha |y|$, then two cases are possible: either $t = 0$ or $s = 0$.

Both cases are similar and we only focus on one which is $t = 0$.

As

$$\begin{aligned} \frac{|x - y|^2}{2\gamma} + \frac{|t - s|^2}{2\delta} &\leq C \\ 0 < \frac{M_\eta}{2} < M_{\alpha, \eta, \gamma, \delta} &\leq X_0(x) - X_0(y) + C \cdot s - \frac{|x - y|^2}{2\gamma} \\ &\leq Lip(X_0) \cdot |x - y| + C \cdot |t - s| - \frac{|x - y|^2}{2\gamma} \\ &\leq C' \cdot (\sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta} + \delta) \end{aligned}$$

Step 4: Conclusion

We know that:

$$\begin{aligned}
\widehat{M}_{\alpha,\eta,\gamma,\delta} &= \sup_{\substack{x=y \\ t=s}} X^\varepsilon(x,t) - X^0(y,s) - \frac{|x-y|^2}{2\gamma} - \frac{|t-s|^2}{2\delta} - \alpha \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{\eta}{T-t} \\
&= \sup_{\substack{x \in \mathbb{R} \\ 0 \leq t \leq T}} X^\varepsilon(x,t) - X^0(y,s) - \alpha \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{\eta}{T-t} \\
&\leq \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R} \\ 0 \leq t,s \leq T}} X^\varepsilon(x,t) - X^0(y,s) - \frac{|x-y|^2}{2\gamma} - \frac{|t-s|^2}{2\delta} - \alpha \cdot \frac{y^2}{2} - \frac{\eta}{T-t} \\
&\leq C' \cdot (\sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta})
\end{aligned}$$

From where,

$$\begin{aligned}
X^\varepsilon(x,t) - X^0(y,s) &\leq \alpha \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{\eta}{T-t} + C' \cdot (\sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}) \\
&\leq \frac{T^2}{T-t} \cdot Lip(F) + C' \cdot (\sqrt{\gamma} + \sqrt{\delta}) \\
&\leq T \cdot Lip(F) + C' \cdot \gamma \\
&\leq [C' + T \cdot Lip(F)] \cdot \gamma
\end{aligned}$$

Choosing $\gamma = \sqrt{\varepsilon}$, we find back the searched result. ■

2.2.4 Transition to macroscopic variables

We take x the vehicle location for the macroscopic model, given as follows:

Definition 2.20

$$x = X(y,t) \tag{1.5}$$

We now consider the vehicles density noted K , defining the number of vehicles per unit length.

One can prove that the density is equal to:

$$K(x,t) = \frac{1}{X_y} \tag{1.6}$$

Then, we can find the PDE solved by K :

Proposition 2.21 (PDE for the macroscopic first order model)

If the density K is defined as (1.6) with X the unique solution of (1.4), then K formally solves

$$K_t + (Q(K))_x = 0 \tag{1.7}$$

Where the function Q is such that $Q(K) = K \cdot F\left(\frac{1}{K}\right)$.

Proof: formal

We assume that $X(., t)$ is invertible and $X^{-1}(., t)$ its reciprocal function, which leads to

$$K(x, t) = \frac{1}{X_y(y, t)} = \frac{1}{X_y}(X^{-1}(., t)(x), t) = \partial_x X^{-1}(., t)(x)$$

and

$$K_t(x, t) = \partial_x(\partial_t X^{-1}(., t)(x))$$

Let's calculate $\partial_t X^{-1}(., t)(x)$.

We differentiate $x = X(y, t) = X(X^{-1}(., t)(x), t)$ with respect to t , we get

$$\partial_t X^{-1}(., t)(x) = -\frac{X_t}{X_y} \quad (1.8)$$

Combining (1.4), (1.6) and (1.8), we get that

$$\partial_t X^{-1}(., t)(x) = -K(x, t) \cdot F\left(\frac{1}{K(x, t)}\right)$$

If we note the function such $Q(K) = K \cdot F\left(\frac{1}{K}\right)$, then the previous result leads to

$$K_t(x, t) = \partial_x(-Q(K(x, t)))$$

Thus, we obtain that $K_t + (Q(K))_x = 0$ ■

Remark 2.22 This proof could be made more rigorous using viscosity solutions theory. Due to lack of time, this work was not made in the presented work.

Remark 2.23 (1.7) is the conservative equation used in the LWR model. It describes the conservation of cars number on a given section. It is one of the three equations used in macroscopic models. The others are the definition of flow speed and the equilibrium equation on the velocity. The equation on the flow speed noted is implicit here; it is hidden in the definition of the flow $Q(K)$ because if we note $V(K)$ the flow speed, we have $V(K) = F\left(\frac{1}{K}\right) = \frac{Q(K)}{K}$.

2.3 Delayed first order model

In this part, we will focus on a delayed model. Considering the previous microscopic traffic model at the first order, we introduce a time delay representing the necessary time for the driver to take in account a modification in its leader driving behavior. This model equation is as follows:

$$\dot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t-\tau) - x_i(t-\tau)), \text{ for all } i \in \mathbb{Z}, t > 0 \quad (1.9)$$

With $\tau > 0$ represents the time delay, supposed to be equal between every driver. As before, the function F represents the speed function and it satisfies the previous assumptions (A1) and (A2).

2.3.1 Discussion

We first have worked on particular cases (see also the part ‘‘Simulations’’ which follows). Indeed, the specificity of the homogenization method is that it applies on particles which keep spatially ordered right to time variation. Introducing time delay in the first order model leads us to consider if the initial vehicles order is kept all the time. The second reason for such a condition is available may be the most evident. By hypothesis as the vehicles drive through a single lane road and as there is no overtaking maneuver, the initial order should be conserved. If it is not, it means that a vehicle could pass through its leader, that is to say there is a collision. So, we have to verify this condition in order to be sure that the model avoids accident crashes.

In this way, we take a very simple model with a single vehicle running at the maximum speed v_{max} during a time period of at least the time delay τ amplitude. During this period, its headway is high enough to consider no interaction with its leader. We also suppose that the leader vehicle has a constant speed v_0 which is strictly lower than the maximum speed and which could be null $0 \leq v_0 < v_{max}$.

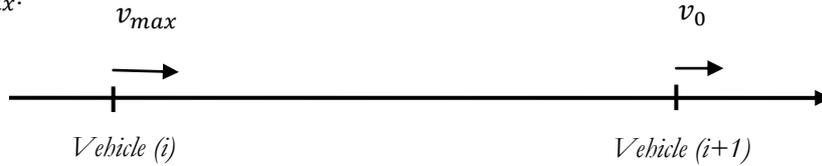


Figure 2.4 : Initial situation

We choose a simple follow-the-leader law F given by the equation:

$$\dot{x}_i(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } S_i(t) < d_{min} \\ \frac{S_i(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} v_{max} & \text{if } d_{min} \leq S_i(t) \leq d_{max} \\ v_{max} & \text{if } S_i(t) > d_{max} \end{cases}$$

Considering the variable $S_i(t) = x_{i+1}(t - \tau) - x_i(t - \tau)$

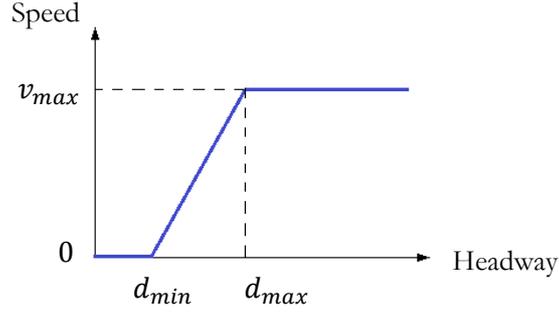
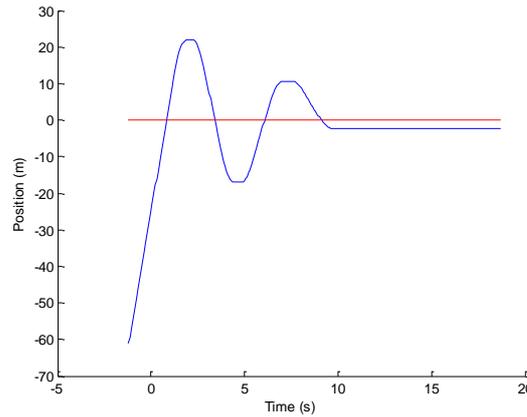


Figure 2.5 : General form of the tested speed function

We then search to ensure that the follower doesn't overtake its leader, for any time $t > 0$. A first condition which comes to mind is that $\tau < d_{max}/v_{max}$. Indeed, the time delay has to be lower than the time to cross the critical headway d_{max} at top speed v_{max} for instance if the leader brutally stops. We could remark that for our speed function, there exists a corresponding macroscopic fundamental diagram considering that the density is the inverse of the headway. Thus, the maximum flow that we could wait for is expressed as $Q_{max} = v_{max} \cdot K_{crit} = v_{max}/d_{max}$. So the maximum value expected for τ is less than $\tau_{ref} = 1/Q_{max}$. For the next steps, we consider that the time delay is rescaled $\bar{\tau} := \frac{\tau}{\tau_{ref}}$ for working with a dimensionless number. We keep the simplest notation τ thereafter instead of $\bar{\tau}$, even if the time delay is normalized.

In the case of $v_0 = 0$, we consider a situation as:

We would like that $x(t) < 0 = x_0, \forall t$ which can ensure that there is no collision. The considerate situation is the worst case we can imagine for such a model because the relative speed is at its maximum. First simulations give that for a time delay high enough the trajectory describes some damped oscillations around the position $x_0 = 0$.



$$\begin{aligned} d_{min} &= 5 \text{ m} \\ d_{max} &= 25 \text{ m} \\ v_{max} &= 30 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ v_0 &= 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \tau &= 1,2 \text{ s} \end{aligned}$$

Figure 2.6 : Example of damped oscillations

In that way, the speed function has to be strictly non-decreasing. This condition gives that we can find a constant $K > 0$ such as $\dot{x}(t - \tau) \leq K \cdot \dot{x}(t), \forall t$. We can also prove that for $d_{min} \leq S_i(t) \leq d_{max}$, we have $\ddot{x}(t) = \alpha - \beta \cdot \dot{x}(t - \tau)$ with $\alpha, \beta > 0$. Then,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t - \tau) &\leq K \cdot \dot{x}(t) \\ \ddot{x}(t) = \alpha - \beta \cdot \dot{x}(t - \tau) &\geq \alpha - \beta \cdot K \cdot \dot{x}(t) \end{aligned}$$

$$\ddot{x}(t) \geq \alpha - K' \cdot \dot{x}(t) \quad \text{with } K' = \beta \cdot K > 0$$

From which we deduce that

$$\dot{x}(t) \geq (\dot{x}(0) + \alpha \cdot t) \cdot e^{-K't} > 0$$

In this way, the position $x(t)$ is a strict increasing function with respect to time t . Passing to the limit for $t \rightarrow +\infty$, we could formally prove that $x(t) < 0$ if $t < +\infty$ and if there exists a constant K defined as above.

All of this proof is almost formal and we want to prove a strict comparison principle for such models. This is done in the following part. We highlight a sufficient condition on τ for considering true the existence of a constant K defined such as $\dot{x}(t - \tau) \leq K \cdot \dot{x}(t), \forall t$.

2.3.2 Comparison principle for ODEs with delay

We consider $x_i(t)$ solution of the previous system of ODEs (1.5) with delay $\tau > 0$. We also assume that all $x_i(t)$ is defined for $t \in (-\tau, 0]$. This condition allows considering the existence of necessary information about initial data, due to the time delay.

We also assume that F satisfies (which can always be done, up to rescale x_i and t)

$$0 \leq F' \leq 1 \quad \text{and} \quad F \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \quad (1.10)$$

Proposition 3.1 (Strict comparison principle)

Assume (1.10), and that $(x_i)_i$ and $(y_i)_i$ satisfy (1.9). Let us define

$$d_i(t) = x_i(t) - y_i(t)$$

and let us assume that there exists a real ρ such that

$$0 < \rho \leq K_+ := \frac{1 + \sqrt{1 - 4\tau}}{2\tau} \quad \text{with } \tau \leq \frac{1}{4}$$

and a constant $\delta > 0$ such that

$$0 < \delta \leq d_i(s - \tau) \leq \rho \cdot d_i(s), \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad s \in (0, \tau) \quad (1.11)$$

and

$$0 < \delta \leq d_i(s - \tau') \leq \rho \cdot d_i(s), \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad \tau' \in [0, \tau], \quad s \in [\tau', \tau] \quad (1.12)$$

i) (Comparison) Then we have

$$d_i(t) > 0, \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad t \geq 0$$

ii) (Estimate) Moreover if

$$\rho > K_- := \frac{1 - \sqrt{1 - 4\tau}}{2\tau}$$

then we have

$$0 < d_i(s - \tau') \leq \rho \cdot d_i(s) \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad \tau' \in [0, \tau], \quad s \geq \tau'$$

Remark 3.2 Taking the limit $\delta \rightarrow 0$, we can recover a (non strict) comparison principle.

Formal proof of Proposition 3.1

Part 1: A priori estimate

We first assume that for some $t_0 \geq \tau$ and $\delta_{t_0} > 0$ we have

$$0 < \delta_{t_0} \leq d_i(s - \tau) \leq \rho d_i(s) \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad s \in (0, \tau) \quad (1.13)$$

and

$$0 < \delta_{t_0} \leq d_i(s - \tau') \leq d_i(s), \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad \tau' \in [0, \tau], \quad s \in [\tau', t_0] \quad (1.14)$$

Notice that estimate (1.13) follows from (1.14) with $\delta_{t_0} = \delta$.

Notice also that (1.14) holds for $t_0 = \tau$ with $\delta_{t_0} = \delta$, because of (1.12).

Notice that (1.13) and (1.14) imply in particular

$$0 < \delta_{t_0} \leq d_i(s - \tau) \leq \rho d_i(s), \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad s \in (0, t_0] \quad (1.15)$$

Step 1: ODE estimate

Let us set

$$a_i(t) = (y_{i+1} - y_i)(t - \tau)$$

Then we have for $t > 0$ and some $\xi_i(t) \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \dot{d}_i(t) &= F(a_i(t) - (d_{i+1} - d_i)(t - \tau)) - F(a_i(t)) \\ &= \dot{F}(\xi_i(t)) \cdot \{(d_{i+1} - d_i)(t - \tau)\} \\ &\leq \dot{F}(\xi_i(t)) \cdot d_i(t - \tau) \end{aligned}$$

where we have used (1.10) for the last line.

We deduce from (1.15) and (1.14) that

$$\dot{d}_i(t) \geq -\rho d_i(t), \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, t_0] \quad (1.16)$$

Step 2: a priori estimate on $d_i(t - \tau)$

For any $\tau' \in [0, \tau)$ and $t \in (\tau', t_0)$, we have

$$\begin{aligned} d_i(t - \tau') - d_i(t) &= - \int_{t-\tau'}^t \dot{d}_i(s) ds \\ &\leq \rho \cdot \int_{t-\tau'}^t \dot{d}_i(s) ds \\ &\leq \rho^2 \cdot \tau' \cdot d_i(t) \end{aligned}$$

where we have used (1.16) in the second line, and (1.14) in the last line.

This shows that in particular that

$$d_i(t - \tau') \leq \rho' d_i(t), \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad \tau' \in [0, \tau), \quad t \in (\tau', t_0) \quad (1.17)$$

with

$$\rho' = 1 + \rho^2 \tau \quad (1.18)$$

Notice that if

$$\rho' < \rho \quad (1.19)$$

then this implies in particular (1.14) (and even better). Notice that (1.18) is possible if

$$\rho^2\tau - \rho + 1 < 0$$

i.e.

$$\rho \in [K_-, K_+] \text{ with } K_{\pm} = 1 \pm \frac{\sqrt{1-4\tau}}{2\tau} \text{ and } \tau < \frac{1}{4}$$

Part 2: propagation by continuity

We can simply call $t_* \geq \tau$ the first time such that (1.14) is not true for any time $t_0 > t_*$. If (1.19) is satisfied, then Step 2 shows that (1.14) has to be true for $t_0 \in [t_*, t_* + \varepsilon]$ for some $\varepsilon > 0$, using the fact that the solutions are Lipschitz in time. Therefore, if $\tau < \frac{1}{4}$ and $\rho < K_+$, then the result ii) follows and i) also follows (up to increase ρ).

Finally, the results i) and ii) follow also if $\tau \leq \frac{1}{4}$ and $\rho \leq K_+$, just passing to the limit in $\tau \rightarrow \frac{1}{4}$ and/or $\rho \rightarrow K_+$. This ends the (formal, but almost rigorous) proof of the proposition. \blacksquare

Lemma 3.3 (Estimate from “initial data”)

Let us assume $(x_i)_i$ and $(y_i)_i$ solve (1.9) and let us set

$$d_i(t) = x_i(t) - y_i(t)$$

We assume that

$$0 \leq F \leq 1$$

and for some $\bar{\delta}, \bar{M}, \bar{\rho} > 0$

$$0 < \bar{\delta} < d_i(s-\tau) \leq \bar{M}, \text{ for all } i \in \mathbb{Z}, s \in (0, \tau] \quad (1.20)$$

Then we have (1.11) and (1.12) with

$$\delta = \bar{\delta} - \tau$$

and

$$\rho = \frac{\bar{M}^2}{\bar{\delta} \left(\bar{\delta} - \tau \left(1 + \frac{\bar{M}}{\bar{\delta}} \right) \right)} > 1$$

for

$$\tau < \frac{\bar{\delta}}{1 + \frac{\bar{M}}{\bar{\delta}}}$$

Remark 3.4 Notice that for $\tau \leq \frac{1}{4}$ small enough, we have $\rho \leq K_+$, and the strict comparison principle (Proposition 3.1) applies.

Formal proof of Lemma 3.3

Step 1: first estimate

Then for $t > 0$ we have

$$1 \geq F((x_{i+1} - x_i)(t - \tau)) \geq \dot{d}_i(t) \geq -F(a_i(t)) \geq -1$$

which implies that for $s \in [0, \tau]$

$$\bar{\delta} - \tau \leq d_i(s) \leq \bar{M} + \tau =: M$$

This implies

$$0 < \bar{\delta} < d_i(s - \tau) \leq \bar{\rho} d_i(s) \leq \bar{\rho} M, \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad s \in (0, \tau) \quad (1.21)$$

with

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{M}}{\bar{\delta} - \tau} > 1 \quad \text{for } \tau < \bar{\delta}$$

Step 2: further estimate

Then in particular for $s \in [\tau', \tau]$, we deduce that

$$d_i(s - \tau') + \tau' \geq d_i(s) \geq d_i(s - \tau') - \tau'$$

From (1.21), we deduce that

$$d_i(s - \tau') \geq \frac{\bar{\delta}}{\bar{\rho}}$$

Therefore, for $s \in [\tau', \tau]$ with $\tau' \in [0, \tau]$, we get in particular that

$$d_i(s) \geq \frac{\bar{\delta}}{\bar{\rho}} - \tau \geq \rho^{-1} d_i(s - \tau)$$

with

$$\rho := \frac{\bar{M}}{\frac{\bar{\delta}}{\bar{\rho}} - \tau} > \bar{\rho} > 1 \quad \text{for } \tau < \frac{\bar{\delta}}{\bar{\rho}}$$

This implies (1.12) with

$$\delta := \bar{\delta} - \tau > 0$$

and ρ given by the last equation. Then (1.21) implies (1.11). ■

Corollary 3.4 (Conservation of initial order)

Considering $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ solution of (1.9) such that $x_i(0) \leq x_{i+1}(0)$, with $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ satisfying assumption (A4). Let us define

$$S_i(t) = x_{i+1}(t) - x_i(t)$$

and let us assume that there exists a real ρ such that

$$0 < \rho \leq K_+ := \frac{1 + \sqrt{1 - 4\tau}}{2\tau} \quad \text{with } \tau \leq \frac{1}{4}$$

and a constant $\delta > 0$ such that

$$0 < \delta \leq S_i(s - \tau) \leq \rho S_i(s), \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad s \in (0, \tau)$$

and

$$0 < \delta \leq S_i(s - \tau') \leq \rho S_i(s), \quad \text{for all } i \in \mathbb{Z}, \quad \tau' \in [0, \tau], \quad s \in [\tau', \tau]$$

Then, we have:

$$x_i(t) \leq x_{i+1}(t), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall t > 0$$

Proof

We consider x_i and x_{i+1} two solutions of (1.9) such as:

$$x_i(0) \leq x_{i+1}(0), \quad \forall i \in \mathbb{Z}$$

with $x_i \in C^1(\mathbb{R}), \forall i \in \mathbb{Z}$ and $(x_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ Lipschitz.

Applying the Proposition 3.1 for $y_i = x_{i+1}$, the proof is direct. \blacksquare

Remark 3.5 The conservation of vehicles order and more generally the existence of a comparison principle allow us to believe in the possibility to extend the previous proofs of existence, uniqueness and convergence for delayed first order models. Moreover, the error estimation should be the same than for a zero time delay.

2.4 Opening to the second order model

Let's consider the second microscopic model equation, previously coded (2') given by the following partial differential equation:

$$\ddot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_i(t)) \quad (1.22)$$

Proposition 3.4 Conservation of initial vehicles order

Firstly, we assume that vehicles keep their initial order, that is to say there is no overtaking maneuver.

Let's consider a particular case given by:

$$\tau \ddot{x}_i(t) + \dot{x}_i(t) = F_0(x_{i+1}(t) - x_i(t))$$

With τ representing the reaction time of the vehicle driver such as $\tau > 0$.

And $F_0: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a non-decreasing function defined as follows:

$$F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_i(t)) = \frac{1}{\tau} (F_0(x_{i+1}(t) - x_i(t)) - \dot{x}_i(t))$$

Proof

Let $\xi_i(t) = x_i(t) + 2\tau \dot{x}_i(t)$.

Consider now the couple (x_i, ξ_i) from which we have:

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = \frac{1}{2\tau} (\xi_i(t) - x_i(t)) \\ \dot{\xi}_i(t) = 2F_0(x_{i+1}(t) - x_i(t)) - \dot{x}_i(t) = \frac{1}{2\tau} (\xi_i(t) - x_i(t)) + 2F_0(x_{i+1}(t) - x_i(t)) \end{cases}$$

Let $\begin{cases} \bar{x}_i > x_i \\ \bar{\xi}_i > \xi_i \end{cases}$, true for $t = 0$ and for $\forall t > 0$, such as $\begin{pmatrix} x_i \\ \xi_i \end{pmatrix}$ and $\begin{pmatrix} \bar{x}_i \\ \bar{\xi}_i \end{pmatrix}$ are solutions to the previous system of equations.

Consider

$$\min_i (\bar{x}_i(t) - x_i(t), \bar{\xi}_i(t) - \xi_i(t)) = m(t)$$

First case: the minimum $m(t)$ is reached in $\bar{x}_{i_0} - x_{i_0}$ for $t = t_0$.

Then

$$(\bar{\xi}_{i_0} - \xi_{i_0}) \geq (\bar{x}_{i_0} - x_{i_0})$$

And

$$\frac{d}{dt} (\bar{x}_{i_0} - x_{i_0}) = \frac{1}{2\tau} \left((\bar{\xi}_{i_0} - \xi_{i_0}) - (\bar{x}_{i_0} - x_{i_0}) \right)$$

So

$$m'(t) \geq 0$$

Second case: the minimum $m(t)$ is reached in $\bar{\xi}_{i_0} - \xi_{i_0}$ for $t = t_0$.

$$\begin{aligned} m'(t) &= \frac{d}{dt} (\bar{\xi}_{i_0} - \xi_{i_0}) \\ &= \frac{1}{2\tau} \left((\bar{x}_{i_0} - x_{i_0}) - (\bar{\xi}_{i_0} - \xi_{i_0}) \right) + 2 \left(F_0(\bar{x}_{i_0+1} - \bar{x}_{i_0}) - F_0(x_{i_0+1} - x_{i_0}) \right) \end{aligned}$$

We know that:

$$\begin{aligned} &F_0(\bar{x}_{i_0+1} - \bar{x}_{i_0}) - F_0(x_{i_0+1} - x_{i_0}) \\ &= \left(\int_0^1 d\alpha . F_0' \left[(x_{i_0+1} - x_{i_0}) + \alpha \cdot \left((\bar{x}_{i_0+1} - x_{i_0+1}) - (\bar{x}_{i_0} - x_{i_0}) \right) \right] \right) \\ &\quad \times \left((\bar{x}_{i_0+1} - x_{i_0+1}) - (\bar{x}_{i_0} - x_{i_0}) \right) \end{aligned}$$

Consider $d_{i_0} = \bar{x}_{i_0} - x_{i_0}$.

According to the Rolle's Theorem, we can meet \tilde{S} such as:

$$F_0'(\tilde{S}) = \int_0^1 d\alpha . F_0' \left[(x_{i_0} - x_{i_0}) + \alpha \cdot (\bar{x}_{i_0+1} - \bar{x}_{i_0} - x_{i_0+1} - x_{i_0}) \right]$$

Then

$$\begin{aligned} m'(t) &= -\frac{1}{2\tau} m(t) + \frac{1}{2\tau} d_{i_0} + 2F_0'(\tilde{S}) \cdot (d_{i_0+1} - d_{i_0}) \\ &\geq -\frac{1}{2\tau} m(t) + d_{i_0} \left(\frac{1}{2\tau} - 2F_0'(\tilde{S}) \right) \end{aligned}$$

Thus, under the assumption that

$$\frac{1}{2\tau} - 2F_0'(\tilde{S}) \geq 0$$

we obtain that:

$$m'(t) \geq -\frac{1}{2\tau} m(t)$$

Finally,

$$m(t) \geq m(0) \cdot \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right) > 0$$

Remark 4.1 The assumption $\frac{1}{2\tau} - 2F_0'(\tilde{S}) \geq 0$ is also necessary to justify the initial Taylor expands.

3 ETUDE EN SIMULATION

Nous concentrons dans cette partie l'ensemble des essais numériques qui ont été réalisés dans le but de mieux appréhender les problèmes liés à la modélisation multi échelles du trafic routier. Ainsi, en première partie, nous nous proposons de comparer les résultats de simulation microscopiques et macroscopiques tirés des données de mesures NGSIM. Ces données seront tout d'abord présentées puis nous proposons un modèle de poursuite microscopique à partir duquel nous essayons de déduire un modèle d'écoulement macroscopique du premier ordre.

Dans une seconde partie, nous proposons l'étude asymptotique des temps de retard tel que cela a été présenté dans la partie précédente. Le but de cette simulation numérique est de pouvoir déterminer les « zones » où l'introduction d'un temps de réaction dans les modèles de poursuite ne va pas générer de situations de collision. Sans pour autant être une démonstration rigoureuse, nous chercherons à mettre en évidence des contre-exemples dans les cas où les conditions limites que nous aurons mis en avant, ne seraient pas respectées.

3.1 Comparaison entre microscopique et macroscopique

3.1.1 Présentation des données

Dans le cadre de l'étude de cas, nous avons utilisé les données de mesures extraites de l'expérimentation américaine NGSIM (*Next Generation Simulation*). Ces données de mesures proviennent d'une campagne de relevés effectués en 2005 sur l'autoroute Interstate 80 (I80) située à Berkeley, en Californie.



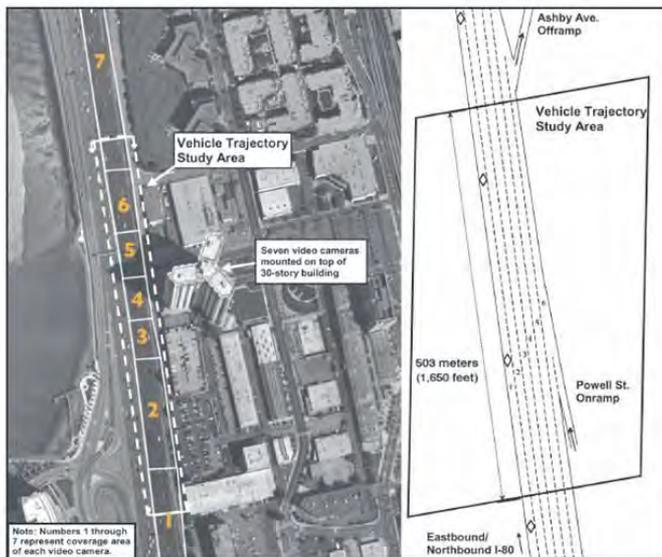
Caméra de capture pour l'autoroute I80

Figure 3.1 : Système d'acquisition de mesure NGSIM

Ce programme a été commandé par la Federal Highway Administration américaine (FHWA), auprès de l'Université de Berkeley. Le but était de mettre à disposition de l'ensemble de la communauté scientifique, une base de données importante de mesures microscopiques de trafic.

Ainsi, sur l'I80, trois collectes de 15 minutes ont été réalisées. Celles-ci se sont faites par captures vidéo et subissent ensuite un traitement d'images afin de les rendre numériquement exploitables.

Les données de mesures sont issues de plusieurs caméras vidéo placées au sommet d'un immeuble, en bordure de la section étudiée. Le principal intérêt de ce point de vue en hauteur réside dans la possibilité de disposer à moindre mesure d'une couverture relativement étendue. De plus, cela permet de s'affranchir de certaines contraintes dans le cas du traitement d'images, du fait que les véhicules sont plus facilement identifiables.



Présentation du site de mesure et de la section étudiée

Figure 3.2 : Photo aérienne du site de mesure NGSIM

Les données de trafic auxquelles nous nous sommes intéressés sont issues de mesures effectuées entre 17h00 et 17h15, le jour des relevés. Ces données sont données sous forme matricielle et sont proposées comme suit :

Colonne	Intitulé	Unité
1	Identité véhicule	-
2	Identité de la photo	-
3	Nombre de photos	-
4	Temps global	Millisecondes
5	Position latérale locale	Pieds
6	Position longitudinale locale	Pieds
7	Position latérale globale	Pieds
8	Position longitudinale globale	Pieds
9	Longueur du véhicule	Pieds
10	Largeur du véhicule	Pieds
11	Classe de véhicule	-
12	Vitesse	Pieds/secondes
13	Accélération	Pieds/secondes ²
14	Numéro de voie	-
15	Numéro du véhicule <i>leader</i>	-
16	Numéro du véhicule <i>suiveur</i>	-
17	Interdistance spatiale	Pieds
18	Interdistance temporelle	Secondes

Tableau 5 : Description des données contenues dans la base de données NGSIM

3.1.2 Prétraitement des données

Afin de pouvoir utiliser de façon convenable les données issues de la base NGSIM, il est nécessaire de réaliser certains prétraitements de ces données. Comme il est possible de le voir sur le tableau de description des données ci-dessus, plusieurs variables sont exprimées dans des unités américaines et non conventionnelles. Il faut donc opérer une normalisation des valeurs dans les unités du système international, à savoir passer les longueurs en mètres et non en pieds et également les vitesses et les accélérations en kilomètres/heure et en kilomètres/heure². Nous rappelons qu'un pied vaut 30,48 centimètres, soit 0,3048 mètres.

Une fois cette étape de changement d'unités réalisée, il semble nécessaire de normaliser certaines données comme le temps qui est établi ici en millisecondes et qui prend pour origine le 1^{er} janvier 1970. Nous ramènerons donc les données à une origine des temps prise pour le temps d'entrée du premier véhicule dans la section d'étude. Nous traduirons également ce temps en secondes. Nous faisons de même avec les positions des véhicules qui sont exprimées « localement » (l'origine est alors prise pour l'entrée de la section, dans le sens de l'écoulement) et « globalement ». Nous ne nous intéressons qu'aux positions longitudinales et non pas aux positions latérales, étant donné que notre propos est uniquement le comportement en poursuite des véhicules, aux niveaux microscopique et macroscopique.

Notre travail porte sur l'étude d'une seule voie particulière. La sélection de cette voie doit répondre à différents critères. Notamment et comme exposé ci-dessus, nous ne nous intéressons pas aux changements de voie. Nous souhaitons donc sélectionner une voie de circulation où le nombre de changements de voie est suffisamment restreint pour pouvoir le négliger. De plus, nous faisons l'hypothèse que notre trafic est uniquement composé de véhicules légers. La voie choisie devra donc permettre cette approximation. Nous analysons donc voie par voie, ces variables-là pour la période de mesure de 17h00-17h15.

	Pourcentage de deux roues motorisées	Pourcentage de voitures (VL)	Pourcentage de camions (PL)	Pourcentage de changements de voie
Voie 1	5,0	91,4	3,6	7,7
Voie 2	0,1	99,4	0,4	27,2
Voie 3	0,1	86,7	13,2	45,5
Voie 4	0,1	97,3	2,7	53,6
Voie 5	0,1	97,3	2,6	60,5
Voie 6	0,1	97,8	2,1	65,4
Voie 7	0,3	98,9	0,8	22,5

Tableau 6 : Quelques statistiques pour le choix de la voie d'étude

Ces statistiques descriptives font apparaître que les caractéristiques de composition du trafic sont relativement identiques entre voie. Nous distinguons ainsi une très forte proportion de véhicules légers, corroborant notre hypothèse. En outre, seules trois voies ont un pourcentage de changements de voie relativement faible (inférieur à 30 %). Il s'agit des voies n°1, 2 et 7. La voie 7 est pourtant à exclure car il s'agit de la voie d'insertion. Elle est de longueur trop réduite (environ une centaine de mètres) et ne permettra pas une bonne représentation macroscopique par la suite.

Nous ajoutons une ultime condition qui est celle de pouvoir observer des instabilités dans le trafic avec par exemple la naissance d'ondes de sur-congestion. Quelques unes des trajectoires sont disponibles en annexe D. Cette condition sur les instabilités permet de mettre à l'écart la voie 1, c'est-à-dire la voie la plus à gauche puisque pour celle-ci, la représentation des trajectoires ne fait apparaître que peu d'instabilités. Notons que cette observation va dans le sens d'un lien entre instabilités et changements de voie, qui ne sera pas étudié dans ce travail.

La voie réunissant nos critères est donc la voie 2. C'est celle-ci que nous étudierons par la suite. Durant la période de relevés, les trajectoires individuelles de 371 véhicules ont été enregistrées sur cette voie. Par la suite, nous allons tenter de réaliser une modélisation microscopique puis une modélisation macroscopique de cet écoulement afin de mettre en évidence le besoin de cohérence entre les deux échelles.

3.1.3 Modèle microscopique

A partir des données de mesure, nous nous intéressons au caractère microscopique du trafic. Comme exposé en première partie du travail, il existe de nombreux modèles de trafic microscopiques. Nous faisons le choix de ne nous intéresser qu'aux modèles de poursuite. De plus, nous posons l'hypothèse que le comportement en poursuite d'un véhicule ne dépend que des caractéristiques du véhicule le précédant immédiatement.

Nous nous contenterons de considérer un modèle microscopique linéaire, exprimant simplement la vitesse comme une fonction de l'inverse de l'interdistance. La vitesse est donnée par :

$$v_i(t) = \max \left(0, V_{\max} \cdot \left(1 - \frac{S_{\min}}{S_i(t)} \right) \right)$$

Cela correspond au diagramme fondamental microscopique suivant (figure de droite) :

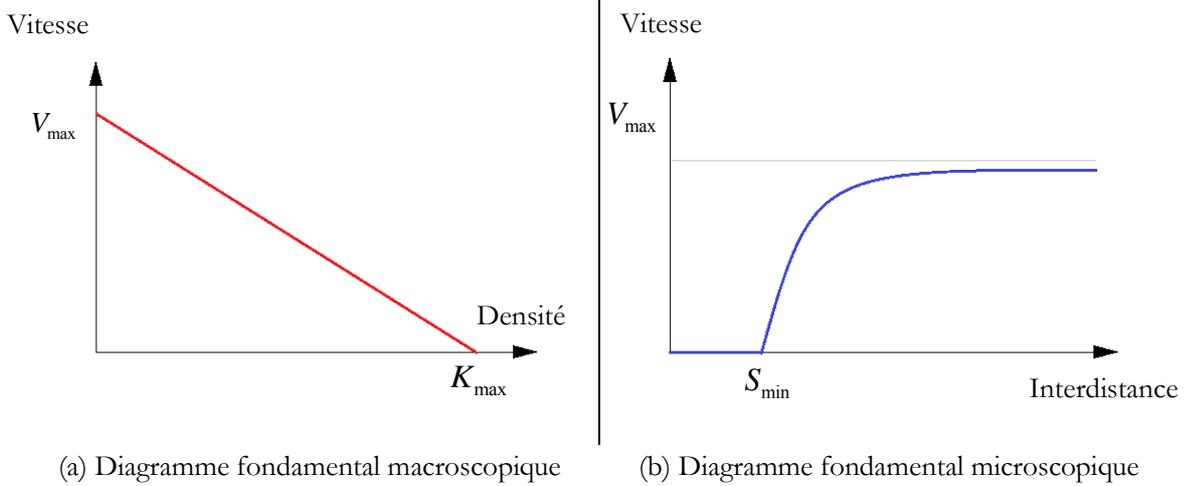


Figure 3.3 : Diagrammes fondamentaux pour la simulation

La loi de poursuite fait intervenir deux paramètres à déterminer que sont la vitesse maximale et l'interdistance minimale. Ces deux paramètres seront à calibrer sur un premier peloton de véhicules puis ils seront validés avec un second peloton, totalement différent du premier.

Nous choisissons d'isoler arbitrairement deux pelotons composés de 10 véhicules consécutifs. La seule condition est de ne considérer des pelotons de véhicules pour lesquels il n'y a aucun changement de voie. Nous calibrons ensuite les valeurs de V_{\max} et S_{\min} à l'aide de l'indice d'écart quadratique moyen ou RMSE (*Root Mean Square Error*). Nous obtenons ainsi que :

$$V_{\max} = 30 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } S_{\min} = 6,8 \text{ m}$$

Soit les trajectoires suivantes :

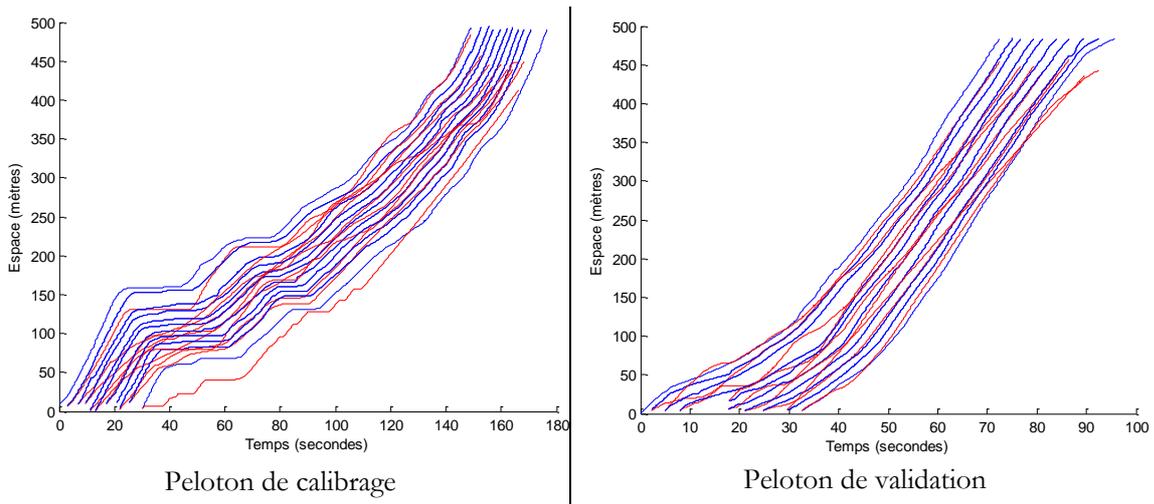


Figure 3.4 : Simulation des trajectoires individuelles, d'après données NGSIM

Nous remarquons que cette loi de vitesse donne des résultats relativement médiocres. Nous pouvons nous interroger d'une part sur la qualité de la loi même mais également sur le choix de l'indicateur. Des études dont [Ciuffo et Punzo, 2010] ont montré la variabilité des paramètres optimaux vis-à-vis du choix du critère à utiliser.

Nous soulignons d'ors et déjà qu'il serait souhaitable de pouvoir estimer le temps de réaction critique des conducteurs. Le temps de réaction est extrêmement variable entre chaque conducteur et peut également dépendre de l'état même de ce dernier. Cependant, nous faisons l'hypothèse que ce temps de réaction est identique entre chaque conducteur. Nous étudierons ultérieurement l'introduction d'un tel temps de réaction.

3.1.4 Modèle macroscopique

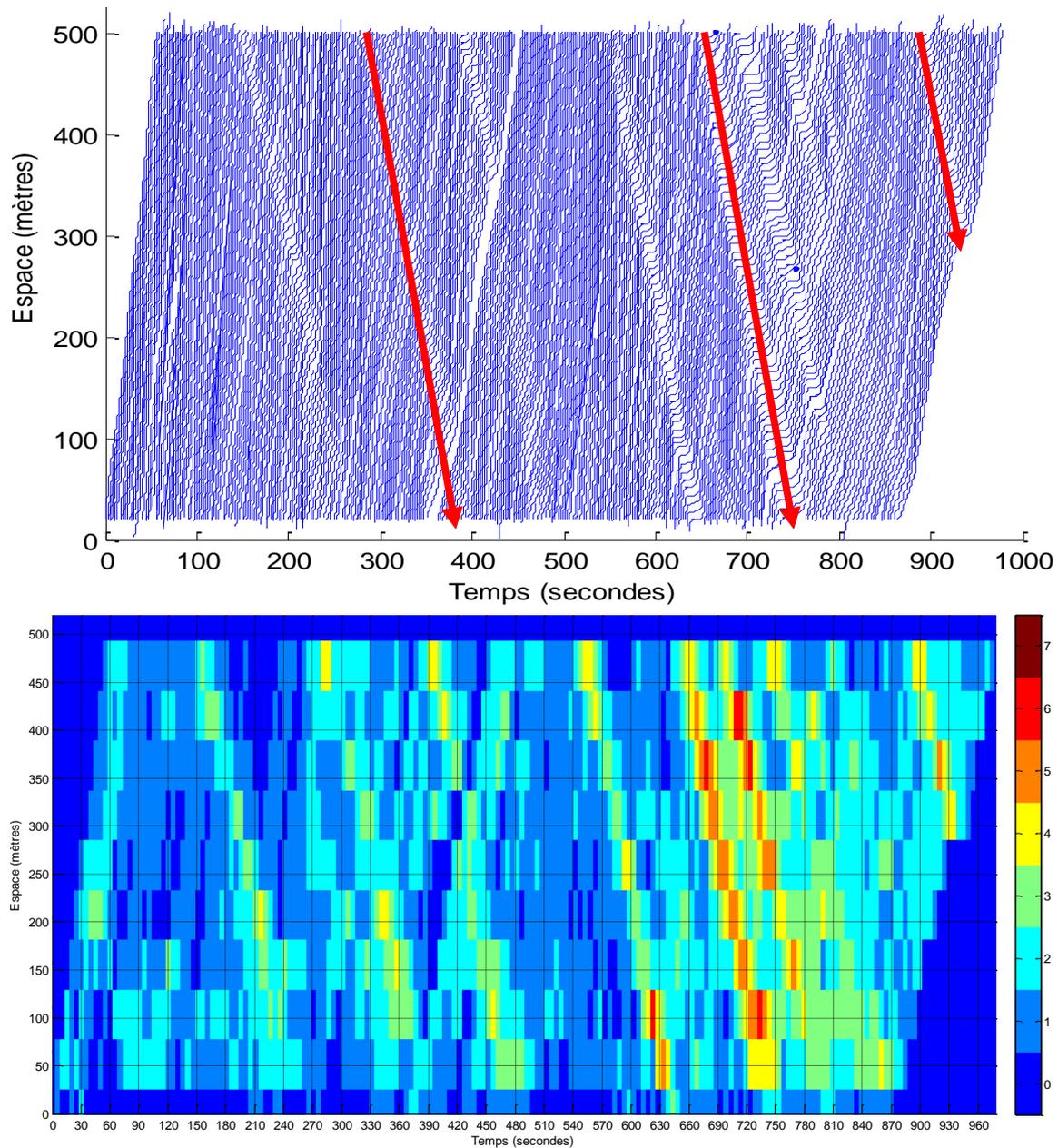
Les modèles macroscopiques peuvent être obtenus de deux différentes manières. Ainsi, il est possible soit d'utiliser directement les propriétés macroscopiques du trafic observées, soit de partir des comportements microscopiques des véhicules et de les agréger pour en déduire le comportement du flux à une plus grande échelle. Dans le premier cas, l'observation du trafic mobilise des données comme le débit, la concentration ou encore la vitesse de flux. Ces données sont alors intégrées dans un modèle physique de type hydrodynamique, en prenant pour hypothèse que l'écoulement du trafic routier est similaire à celui d'un fluide. Le second cas se propose de bâtir les caractéristiques globales du flot de véhicules à partir des observations des variables individuelles de chacun de ces composants. Cette dernière possibilité sera celle développée pour la modélisation macroscopique des données NGSIM.

Nous cherchons donc à agréger les données individuelles issues des mesures NGSIM. Pour cela, nous considérons une discrétisation spatiale et temporelle de la section d'étude. Cette discrétisation en cellules fait intervenir un pas de temps et un pas d'espace fixes. Nous souhaitons prendre ces pas de telle sorte que l'information (c'est-à-dire l'avancée d'un véhicule) ne puisse pas parcourir plus d'une cellule par pas de temps. En notant V_{\max} la vitesse maximale de circulation, nous obtenons la condition suivante :

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} > V_{\max}$$

Etant donné que notre section d'étude a une longueur totale d'environ 500 mètres, nous nous devons de prendre un pas de discrétisation spatiale suffisamment petit afin de considérer plusieurs sections. Ce pas de temps ne doit cependant pas être trop petit afin de conserver la cohérence du niveau macroscopique. Nous choisissons ainsi de prendre $\Delta x = 50 \text{ m}$. Nous pouvons en déduire une valeur acceptable du pas de discrétisation temporelle puisque graphiquement, nous pouvons évaluer la vitesse libre de circulation $V_{\max} \approx 30 \text{ m.s}^{-1}$. Ainsi, nous prendrons $\Delta t = 1 \text{ s}$.

Nous proposons ci-dessous les trajectoires individuelles et macroscopiques des véhicules de la voie n°2 :



Représentations individuelle (haut) et macroscopique (bas) de l'écoulement du trafic

Le graphique du bas représente la densité de véhicules par cellule (en véhicules par 50 mètres)

Figure 3.5 : Représentations de l'écoulement sur la voie 2, période 17h00 -17h15, d'après NGSIM

A partir des estimations de concentrations par cellule, nous pouvons également déterminer les débits qui y sont liés. Ces deux données nous permettent ensuite de pouvoir reconstituer le diagramme fondamental de la voie. Cela est présenté sur la graphique qui suit.

Nous choisissons la forme parabolique, initialement proposée par Greenshields (1935). Cette forme est cohérente dans le cadre de notre étude, car nous avons choisi

$v_i(t) = \max\left(0, V_{\max} \cdot \left(1 - \frac{K_i(t)}{K_{\max}}\right)\right)$. Or, nous avons que $Q_e(x,t) = V_e(x,t) \cdot K(x,t)$ ce qui nous

donne que $Q_e(x,t) = V_{\max} \cdot \left(K(x,t) - \frac{K^2(x,t)}{K_{\max}}\right)$. Nous proposons donc le diagramme

fondamental suivant, avec $V_{\max} = 30 \text{ m.s}^{-1}$ et $K_{\max} = 0,2 \text{ véh.m}^{-1}$:

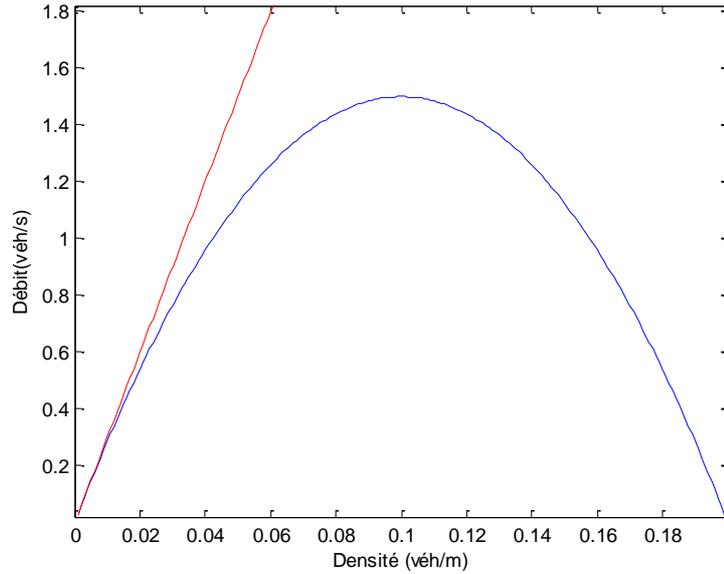


Figure 3.6 : Diagramme fondamental proposé pour la simulation macroscopique, d'après NGSIM

Dans notre simulation, nous avons choisi un découpage de la section d'étude en sous-sections de longueur égale Δx . Pour chacune de ces « cellules », nous déterminons une densité de véhicules. Celle-ci est notée par $K_i^n = Q(i.\Delta x, n.\Delta t)$, concentration dans la cellule i de longueur Δx , au temps $n.\Delta t$ où Δt représente le pas de temps constant.

Nous y associons le schéma numérique classique donné par :

$$\frac{K_i^{n+1} - K_i^n}{\Delta t} + \frac{F(K_i^n, K_{i+1}^n) - F(K_{i-1}^n, K_i^n)}{\Delta x} = 0$$

$$K_i^{n+1} = K_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \cdot (F(K_i^n, K_{i+1}^n) - F(K_{i-1}^n, K_i^n))$$

$$\text{Avec } F(K_i^n, K_{i+1}^n) = \min\left(\underbrace{f^D(K_i^n)}_{\text{demande en entrée}}, \underbrace{f^O(K_{i+1}^n)}_{\text{offre en sortie}}\right).$$

Les fonctions de demande et d'offre sont déterminées à partir du diagramme fondamental et elles sont données par les formules suivantes :

$$\left| \begin{array}{l} f^D(K_i^n) = \begin{cases} Q_e(K_i^n), & \text{si } K_i^n \leq K_{\text{critique}} \\ Q_{\text{max}}, & \text{si } K_i^n > K_{\text{critique}} \end{cases} \\ f^O(K_{i+1}^n) = \begin{cases} Q_{\text{max}}, & \text{si } K_{i+1}^n \leq K_{\text{critique}} \\ Q_e(K_i^n), & \text{si } K_{i+1}^n > K_{\text{critique}} \end{cases} \end{array} \right.$$

Le schéma numérique permet d'exprimer la conservation des véhicules au sein des sous-sections. Dans notre travail, nous nous sommes heurtés au problème des conditions de bord. En effet, nous remarquons que la résolution du schéma numérique fait intervenir les informations données par la cellule voisine de celle étudiée. Il est donc nécessaire de considérer les conditions aux sous-sections extrêmes (amont et aval) comme des données du problème. Nous prendrons donc les flux comme données pour le calcul. L'intérêt de cette démarche est de pouvoir étudier l'évolution de $Q(x, t)$.

Il nous serait possible d'utiliser l'estimation d'erreur commise en utilisant un tel type de schéma numérique. Cependant, cette simulation avait pour principal but de mettre en avant les difficultés à réaliser un passage du microscopique au macroscopique de façon uniquement numérique, à partir de données de mesure.

3.2 Etude du modèle premier ordre avec temps de retard

L'étude du passage mathématique entre modèle microscopique et modèle macroscopique nous a amené à nous intéresser aux modèles de premier ordre permettant d'intégrer un temps de réaction du conducteur. Cependant, comme nous l'avons abordé précédemment, ce temps de retard doit respecter certaines conditions afin de s'assurer qu'au sens physique du trafic, nous n'obtenons pas de cas de collision.

Nos études supplémentaires nous ont conduits à supposer que les conditions énoncées dans la partie 2.3 n'étaient pas optimales. Aussi, nous nous proposons d'énoncer rapidement ici de nouvelles conditions. Nous nous proposons ensuite de montrer par simulation l'existence de contre-exemples pour les cas où ces conditions ne seraient pas respectées. Les résultats sont repris au sein d'un tableau final.

3.2.1 Amélioration mathématique formelle

L'équation du modèle est la suivante :

$$\dot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t-\tau) - x_i(t-\tau)), \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \quad t > 0 \quad (1.23)$$

Avec $\tau > 0$ qui représente le temps de réaction, supposé égal entre chaque conducteur. La fonction F représentant la fonction de vitesse, satisfait aux hypothèses (A1) et (A2).

Proposition (Principe de comparaison)

Supposons que nous disposons de $(x_i)_i$ et $(y_i)_i$ satisfaisant l'équation (1.23). Nous définissons

$$d_i(t) = x_i(t) - y_i(t)$$

Nous supposons de plus la distance entre ces particules est strictement positive « dans le passé »

$$0 < d_i(s), \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad s \in [-\tau, 0) \quad (1.24)$$

Et enfin nous supposons qu'il existe un réel λ tel que

$$\dot{d}_i(s) \geq -\lambda d_i(s), \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad s \in [-\tau, 0) \quad (1.25)$$

Etant donné ces hypothèses, nous obtenons alors que :

$$d_i(t) > 0, \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad t \geq 0$$

Et également, nous avons que :

$$\dot{d}_i(s) \geq -\lambda d_i(s) \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad s \geq 0$$

Preuve formelle de la Proposition**Partie 1 : Estimation a priori****Etape 1: Encadrement de l'ODE**

Nous avons pour $0 < t \leq t_0$

$$\dot{d}_i(t) = F(x_{i+1}(t-\tau) - x_i(t-\tau)) - F(y_{i+1}(t-\tau) - y_i(t-\tau))$$

Le théorème des valeurs intermédiaires nous permet de supposer l'existence de $\xi_i(t) \in \mathbb{R}$ tel que nous ayons :

$$\dot{d}_i(t) = \dot{F}(\xi_i(t)) \cdot \{(d_{i+1} - d_i)(t-\tau)\}$$

Et en utilisant (1.24), nous obtenons que :

$$\dot{d}_i(t) \geq -\dot{F}(\xi_i(t)) \cdot d_i(t-\tau)$$

Nous en déduisons que :

$$\dot{d}_i(t) \geq -d_i(t), \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}, \quad t \in [0, t_0] \quad (1.26)$$

Etape 2: Estimation de λ

Choisissons $\tau' \in [-\tau, 0)$ quelconque et $t \in (\tau', t_0)$, nous avons alors d'après (1.25) et (1.26)

$$\dot{d}_i(t) \geq -\lambda d_i(t), \quad \text{pour tout } i \in \mathbb{Z}$$

Nous avons donc en particulier que

$$\frac{\dot{d}_i(t)}{d_i(t)} \geq -\lambda$$

Et en intégrant entre t et $t - \tau$, nous obtenons

$$\ln \left(\frac{d_i(t)}{d_i(t-\tau)} \right) \geq -\lambda \cdot \tau$$

D'où nous tirons que

$$\dot{d}_i(t) \geq -e^{\lambda\tau} \cdot d_i(t)$$

Et nous pouvons en tirer une condition sur la valeur de λ afin de s'assurer de la possibilité de propagation de la propriété précédente. Ainsi, nous devons avoir :

$$e^{\lambda\tau} \leq \lambda \quad (1.27)$$

Partie 2: propagation par continuité

Nous pouvons simplement noter $t_* \geq \tau$ le premier temps à partir duquel la condition (1.26) devient fausse pour tout $t_0 > t_*$. Si (1.27) est satisfaite, alors l'étape 2 montre que (1.26) doit être vérifiée pour tout $t_0 \in [t_*, t_* + \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$, en utilisant le fait que les solutions sont Lipschitz en temps. Ainsi, nous obtenons le résultat. Cela clôt la preuve formelle de la proposition. ■

Remarque La condition $e^{\lambda\tau} \leq \lambda$ permet d'obtenir une valeur théorique du temps de réaction critique. Nous rappelons que le temps de réaction est considéré comme étant normalisé, du fait de la normalisation de la fonction de vitesse F de sorte à avoir les conditions $0 \leq F \leq 1$ et également $0 \leq F' \leq 1$.

Lemme (Valeur du temps critique)

Considérons l'équation (1.23) et supposons que la fonction F vérifie les conditions (A0) - (A1) ainsi que $0 \leq F \leq 1$ et $0 \leq F' \leq 1$, ce qui peut être obtenu par normalisation. Nous supposons aussi vraies les conditions (1.24) et (1.25).

Alors, le temps de retard critique en-dessous duquel il est assuré qu'il n'y aura pas de cas de collision vaut $\tau_{critique} = \frac{1}{e}$ où e est la valeur de la fonction exponentielle en 1.

Preuve formelle

La conservation de l'ordre est garantie par la proposition précédente dans le cas où nous avons $e^{\lambda\tau} \leq \lambda$. Ainsi, nous introduisons la fonction suivante :

$$\Phi(\lambda) = e^{\lambda\tau} - \lambda$$

Nous étudions cette fonction dont la dérivée vaut $\Phi'(\lambda) = \tau e^{\lambda\tau} - 1$ et qui s'annule en $\lambda_{critique} = \frac{\ln(\frac{1}{\tau})}{\tau}$. Ainsi, nous voulons avoir $\Phi(\lambda_{critique}) = \frac{1}{\tau} \left(1 - \ln\left(\frac{1}{\tau}\right)\right) < 0$.

D'où nous tirons que $\tau \leq \frac{1}{e} = \tau_{critique}$. ■

Les simulations numériques que nous avons conduites avaient alors pour but de chercher à mettre en avant des contre-exemples lorsque $\tau > \tau_{critique}$ et /ou que $\dot{d}_i(s) \geq -\lambda \cdot d_i(s)$ pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $s \in [-\tau, 0)$ avec $\lambda = \frac{\ln(\frac{1}{\tau})}{\tau}$.

3.2.2 Description du mode opératoire

Dans cette seconde partie de simulation numérique, nous nous sommes appuyés sur des cas fictifs. Nous avons en outre repris le modèle exposé en partie 2.3.1. qui est un modèle relativement simple. Nous complétons notre simulation avec des conditions initiales également simples. En effet pour rappel, nous considérons un véhicule circulant à la vitesse maximale v_{max} pendant une

période temps initiale d'amplitude au moins égale à τ le temps de réaction étudié. Nous supposons par ailleurs que pour cette période de temps, l'interdistance séparant le véhicule et son véhicule leader est suffisamment importante pour considérer que ce dernier n'influence pas le comportement de conduite du véhicule. Le véhicule leader est suppose appartenir à un peloton de véhicules circulant à la vitesse v_0 qui est prise strictement inférieure à la vitesse maximale (auquel cas les véhicules n'interagiraient pas) mais qui peut prendre la valeur nulle : $0 \leq v_0 < v_{max}$.

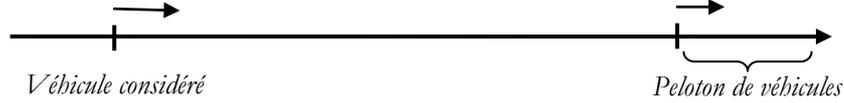


Figure 3.7 : Situation initiale de la simulation

La loi de poursuite F est alors donnée par l'équation suivante:

$$\dot{x}_i(t) = F(S_i(t)) = \begin{cases} 0 & \text{si } S_i(t) < d_{min} \\ \frac{S_i(t) - d_{min}}{d_{max} - d_{min}} v_{max} & \text{si } d_{min} \leq S_i(t) \leq d_{max} \\ v_{max} & \text{si } S_i(t) > d_{max} \end{cases}$$

En introduisant la variable $S_i(t) = x_{i+1}(t - \tau) - x_i(t - \tau)$, à savoir l'interdistance.

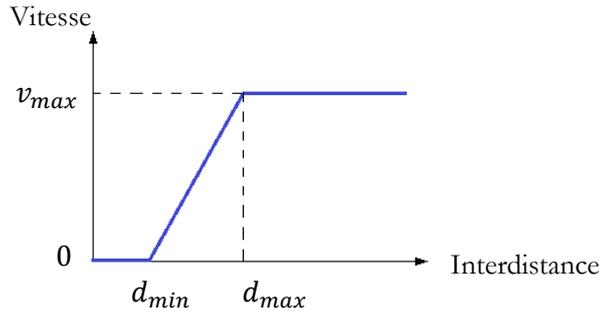


Figure 3.8 : Présentation de la loi de vitesse microscopique

Il est possible de déterminer des valeurs pour d_{min} et d_{max} en considérant formellement les caractéristiques macroscopiques de l'écoulement. En effet, nous admettons que la densité K peut être définie par l'inverse de l'interdistance. Aussi, la densité critique est donnée par l'inverse de l'interdistance d_{max} et la densité maximale est obtenue avec l'inverse de l'interdistance d_{min} . Etant donné que ne nous intéressons qu'à une seule voie, les nombreuses mesures de trafic permettent d'avoir des ordres de grandeur concernant les densités critique et maximale. Nous avons donc opté pour choisir nos paramètres de telle sorte que :

$$\begin{cases} d_{min} = 5 \text{ m} \\ d_{max} = 25 \text{ m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K_{critique} = 40 \text{ véh. km}^{-1} \\ K_{max} = 200 \text{ véh. km}^{-1} \end{cases}$$

Ces paramètres sont indépendants de la vitesse maximale choisie.

Par ailleurs, nous pouvons remarquer que la loi de vitesse choisie précédemment permet d'obtenir un diagramme fondamental (donc macroscopique) triangulaire.

Notre démarche a ensuite été de travailler avec différentes valeurs de vitesse maximale et pour chacun d'elles, différentes valeurs pour la vitesse du peloton de véhicules « leader ». Pour ce panel de paramètres, nous avons cherché à déterminer le temps de retard critique pour lequel la situation de collision est évitée. Il s'agit d'une programmation numérique effectuée avec le logiciel MATLAB et donc les principaux scripts sont disponibles en annexes de ce document.

La principale difficulté réside dans la détermination d'un horizon de temps suffisant afin de tester si les trajectoires ne se croisent pas. En effet, si le test est restreint à un intervalle n'incluant pas l'instant où il y a collision, le programme considère qu'il n'y a pas de collision. L'idée est alors de pouvoir chercher jusqu'à un certain temps pertinent. Les calculs permettent d'obtenir que le temps maximal à considérer est de l'ordre de grandeur de $1/\sqrt{\ln(\tau \cdot e)}$.

3.2.3 Récapitulatif des résultats

Comme indiqué précédemment, il est possible de distinguer à minima quatre cas de « fonctionnements » pour le modèle de premier ordre avec temps de retard. Ces zones se déterminent selon la valeur du temps de réaction normalisé et de la valeur de la constante utilisée dans l'inégalité (1.25). Pour rappel, nous avons $\lambda = \frac{\ln(\frac{1}{\tau})}{\tau}$.

Cela traduit une condition nécessaire à considérer sur les conditions initiales.

Nous illustrons nos résultats avec le cas suivant, pour lequel nous avons considéré

$$v_{max} = 30 \text{ m.s}^{-1} \text{ et } v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$$

Nous avons précédé comme décrit ci-dessus avec un balayage systématique des valeurs de temps de retard et nous avons déterminé les temps critiques pour chacune des conditions initiales.

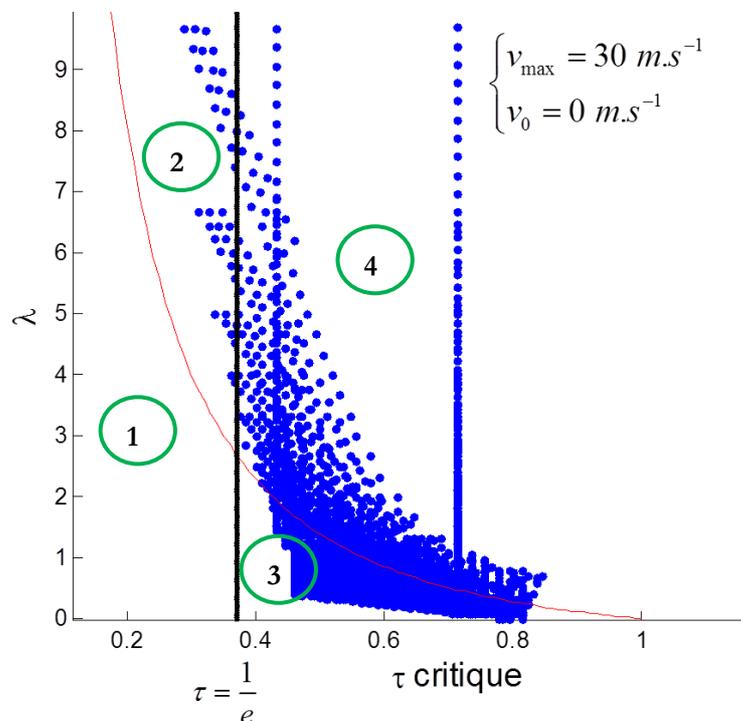


Figure 3.9 : Découpage du plan en zones de « fonctionnement » du modèle premier ordre avec temps de retard

Plaçons-nous dans la zone (1) où nous respectons à la fois les conditions initiales respectent (1.25) et où le temps de réaction est plus petit que le temps de réaction critique. Dans ce cas-là, la preuve formelle nous permet de dire qu'il n'y a pas de situation où l'ordre des véhicules ne serait pas respecté. Les simulations n'ont pas permis de mettre à jour un contre-exemple.

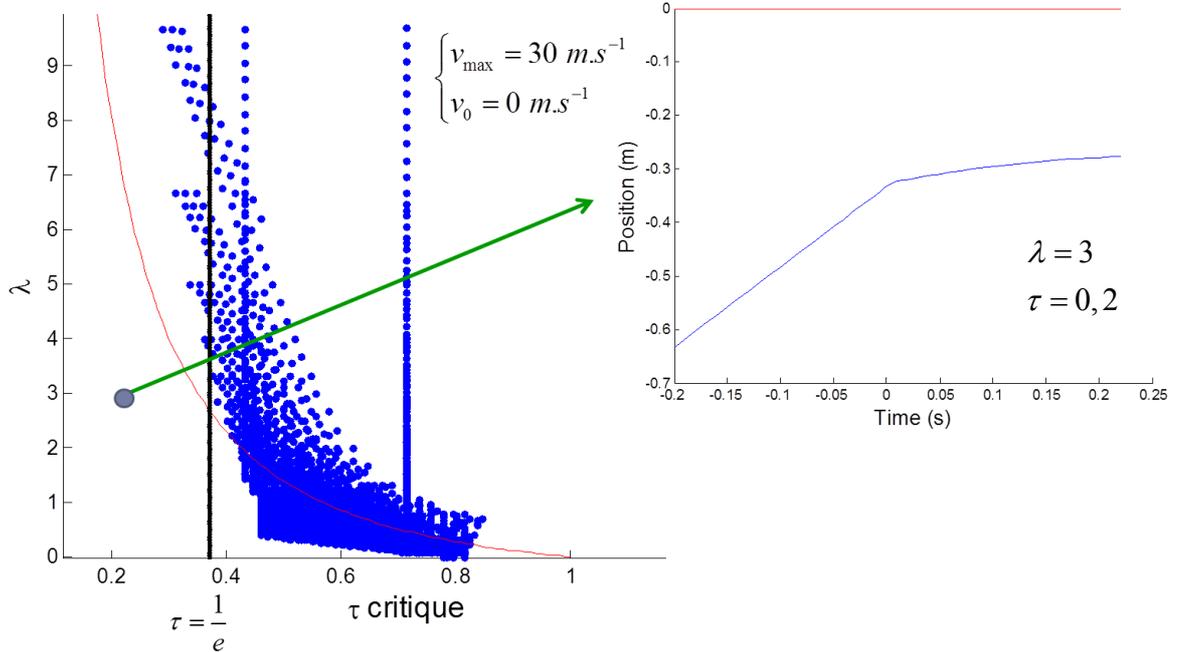


Figure 3.10 : Illustration du modèle premier ordre avec temps de retard pour la zone de « fonctionnement » (1)

Considérons maintenant la zone (2) où nous ne respectons pas les conditions initiales données par (1.25) mais où le temps de réaction est plus petit que le temps de réaction critique. Les simulations nous permettent de trouver un contre-exemple avec un cas où il y a collision.

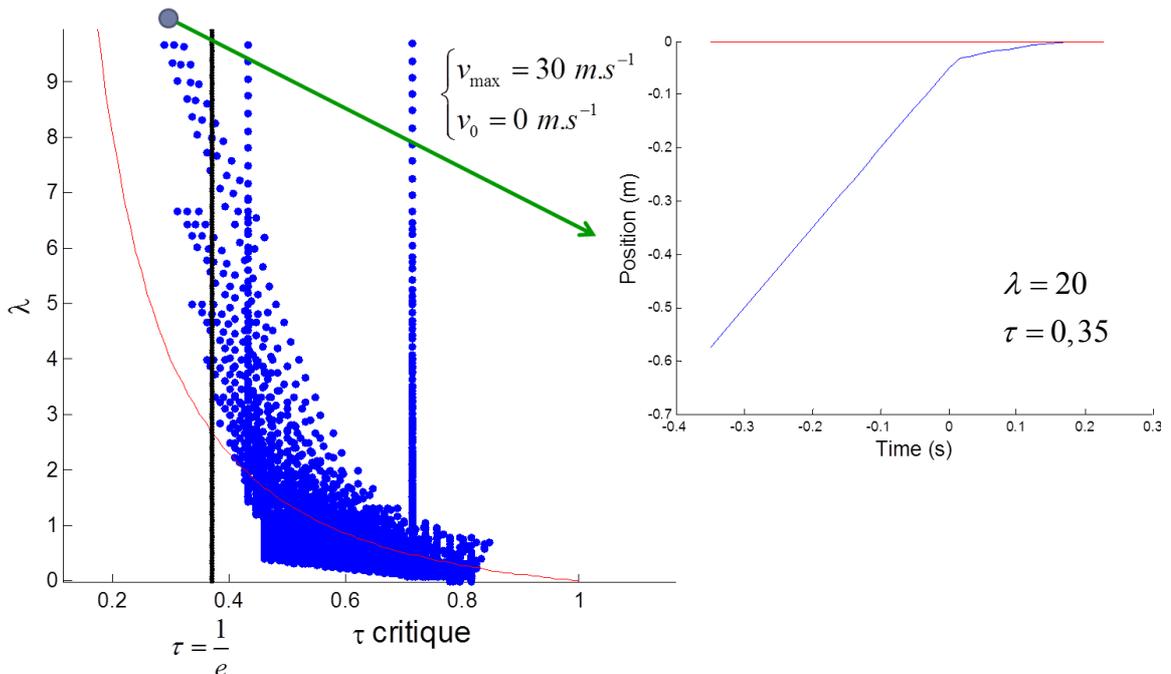


Figure 3.11 : Illustration du modèle premier ordre avec temps de retard pour la zone de « fonctionnement » (2)

Etudions le cas de la zone (3) où nous respectons à la fois les conditions initiales respectent (1.25) et où le temps de réaction est plus grand que le temps de réaction critique. Dans ce cas-là, la preuve formelle nous permet de dire qu'il n'y a pas de situation où l'ordre des véhicules ne serait pas respecté. Les simulations n'ont pas permis de mettre à jour un contre-exemple avec par exemple le temps de réaction normalisé pris égal à $\tau = 0,9$ et la vitesse $v_{max} = 30 \text{ m.s}^{-1}$, ou encore $v_0 = 0 \text{ m.s}^{-1}$.

Terminons cette étude avec la zone (4) pour laquelle nous ne respectons ni les conditions initiales ni la condition sur le temps de réaction. Celui-ci est plus grand que le temps de réaction critique. Dans ce cas-là, les simulations nous ont permis de trouver des contre-exemples.

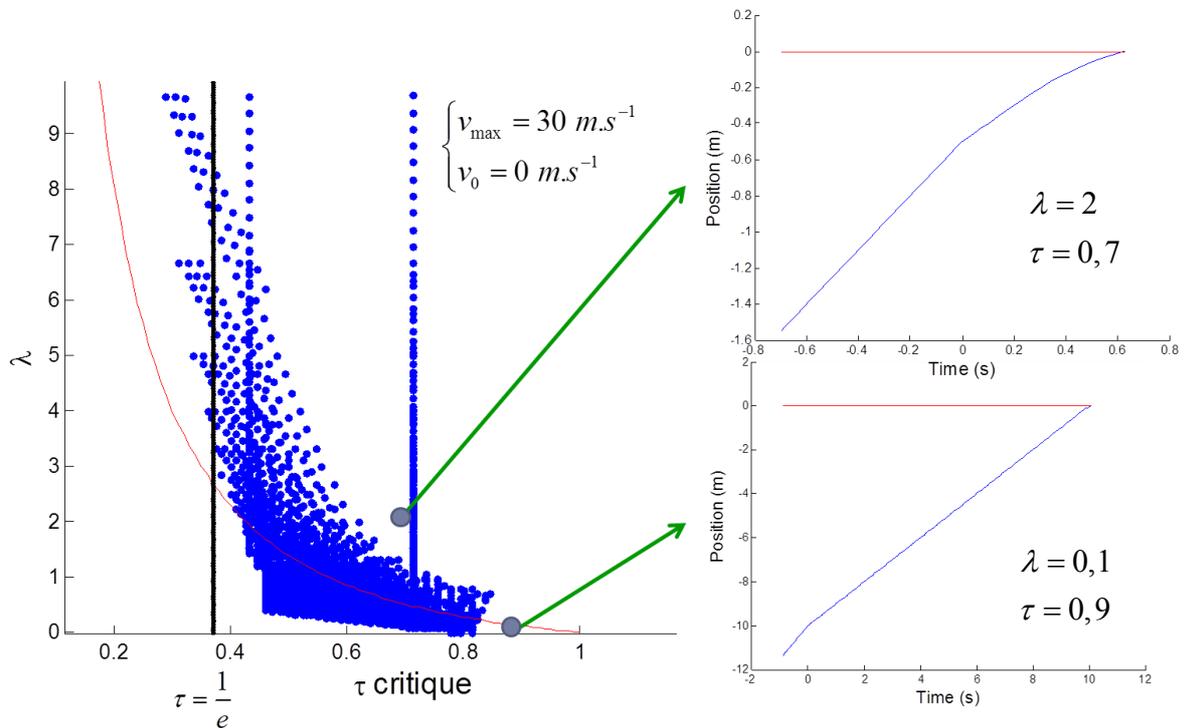


Figure 3.12 : Illustration du modèle premier ordre avec temps de retard pour la zone de « fonctionnement » (3) et (4)

Les résultats sont reproduits dans le tableau récapitulatif suivant :

	$\tau < \tau_{critique}$	$\tau > \tau_{critique}$
Conditions initiales respectées	A priori, pas d'accidents	Possibilité de trouver des cas d'accidents
Conditions initiales non respectées	Possibilité de trouver des cas d'accidents	Possibilité de trouver des cas d'accidents

Tableau 7 : Comportement du modèle avec temps de retard selon différents cas

Cette simulation basée sur la détermination des temps de réaction critiques en fonction des paramètres des modèles se base sur un type de modèle de loi de vitesse. Il est possible de travailler avec d'autres formes tout en vérifiant le respect des hypothèses sur la fonction de vitesse (maximum borné et dérivée bornée). D'autre part, nous n'avons considéré qu'un seul jeu de paramètres pour les interdistances caractéristiques (notées d_{min} et d_{max}). Ces valeurs peuvent être discutées et il serait opportun de pouvoir les faire évoluer puisque ces valeurs interviennent dans le calcul du temps de réaction normalisé.

Notons enfin qu'il aurait été intéressant de pouvoir réellement simuler le passage microscopique-macroscopique à l'aide de la technique d'homogénéisation. Cette finalité sera recherchée dans la poursuite du travail.

3.3 Analyse du Travail

Ce travail avait pour premier but de mettre en avant les problèmes d'échelles inhérents à la modélisation du trafic routier. Cette démarche a eu pour intérêt d'engager une réflexion sur la cohérence entre les modèles d'écoulement microscopiques et macroscopiques puis de nous guider dans notre résolution mathématique de ce passage microscopique-macroscopique. En effet, dans un avenir plus ou moins proche, les véhicules auront la possibilité d'échanger des informations sur les états de trafic, les uns avec les autres donc au niveau microscopique. Ces nouveaux systèmes peuvent avoir un impact non négligeable sur l'écoulement global du flot. Avec l'introduction de systèmes coopératifs capables de mettre en connexion plusieurs véhicules au niveau microscopique, les caractéristiques macroscopiques du flux d'usagers peuvent être modifiées. On parle alors de dynamique émergente du trafic.

La notion d'émergence est née de la théorie systémique et de la modélisation multi-agents des systèmes complexes. Elle peut être définie comme étant un phénomène dynamique nouveau, caractérisé par un effet observable au niveau macroscopique mais dû à des interactions à un niveau inférieur, souvent appelé niveau « microscopique ». De plus, la théorie des systèmes complexes a permis de souligner que l'analyse de la somme des « parties » ne suffisait pas pour comprendre le comportement du « tout » global.

Malgré les objectifs initiaux de ce travail, il nous est possible de soulever certaines limites à celui-ci, limites auxquelles nous tenterons de répondre en proposant des pistes d'amélioration pour les travaux qui suivront.

3.3.1 Limites

Rappelons tout d'abord que la modélisation est une démarche scientifique ayant pour but de mettre une réalité physique sous forme manipulable d'outils de description et de représentation. Les modèles proposés et étudiés sont donc fondamentalement faux puisqu'ils ne permettent pas de rendre compte précisément de la réalité. Cependant, ils nous sont fortement utiles afin de mieux appréhender le fonctionnement complexe d'un phénomène. C'est notamment le cas en trafic où les modèles ne permettent pas de décrire précisément tous les aspects de l'écoulement.

Les problèmes d'échelle ont été décrits auparavant dans certains écrits dont notamment [Bourrel, 2003]. Ce travail souligne la difficulté de pouvoir donner catégoriquement une limite entre les niveaux microscopique et macroscopique. Cela apparaît notamment dans notre choix de discrétisation lors de la simulation macroscopique. Nous nous sommes interrogés sur les ordres de grandeur acceptables afin de pouvoir considérer un comportement macroscopique. Il est par ailleurs fort possible qu'un pas fixé à une cinquantaine de mètres correspond davantage à une échelle mésoscopique qu'à du macroscopique véritablement. En effet, l'étude semble davantage porter sur des pelotons de véhicules que sur un flux réguliers d'automobiles. Cependant, la discrétisation est limitée par les ordres de grandeur des mesures disponibles.

De la même manière, il est relativement difficile de catégoriser certains modèles : en effet, selon l'expression que l'on souhaite prendre d'un modèle, il semble possible de « traduire » un même modèle selon une version microscopique et une version macroscopique. Nous en avons l'exemple

avec le modèle LWR qui propose une version macroscopique du trafic mais qui permet aussi d'écrire une discrétisation lagrangienne s'adaptant au niveau microscopique. Cette dualité est heureusement valable et représente la motivation de notre démarche. Il est peu évident de réaliser une démarche inverse, en passant du microscopique au macroscopique. Cela demande dans notre cas, l'utilisation d'une certaine théorie mathématique.

Une autre limite relativement liée au temps disponible, est le fait que ce travail soit restreint à l'étude de modèles sur une seule voie courante, unidirectionnelle. S'agissant d'un travail préliminaire et préparant un projet de thèse, nous nous sommes volontairement limités au cas le plus simple. Il est évident qu'aujourd'hui la modélisation se doit de se porter sur l'ensemble des réseaux et notamment sur le difficile problème de la modélisation des intersections ou encore le traitement des sections multivoies. La difficulté pour notre méthode avec les équations d'Hamilton-Jacobi réside dans la nécessité de maintenir les particules ordonnées ; cet ordre serait modifié si l'on considérait des mouvements d'insertion ou de dépassement. Par ailleurs, la finalité de notre travail étant l'intégration des systèmes intelligents de transport, il apparaît que l'intérêt de notre méthode porte davantage sur des sections multivoies.

Nous pouvons également nous arrêter sur les difficultés liées à l'exploitation des données NGSIM. Nous pouvons recenser notamment l'incertitude sur le traitement des captures vidéo mais aussi les incertitudes sur les valeurs d'interdistance, de vitesse et d'accélération qui sont déterminées de manière discrète. Il serait opportun de pouvoir lisser ces différentes courbes, soit en opérant une moyenne pondérée sur les plus proches voisins, soit en adoptant une autre démarche comme par exemple l'utilisation de filtres.

3.3.2 Pistes d'amélioration

Il aurait été intéressant de travailler avec la méthode des débits cumulés lors de la simulation sur des mesures de trafic du type de NGSIM. Cela permettrait en effet de « lisser » les caractéristiques microscopiques et macroscopiques du trafic. En effet, notre méthode d'agrégation des données afin d'en déduire les variables globale peut être remise en question.

Ce travail de master sera poursuivi dans le cadre d'une thèse en co-encadrement avec M. MONNEAU du CERMICS et M. LEBACQUE du GRETIA. Celle-ci sera l'occasion d'étendre l'application de l'homogénéisation au passage mathématique entre modèles microscopiques et modèles macroscopiques du second ordre et d'ordres supérieurs. Un soin tout particulier sera alors apporté à l'estimation des erreurs commises en passant d'une approche à une autre et plus particulièrement, du microscopique au macroscopique. Les erreurs engendrées peuvent être perçues comme une évaluation de la quantité d'informations perdues en acceptant de passer des données individuelles aux données globales. Cette démarche d'estimation ira également de pair avec une définition précise des domaines de validité des différents modèles exposés. Le but recherché sera de déterminer si les modèles de second ordre voire d'ordre supérieur permettent d'obtenir un passage mathématique avec une erreur plus faible que pour les modèles de premier ordre. Cela pourrait éventuellement mettre en avant l'intérêt de l'un des modèles par rapport aux autres.

En outre, nous n'avons que peu détaillé les travaux qui avaient été menés jusqu'alors quant au passage mathématique entre modèles microscopiques et modèles macroscopiques. Il sera

intéressant dans le développement ultérieur de ce travail de mieux expliciter les manques dans les différents travaux accomplis pour le passage microscopique-macroscopique [Lattanzio et Marcati, 1997], [Aw et Rascle, 2002], [Orosz, 2005], [Orosz, 2006]. Ceci servira à cibler précisément nos zones d’actions afin de développer les connaissances en modélisation du trafic routier.

Il serait également intéressant de pouvoir appliquer cette méthode à l’analyse des modèles multi-anticipatifs. L’étude mathématique a été proposée dans [Forcadel et al. 2011] où il est considéré une dépendance selon un nombre infini de particules en amont et en aval. Dans le cas du trafic, il sera opportun de se limiter à quelques véhicules *leaders*.

3.3.3 Perspectives d’études

Ce travail trouvera une suite logique dans la modélisation des « nœuds » ou jonctions des réseaux. En effet, le travail de thèse qui poursuivra le MASTER, examinera quelques exemples de passage micro-macro dans le domaine du trafic véhiculaire. Il est intéressant de pouvoir comprendre et d’analyser les phénomènes en jeu au niveau des jonctions du réseau. Nous représentons schématiquement ci-dessous, deux cas simples de ces nœuds avec un convergent et un divergent. Ce sont classiquement les cas rencontrés en situation courante par les gestionnaires de trafic.



Figure 3.13 : Illustrations de deux cas simples et classiques de nœuds de réseaux

Dans ces cas de travail, il existe actuellement quelques modèles macroscopiques de trafic mais seulement en nombre relativement réduit. Nous savons notamment caractériser certains de ces modèles raisonnables. Mais il semble qu’il reste encore beaucoup à faire. Classiquement, le modèle LWR présenté précédemment peut être appliqué à chaque branche du nœud mais il est difficile d’expliquer la globalité du phénomène à l’échelle macroscopique. L’intérêt est de pouvoir juger de l’effet d’une régulation introduite au niveau de la jonction en termes de gains collectifs pour l’écoulement du flux de véhicules.

A la lumière des justifications menées en première partie de la thèse, il sera intéressant de pouvoir utiliser les modèles microscopiques prédisant les comportement de poursuite des véhicules à la plus petite échelle pour pouvoir ensuite les agréger sous la forme d’un modèle de comportement macroscopique. L’enjeu sera de ne pas perdre trop d’informations relatives aux comportements des véhicules en opérant ce passage à l’échelle macroscopique.

Enfin, comme nous l'avons exposé précédemment, nous chercherons à adapter notre méthode afin de prendre en compte l'introduction de systèmes coopératifs dans les transports. Devant la nécessité de prévoir les évolutions des systèmes utilisés dans le domaine des transports et étant donné les promesses actuelles des systèmes coopératifs, l'étude de l'impact de ces systèmes sur l'écoulement global du trafic nous paraît primordiale. Les nouvelles applications pour le trafic routier actuellement en phase de développement consistent à prendre de plus en plus en compte les communications depuis et/ou vers les véhicules. Il s'agit là d'une des perspectives de ce sujet micro-macro. Les modèles microscopiques permettent en effet de prendre naturellement en compte ces communications. Il est donc très important de développer dans le cadre de la thèse une méthode pour agréger proprement ces systèmes coopératifs microscopiques sous forme de modèles macroscopiques qui permettront ainsi de déterminer globalement le comportement émergent du trafic.

Il s'agira de connaître, de comprendre et de pouvoir traiter les conséquences qu'aurait l'introduction d'échanges d'informations entre véhicules au niveau microscopique, sur la fluidité du trafic et l'écoulement du flot au niveau macroscopique. Comme nous l'avons abordé précédemment, de nombreux phénomènes macroscopiques trouvent leurs origines dans des phénomènes microscopiques. Il est ici question de pouvoir estimer les modifications microscopiques potentiellement introduites par les systèmes coopératifs et d'en déduire les conséquences que cela pourrait avoir en termes de gestion du trafic. Il est possible de se poser la question suivante : à l'image du principe physique d'« auto-organisation », quelles sont les possibilités des systèmes embarqués dans les véhicules au niveau microscopique afin d'homogénéiser les caractéristiques du trafic global, à l'échelle macroscopique ?

CONCLUSION

Ce travail a permis de réaliser un état de l'art des modèles d'écoulement couramment utilisés par les acteurs du transport, à minima en France. Cette première étape a été très importante afin de pouvoir dégager les modèles les plus pertinents à étudier. Nous nous intéressons aux problèmes d'échelles inhérents à la simulation du trafic routier. Peu de logiciels de simulation permettent un couplage entre l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique. Il est donc important d'assurer une cohérence entre ces deux échelles. Certains auteurs ont alors développé le principe de l'hybridation des modèles dans lesquels il est possible d'utiliser les modèles adéquats selon la recherche de finesse souhaitée. Notre démarche développée ici, est différente puisque notre volonté est de nous appuyer sur une technique d'homogénéisation. Celle-ci fait intervenir un facteur d'échelle permettant de passer théoriquement de l'expression d'un modèle microscopique de poursuite à un modèle macroscopique d'écoulement. Le présent document est donc un premier pas dans l'analyse et la réalisation de ce passage mathématique entre modèles microscopiques et modèles macroscopiques avec une telle démarche d'homogénéisation.

L'idée de notre travail s'inspire de l'apparition des systèmes coopératifs et elle réside dans le concept d' « auto-organisation » des systèmes complexes. Les systèmes de transport intelligents et plus particulièrement les systèmes coopératifs peuvent permettre dans les années à venir, une véritable rupture dans les modes de gestion des infrastructures de transport routier. Ces systèmes qui peuvent emprunter différentes formes comme par exemple les systèmes de géolocalisation et de géoguidage fonctionnant en temps direct. Ce genre de systèmes semble présenter un inconvénient dans la mesure où sans un contrôle homogénéisé des informations fournies aux usagers, dans le cas d'une congestion intervenant sur un réseau routier maillé, tous les utilisateurs seraient amenés vers un seul arc considéré comme ayant le coût minimal. Or cet arc pourrait avoir une capacité insuffisante voire même une structure géotechnique totalement inadaptées à un report de trafic de catégorie différente (pourcentage de poids lourds et/ou débit plus importants). Il s'agit d'un problème type de la différence entre l'optimum individuel et l'optimum collectif (référence aux modèles de Wardrop). Cela souligne l'importance de pouvoir comprendre l'échange d'informations au niveau microscopique afin de pouvoir assurer une cohérence de l'écoulement du trafic à l'échelle macroscopique d'un réseau urbain, prenant en compte le type de réseau et ses caractéristiques (capacité, type d'usagers, dimensionnement originel de la structure de chaussée, environnement urbain...).

Une des applications que pourrait avoir les systèmes coopératifs, porte sur des missions de sécurité. Dans ce cadre, les systèmes embarqués pourraient se révéler être particulièrement intéressants dans une perspective de gestion de la sécurité des ouvrages d'art et notamment des tunnels. Des systèmes de dialogue de véhicule à véhicule (type V2V) permettraient de faire « remonter » très facilement l'information d'un accident dans l'ouvrage vers les usagers situés en amont, qu'ils soient déjà à l'intérieur du tunnel concerné ou en approche de celui-ci. Les systèmes d'alerte permettraient en outre d'indiquer les bonnes manœuvres à réaliser afin de ne pas aggraver la situation, éviter un sur-accident, faciliter l'arrivée des services d'intervention et bien sûr, permettre de donner l'alerte en premier lieu, d'indiquer précisément l'endroit où se trouvent les véhicules impactés et renseigner leur nombre.

Ou encore, les systèmes coopératifs pourraient aider à diminuer les interdistances minimales entre les véhicules sans pour autant compromettre la sécurité des usagers. Cela aurait pour principal effet de permettre une augmentation de la capacité d'écoulement de l'infrastructure. En effet, il est courant de constater que sur les voies rapides urbaines (et plus particulièrement sur les axes de la région parisienne), le non-respect des distances minimales de sécurité est gage d'une certaine fluidité du trafic. Mais avec l'assistance des systèmes coopératifs qui permettraient de réduire le temps de réaction du conducteur en prenant le pas dans le contrôle du véhicule (système de freinage d'urgence par exemple), les interdistances pourraient être abaissées et adaptées dans ces cas-là. Cela aurait pour impact une amélioration des conditions macroscopiques de l'écoulement du flot de véhicules.

LEXIQUE

BE : Bureau d'Etudes

CA : *Collision Avoidance*

CERMICS : Centre d'Enseignements et de Recherches en Mathématiques et Calcul Scientifique

CETE : Centre d'Etudes Techniques de l'Equipement

CT : *Cell Transmission*

DIR : Direction Interdépartementale des Routes

ENPC : Ecole Nationale des Ponts et Chaussées

EGT : Enquêtes Globales de Transports

ENTPE : Ecole Nationale des Travaux Publics de l'Etat

GDV : Gestion Dynamique des Voies

GRETTIA : Génie des Réseaux de Transports Terrestres et Informatique Avancée

HMP : Heure de Pointe du Matin

HPS : Heure de Pointe du Soir

HJ : Hamilton-Jacobi

IFSTTAR : Institut Français des Sciences et Technologies des Transports, de l'Aménagement et des Réseaux

ITS : Intelligent Transport System

LICIT : Laboratoire d'Ingénierie, Circulation et Transports

LWR : Lighthill, Whitham et Richards

NGSIM : Next-Generation Simulation

O/D : Origine/Destination (matrice)

ODE : *Ordinary Differential Equation*

OVM : *Optimal Velocity Model*

PCI : Pôle de Compétence et d'Innovation

PDE : *Partial Differential Equation*

PGT : Plan de Gestion du Trafic

RDV : Régulation Dynamique des Vitesses

SETRA : Service d'Etudes sur les Transports, les Routes et leurs Aménagements

ZELT : Zone Expérimentale et Laboratoire de Trafic

ANNEXES

Annexe A : discrétisation du modèle LWR

Annexe B : Problèmes d'échelles en trafic

Annexe C : Justification des classes de modèles

Annexe D : Trajectoires NGSIM

Annexe E : Code programmation MATLAB

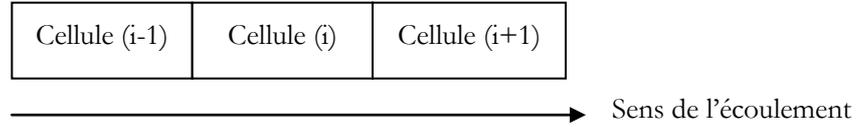
ANNEXE A : DISCRETISATION DU MODELE LWR

Considérons l'équation LWR suivante :

$$K_t + Q_e(K)_x = 0$$

$$\text{Avec } Q_e(K) = K.v(K) = K.\bar{v}\left(\frac{1}{Q}\right) = K.\bar{v}(S).$$

Nous considérons alors une discrétisation du plan espace-temps, en espace d'un pas fixe Δx et en temps, d'un pas fixe Δt . Nous formons ainsi des « cellules » de pas Δx qui s'échangent de l'information sous forme de véhicules tous les Δt .



Selon ce modèle discret, nous avons l'approximation suivante :

$$K(i.\Delta x, n.\Delta t) \sim K_i^n$$

A partir de laquelle nous considérons le schéma numérique suivant :

$$\frac{K_i^{n+1} - K_i^n}{\Delta t} + \frac{\overbrace{\Phi(K_i^n, K_{i+1}^n)}^{\text{flux entrant}} - \overbrace{\Phi(K_{i-1}^n, K_i^n)}^{\text{flux sortant}}}{\Delta x} = 0$$

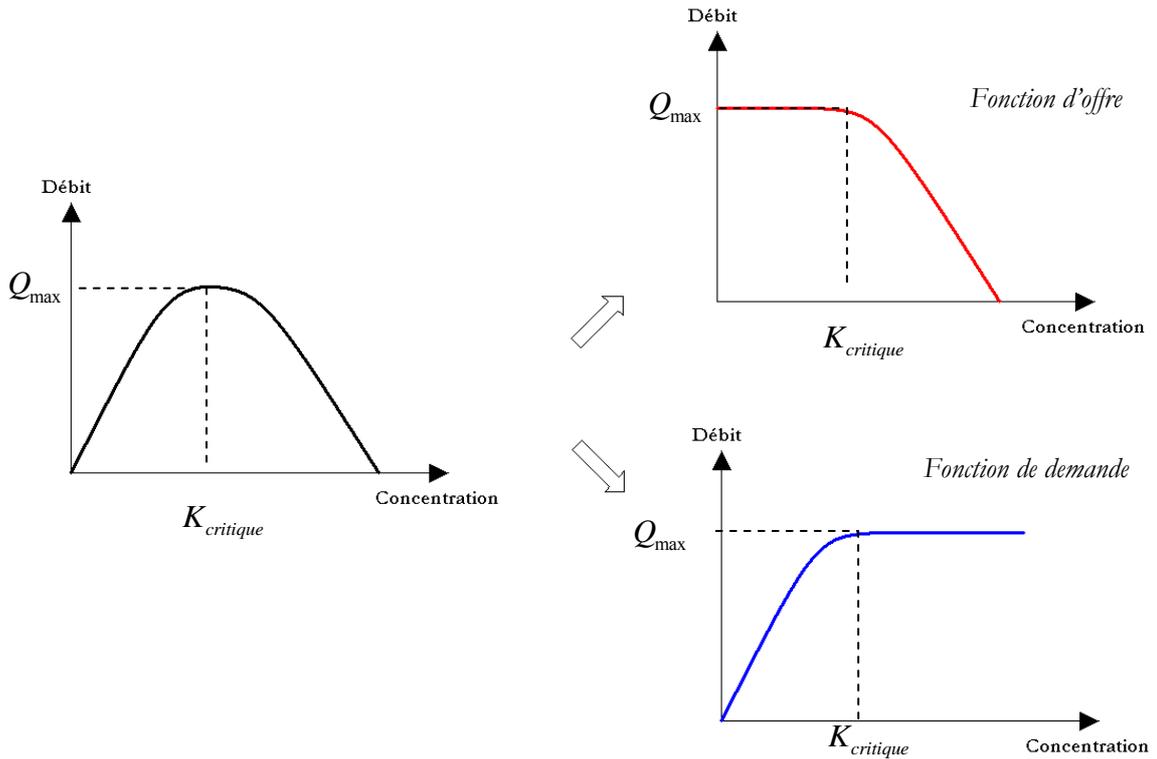
Dans lequel, nous introduisons alors les flux entrant et sortant de chaque cellule. Ces flux font eux-mêmes intervenir des fonctions d'offre et de demande. Ces deux fonctions ont été introduites dans [Lebacque, 1996] :

$$\Phi(K_i^n, K_{i+1}^n) = \min\left(\underbrace{f^D(K_i^n)}_{\text{fonction de demande}}, \underbrace{f^O(K_{i+1}^n)}_{\text{fonction d'offre}} \right)$$

La fonction de demande est définie comme étant le volume de trafic provenant de la cellule directement en amont, et souhaitant s'écouler vers la cellule considérée. La fonction d'offre représente quant à elle la quantité de véhicules pouvant être accueillie sur cette cellule considérée. Il est alors possible de montrer que les fonctions d'offre et de demande se définissent comme suit :

$$\left| \begin{array}{l} f^D(K_i^n) = \begin{cases} Q_e(K_i^n), & \text{si } K_i^n \leq K_{\text{critique}} \\ Q_{\text{max}}, & \text{si } K_i^n > K_{\text{critique}} \end{cases} \\ f^O(K_{i+1}^n) = \begin{cases} Q_{\text{max}}, & \text{si } K_{i+1}^n \leq K_{\text{critique}} \\ Q_e(K_{i+1}^n), & \text{si } K_{i+1}^n > K_{\text{critique}} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ces fonctions se déduisent graphiquement du diagramme fondamental, quelle que soit la forme du DF considérée. Ce qui est illustré ci-après.



Fonctions d'offre et de demande

Figure 0.1 : Définition des fonctions d'offre et de demande [Lebacque, 1996]

Nous savons qu'à l'expression du schéma numérique, s'ajoute classiquement une condition de type Courant-Friedrich-Levy (CFL) afin de s'assurer de la stabilité de celui-ci.

En supposant que $K_i^n = \frac{N_i^n - N_{i-1}^n}{\Delta x}$ où N_i^n désigne l'indice de la voiture se trouvant en $i\Delta x$ à l'instant $n\Delta t$. Cela s'apparente à la méthode des débits cumulés.

Nous pouvons remarquer que le schéma s'écrit désormais sous la forme :

$$N_i^{n+1} = F(N_i^n, N_{i+1}^n, N_{i-1}^n)$$

Ce schéma est monotone si $\forall j, \frac{\partial F}{\partial N_j^n} \geq 0$ équivalent à une condition CFL du type :

$$1 - \Delta t \cdot \sup |Q_e'| \geq 0.$$

Ainsi, nous obtenons que :

$$\frac{N_i^{n+1} - N_i^n}{\Delta t} + \min \left(f^D \left(\underbrace{\frac{N_i^n - N_{i-1}^n}{\Delta x}}_{=K_i^n} \right), f^O \left(\underbrace{\frac{N_{i+1}^n - N_i^n}{\Delta x}}_{=K_{i+1}^n} \right) \right) = 0$$

Nous pouvons ainsi retrouver que N vérifie l'équation aux dérivées partielles suivantes :

$$N_t + Q_e(N_x) = 0$$

ANNEXE B : PROBLEMES D'ECHELLES EN TRAFIC

Modélisation routière

Généralités

Dans le cadre de la modélisation globale des déplacements sur un réseau routier, nous distinguons classiquement deux types de modèles. Tout d'abord, nous trouvons les modèles dits statiques qui sont généralement utilisés dans le cadre de la planification des transports et des réseaux. Le modèle principalement utilisé est le modèle à quatre étapes (génération, choix modal, distribution et affectation). Distinctement, se trouvent les modèles dynamiques permettant de décrire l'écoulement physique du trafic routier. Ces modèles sont utilisés par les gestionnaires de réseau dans le but de réguler le trafic sur leurs infrastructures (délestage, Gestion Dynamique des Voies ou encore Régulation Dynamique des Vitesses). Notons que tandis que les modèles de planification permettent la mise en place de méthodes sur le moyen et le long terme, les modèles dynamiques ont pour but l'utilisation de moyens de gestion sur le court terme.

Enjeux du trafic en France

La gestion du trafic implique bien évidemment différents enjeux. L'un d'eux est de pouvoir déterminer les volumes de trafic selon le temps et l'espace. Il s'agit de dimensionner les réseaux de transport, de déterminer les stratégies de construction ou d'élargissement des voies de transport. La situation actuelle incite désormais les décideurs publics à se tourner vers la gestion efficace des réseaux existants plutôt qu'à chercher à générer de nouvelles infrastructures.

Dans ce but, il est donc important de pouvoir proposer une gestion efficace des axes routiers. Cette gestion a plusieurs facettes : la gestion en temps différé, qu'elle soit *a priori* ou *a posteriori*, ainsi que la gestion en temps réel. Cette dernière se développe de plus en plus aujourd'hui. La régulation dynamique peut être définie comme étant un ensemble d'actions directives sur les flux de trafic et/ou l'offre routière, en temps réel dans le but de maximiser l'écoulement et d'optimiser l'usage de la voirie. La régulation dynamique a connu un fort développement grâce à l'application des technologies de l'information au système routier.

Logiciels de simulation

Nous présentons quelques uns des outils de simulation qui sont le plus couramment utilisés par les utilisateurs de la simulation routière en France.

Logiciels commerciaux

- Le logiciel AIMSUN a été développé peu avant le début des années 2000. Il est désormais commercialisé par la société Transport Simulation Systems (TSS), abritée par l'Université de Catalogne. Le modèle de poursuite implémenté dans AIMSUN est basé sur le modèle de Gipps [Gipps, 1981]. Plus exactement, le modèle est un développement du modèle original, classiquement fondé autour d'une composante d'accélération (modélisant la volonté d'atteindre une vitesse désirée) et une composante de décélération (traduisant la contrainte liée à la présence d'un véhicule *leader*). La spécificité du modèle implémenté dans AIMSUN est dans l'estimation de la décélération du véhicule leader. Le lecteur trouvera de plus amples renseignements dans [TSS, 2010].

- Développé et commercialisé par la société DYNALOGIC, le logiciel de simulation microscopique et stochastique DYNASIM a pour objectif de modéliser aussi finement que possible l'écoulement du trafic sur un réseau. Pour cela, une des idées de base du modèle est l'existence d'une zone d'influence entourant un véhicule, dans laquelle aucun autre véhicule ne pénètre. Le modèle de poursuite sous-jacent à DYNASIM détermine l'accélération d'un véhicule selon la vitesse de ce véhicule et l'interdistance le séparant du véhicule le précédant. Le modèle utilise l'équation de l'accélération suivante :

$$\ddot{x}_i(t+0,25) = C_1 \cdot (\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t)) + C_2 \cdot (x_{i-1}(t) - x_i(t) - \beta \cdot \dot{x}_i(t) - L)$$

Avec L la longueur des véhicules, supposée fixe. Nous retrouvons trois paramètres C_1 , C_2 et β décrivant trois types d'accélération pour le véhicule i . Ce modèle est issu du modèle linéaire de [Helly, 1961] qui pour rappel, est donné par :

$$\ddot{x}_i(t+T_r) = C_1 \cdot (\dot{x}_{i-1}(t) - \dot{x}_i(t)) + C_2 \cdot [(x_{i-1}(t) - x_i(t)) - \alpha - \beta \cdot \dot{x}_i(t) - \gamma \cdot \ddot{x}_i(t)]$$

Où nous prenons $T_r = 0,25$, $\alpha = L$ et $\gamma = 0$.

- SITRA est un programme de simulation microscopique initialement développé à l'ONERA (Office National d'Etudes et de Recherches Aéronautiques) puis commercialisé par la société française SODIT, aujourd'hui disparue. Ce modèle était essentiellement destiné à la simulation en zone urbaine, et notamment à l'étude des intersections et des carrefours. Le modèle de poursuite utilisé par SITRA est également le modèle linéaire de Helly. Dans [Magne et al., 2000], les auteurs montrent que le modèle microscopique utilisé est cohérent avec un modèle macroscopique de trafic à l'équilibre (modèle de premier ordre).
- VISSIM est développé par la société allemande Planung Transport Verkehr (PTV). Il est le descendant des programmes réalisés dans les années 1970 à l'Université de Karlsruhe, dont par exemple [Wiedemann et al., 1974]. VISSIM est un logiciel de simulation pour milieu urbain et interurbain. Il propose une simulation microscopique du couple véhicule-conducteur basée sur une analyse psychophysique du comportement de conduite. Ce type d'idées a été présenté brièvement avec le modèle de Wiedemann. Cette simulation est à la fois discrète et stochastique et s'effectue avec un pas de temps pris égal à 1 seconde.
- VISUM est également un logiciel développé et commercialisé par la société PTV. Cependant, VISUM est un logiciel de simulation macroscopique qui se propose de déterminer les temps de parcours sur un réseau d'infrastructures. Ce calcul est réalisé de façon statique à partir des résultats d'affectation de la demande sur les branches du réseau.
- PARAMICS est une série d'outils pour la simulation microscopique du trafic, dont PARAMICS Modeller constitue le noyau central. PARAMICS est susceptible de traiter des réseaux dont la taille n'est a priori pas limitée. Le logiciel PARAMICS existe conjointement sous deux versions parallèles : une version est développée par la société Quadstone tandis que la seconde est détenue par la société SIAS. Initialement développé au Centre de calcul de l'Université d'Edimbourg avant d'être repris indépendamment, et concurremment, par les sociétés SIAS (version souvent dite S-PARAMICS) et Quadstone (version quelquefois dite Q-PARAMICS). Le modèle microscopique de poursuite de PARAMICS fait intervenir les notions d'interdistance

désirée et d'interdistance cible. Afin de parvenir à atteindre ces valeurs à chaque instant, le conducteur va alors accélérer ou décélérer [Duncan, 1997]. Ce modèle mêle à la fois l'idée des modèles à distance de sécurité type Krauss ainsi que celle des modèles psychophysiques type Wiedemann.

- Enfin, citons le cas du logiciel TRANSMODELER développé dès 2005 par la société CALIPER. Celui-ci propose des modules de simulation microscopique et macroscopique ainsi qu'une possibilité d'hybridation. Cette dernière possibilité se traduit par la capacité de simuler de larges réseaux et puis plus finement un carrefour particulier, avec un seul modèle.

Ces modèles commerciaux sont classés selon leur échelle de représentation ci-dessous :

Microscopique	Mésoscopique	Macroscopique
<ul style="list-style-type: none"> • AIMSUN • ARCADY • CORSIM • DRACULA • DYNASIM • MATSim • Quadstone PARAMICS • SimTraffic • TransModeler • UAF • VISSIM • TRITONE 	<ul style="list-style-type: none"> • Cube • DYNASMART • TRANSIMS • TransModeler 	<ul style="list-style-type: none"> • DYNEV • Emme/2 • OmniTRANS • OREMS • TransCAD • TransModeler • VISUM

Logiciels de recherche

- Le logiciel SYMUVIA est développé au Laboratoire d'Ingénierie, Circulation et Transports (LICIT). SYMUVIA est basé sur un modèle macroscopique d'écoulement, utilisant un diagramme fondamental triangulaire. Deux phases sont donc mises en avant avec une phase fluide et une phase congestionnée durant laquelle la position du véhicule est déduite de la position du véhicule leader. Le pas de temps est pris de telle sorte que l'information de remontée de file d'un véhicule à l'autre, soit correctement prise en compte. Le modèle incorpore également un modèle de changements de files, des caractéristiques d'accélération bornée pour les véhicules ainsi que le comportement au niveau des points singuliers.
- MITSIM est le simulateur microscopique incorporé dans le logiciel de simulation MITSIMLab, développé par le Massachusetts Institute of Technology (MIT). MITSIMLab inclut également un simulateur de gestion de la circulation utilisé pour la simulation du contrôle du trafic et des systèmes de guidage routier. Les données d'entrée pour MITSIM sont classiquement des matrices O-D ; un modèle de choix probabiliste du trajet est ensuite utilisé pour déterminer le cheminement de chaque véhicule individuel à chaque intersection du réseau. Un modèle de choix d'itinéraire alternatif est également disponible dans lequel les véhicules sont affectés selon des chemins spécifiés dès le début de la simulation. MITSIM est conçu pour être utilisé dans l'évaluation des systèmes de gestion du trafic.

- Le modèle dynamique de microsimulation DRACULA (*Dynamic Route Assignment Combining User Learning and microsimulAtion*, Affectation dynamique des trajets combinant l'apprentissage des utilisateurs et la microsimulation) a été développé à l'Université de Leeds depuis 1993. C'est une nouvelle approche de modélisation de réseaux du trafic routier, dans lequel l'accent est mis sur un couplage entre un modèle d'historique de trafic et un modèle de poursuite microscopique. DRACULA permet de représenter directement les choix de trajet des conducteurs à mesure que ces décisions évoluent en fonction du temps. Cette démarche prend en compte la trajectoire spatio-temporelle du véhicule leader, mais aussi la configuration du réseau et les règles de franchissement aux intersections. Le modèle propose donc une simulation dynamique de l'offre et de la demande.
- FASTLANE est un outil logiciel développé par l'Université de Delft (Pays-Bas). Il peut être utilisé pour la prévision à court terme de l'écoulement du trafic sur les autoroutes. Le fonctionnement de FASTLANE se divise en deux parties. Tout d'abord, une estimation de l'état actuel du trafic est réalisée. Ensuite, le programme actualise l'état de trafic selon un certain scénario en accord avec l'état de trafic précédent. Dans ce logiciel, l'accent est tout particulièrement mis sur la deuxième étape du programme, à savoir la modélisation et la prédiction de l'écoulement du trafic.

Mise en perspective des attentes

En termes de besoins d'améliorations vis-à-vis de la modélisation et des problèmes d'échelle, il apparaît que lors des études de trafic, les échelles microscopiques et macroscopiques sont clairement dissociées. Cela est principalement dû au fait que comme nous l'avons vu en première partie de ce travail, les modèles utilisés aux niveaux microscopique et macroscopique sont distincts les uns des autres et *a priori*, indépendants entre eux.

Les logiciels commerciaux permettent classiquement l'étude d'aménagement de carrefours, d'échangeurs, de voies spécifiques aux transports collectifs... Mais ces derniers ne garantissent pas de cohérence entre les échelles de modélisation. Ainsi, il est possible d'utiliser facilement les matrices issues du modèle statique dans l'outil dynamique mais il n'y a pas de remonté du modèle dynamique vers le modèle statique, pour améliorer la précision du modèle statique et notamment pour représenter la congestion.

Une étude de trafic doit nécessairement débiter par un choix d'échelle ; en effet, la précision choisie pour l'étude conditionne la finesse des données à obtenir, les temps de calculs nécessaires mais aussi la précision finale des résultats. Devant la multiplicité des modèles, l'utilisateur doit réaliser un choix en connaissant les spécificités de chacun de ses modèles, leurs domaines de validité et les cas précis d'application. Le problème de l'échelle est une difficulté récurrente dans le domaine des transports. Afin de s'en affranchir, certains chercheurs ont proposé d'autres modèles comme les modèles mésoscopiques, adoptant une échelle « intermédiaire ». Mais depuis une dizaine d'années, le concept d'hybridation des modèles s'est considérablement développé. Citons parmi d'autres [Bourrel, 2003], [Mammar, 2006] et [Leclercq, 2007]. L'idée serait de pouvoir utiliser les modèles microscopiques et macroscopiques au cas par cas, tout en assurant la cohérence des démarches aux interfaces macro-micro et micro-macro.

ANNEXE C : JUSTIFICATION DES CLASSES DE MODELES

Nous rappelons ici les formulations des différents modèles considérés et leur forme générale approximante. Nous ne rentrons pas dans le détail de chacune des formules, ceci ayant été fait dans la première partie de ce travail. En revanche, nous mettons en avant chacune des variables intéressantes.

I. Les modèles « premier ordre »

1. Modèle de **Pipes**

L'expression du modèle (ainsi que du modèle de **Forbes** dont la formulation est relativement proche) est donnée par :

$$\dot{x}_i(t) = 16,1 \cdot \left(\frac{x_{i+1}(t) - x_i(t)}{L_i} - 1 \right)$$

Nous nous proposons de l'approcher par la forme correspondante au modèle (1) :

$$\dot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t))$$

2. Modèle de **Forbes**

II. Les modèles « second ordre »

1. Modèle de **Kometani et al.**

L'expression du modèle est donnée par :

$$x_{i+1}(t) - x_i(t) = \alpha \cdot \dot{x}_{i+1}^2(t) + \beta \cdot \dot{x}_i^2(t + \tau) + \gamma \cdot \dot{x}_i(t + \tau) + \delta$$

Nous l'approchons de la forme générale suivante, qui sera assimilé au modèle (2) en considérant un développement limité avec τ suffisamment petit :

$$\dot{x}_i(t + \tau) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_{i+1}(t))$$

2. Modèle de **Newell**

Ce modèle est directement donné par l'expression générale du modèle (2'), en considérant un développement limité avec τ suffisamment petit :

$$\dot{x}_i(t + \tau) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t))$$

3. Modèle de **Gazis et al.**

Ce modèle peut être intégré : nous supposons que $\dot{x}_i(t) > 0, \forall t$ et $x_{i+1}(t) - x_i(t) > 0, \forall t$

$$\frac{\ddot{x}_i(t + \tau)}{[\dot{x}_i(t + \tau)]^m} = \beta \cdot \frac{\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)}{[x_{i+1}(t) - x_i(t)]^l}$$

Notons par ailleurs que le modèle de **Chandler et al.** est un cas particulier du premier avec $m = 0$ et $l = 0$. Nous ne conserverons alors uniquement que la forme généralisée proposée par Gazis et al. Si $m \neq 1$ et $l \neq 1$, nous intégrons :

$$\frac{1}{[\dot{x}_i(t + \tau)]^{m-1}} = \beta \cdot \frac{m-1}{l-1} \cdot \frac{1}{[x_{i+1}(t) - x_i(t)]^{l-1}} + \gamma$$

Soit

$$[\dot{x}_i(t + \tau)]^{m-1} = K \cdot [x_{i+1}(t) - x_i(t)]^{l-1} + \delta$$

$$\text{Avec } K = \frac{m-1}{\beta \cdot (l-1)}$$

D'où nous tirons l'expression générale du modèle, à rapprocher du modèle (2) en considérant un développement limité avec τ suffisamment petit :

$$\dot{x}_i(t + \tau) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t))$$

4. Modèle de **Gipps**

Le modèle est donné par l'expression suivante :

$$\dot{x}_i(t + \tau) = \min \left[\dot{x}_i(t) + 2,5 \cdot a_i^{max} \cdot \tau \cdot \left(1 - \frac{\dot{x}_i(t)}{V_{i,désirée}} \right) \sqrt{0,025 + \frac{\dot{x}_i(t)}{V_{i,désirée}}}, b_i^{max} \cdot \tau \right. \\ \left. + \sqrt{(b_i^{max} \cdot \tau)^2 - b_i^{max} \left\{ 2(x_{i+1}(t) - x_i(t) - \hat{S}_i) - \dot{x}_i(t) \cdot \tau - \frac{\dot{x}_{i+1}^2(t)}{\hat{b}_{i-1}^{max}} \right\}} \right]$$

Nous proposons de l'approcher de la forme générale suivante, correspondante au modèle (2) :

$$\dot{x}_i(t + \tau) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_i(t), \dot{x}_{i+1}(t))$$

5. Modèle de **Krauss**

L'expression du modèle est donnée par :

$$\dot{x}_i(t + \tau) = \dot{x}_{i+1}(t) + \frac{(x_{i+1}(t) - x_i(t)) - \dot{x}_i(t) \cdot \tau}{\frac{\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)}{b_i^{max}} + \tau}$$

Nous l'approcherons avec la forme générale suivante, correspondante également au modèle (2) :

$$\dot{x}_i(t + \tau) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_i(t), \dot{x}_{i+1}(t))$$

III. Les modèles « ordre supérieur »

1. Modèle de **Helly**

L'expression du modèle est donnée par :

$$\ddot{x}_i(t + \tau) = \alpha(\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)) + \beta[(x_{i+1}(t) - x_i(t)) - (\gamma + \delta \cdot \dot{x}_i(t) + \sigma \cdot \ddot{x}_i(t))]$$

Nous proposons de l'approcher de la forme générale suivante, correspondante au modèle (3) :

$$\ddot{x}_i(t + \tau) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t), \dot{x}_i(t), \ddot{x}_i(t))$$

2. Modèle de **Bando et al.**

L'expression du modèle est donnée par :

$$\ddot{x}_i(t + \tau) = \alpha \cdot \left[\frac{v_{max}}{2} \cdot \{ \tanh(x_{i+1}(t) - x_i(t) - S_c) + \tanh(S_c) \} - \dot{x}_i(t) \right]$$

Nous proposons de l'approcher de la forme générale suivante, correspondante au modèle (3) :

$$\ddot{x}_i(t + \tau) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_i(t))$$

3. Modèle de **Treiber et al.**

L'expression du modèle est donnée par :

$$\ddot{x}_i(t) = \alpha \cdot \left[1 - \left(\frac{\dot{x}_i(t)}{V_0} \right)^\delta - \left(\frac{S_0 + \dot{x}_i(t) \cdot \tau + \dot{x}_i(t) \cdot \left\{ \frac{\dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t)}{2\sqrt{\alpha\beta}} \right\}}{x_{i+1}(t) - x_i(t)} \right)^2 \right]$$

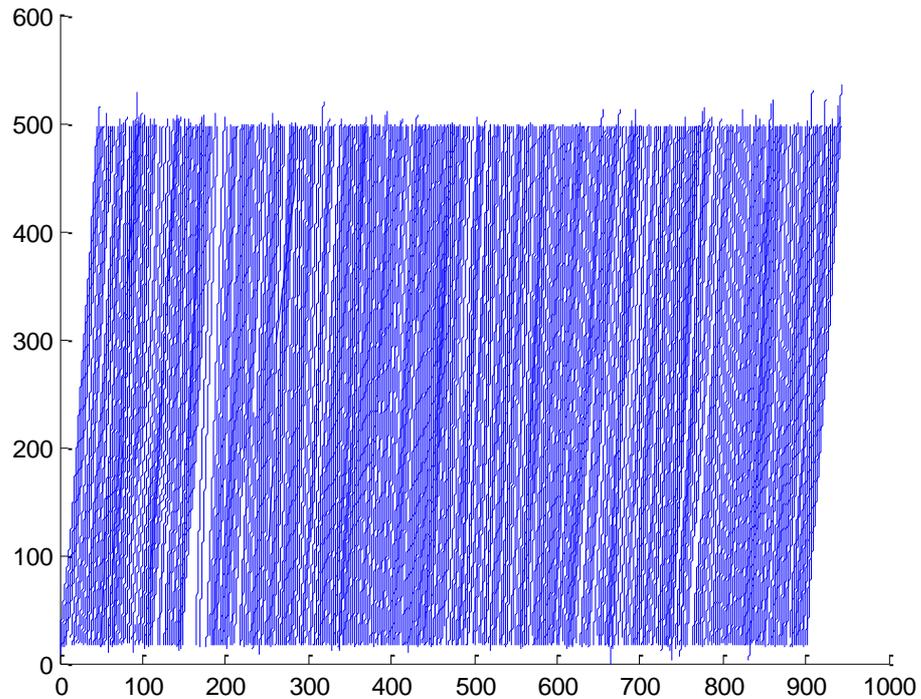
Nous proposons de l'approcher de la forme générale suivante, correspondante au modèle (3) :

$$\ddot{x}_i(t) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t), \dot{x}_{i+1}(t) - \dot{x}_i(t), \dot{x}_i(t))$$

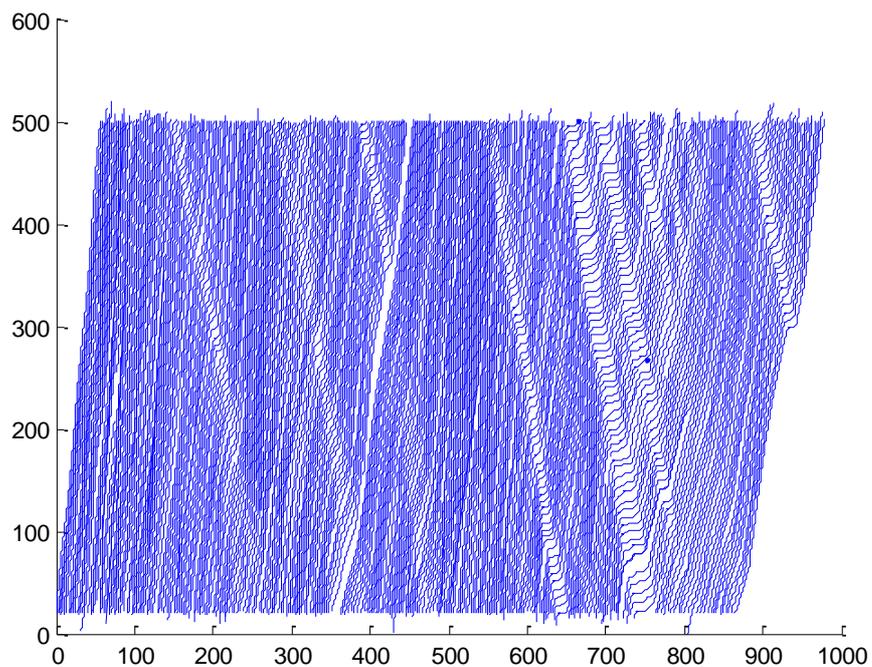
ANNEXE D : TRAJECTOIRES NGSIM

Nous nous sommes intéressés aux mesures effectuées sur la période 17h00-17h15. Nous proposons les trajectoires des véhicules sur deux voies différentes afin de mettre en avant la propagation d'ondes de sur-congestion. Celles-ci sont visibles sur la voie 2 mais pas sur la voie 1.

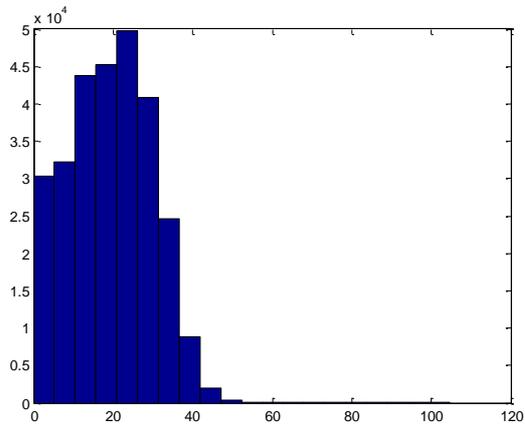
Voie 1 :



Voie 2 :

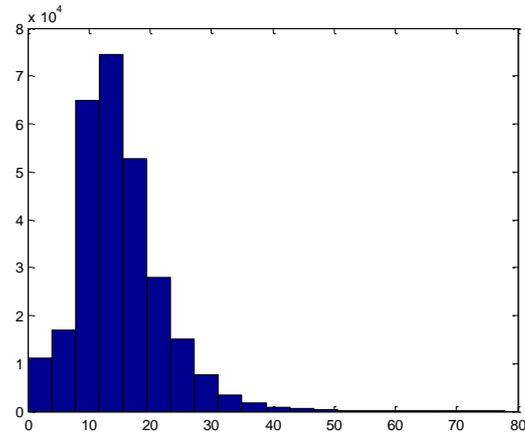


Nous présentons la distribution des vitesses et des interdistances pour la voie n°2.



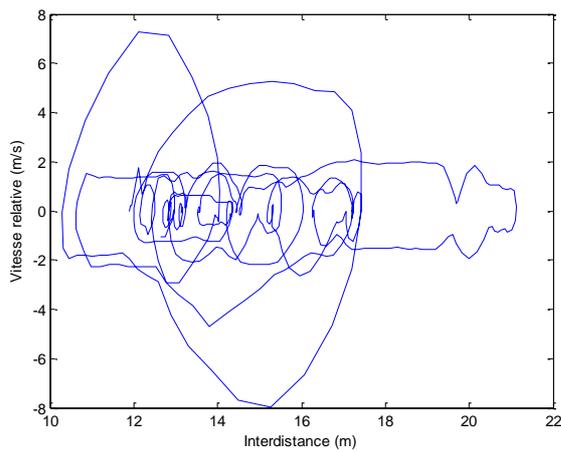
Histogramme des vitesses en km/h (voie n°2, période 17h00 – 17h15)

Figure 0.2 : Histogramme des vitesses, d'après données NGSIM

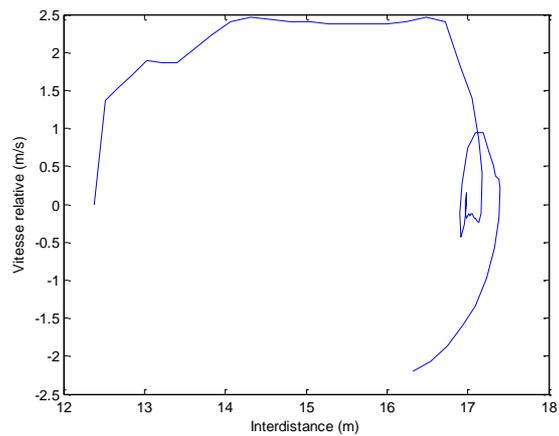


Histogramme des interdistances en mètres (voie n°2, période 17h00 – 17h15)

Figure 0.3 : Histogramme des interdistances (mètres), d'après données NGSIM



Vitesse relative en fonction de l'interdistance (véhicule n° 326, voie n°2, période 17h00 – 17h15)



Vitesse relative en fonction de l'interdistance (véhicule n°369, voie n°2, période 17h00 – 17h15)

Figure 0.4 : Exemples de courbes vitesse relative en fonction de l'interdistance, d'après données NGSIM

ANNEXE E : CODE PROGRAMMATION MATLAB

1) Au niveau microscopique :

```
function F=Trajectoires(M,methode)
%fonction reproduisant les trajectoires individuelles des véhicules

F=[];

O=OrdrePassage(M); %fonction permettant d'indiquer l'indice des
véhicules et le nombre de points de mesures pour chacun d'eux
T=[];
nO=length(O);

mesure=O(1,2);

Leader=M(1:O(1,2),:);
%on initialise la matrice des mesures du véhicule leader
%seule la trajectoire réelle du premier véhicule sera conservée

figure
hold on

for i=2:nO
    SuiveurObserve=M(mesure+1:mesure+O(i,2),:);
    %matrice du véhicule suiveur

    for vmax=5:120
        for Smin=2:50

            SuiveurSimulee=TrajectoireSimulee(Leader,SuiveurObserve,vmax,Smin);
            %on détermine la trajectoire du véhicule suiveur en
            fonction des paramètres : couple (vmax, Smin)

            if strcmp(methode,'RMSE')==1
                R=RMSE(SuiveurSimulee,SuiveurObserve);
                %on détermine l'erreur quadratique moyenne
            elseif strcmp(methode,'MANE')==1
                R=MANE(SuiveurSimulee,SuiveurObserve);
                %on détermine l'erreur absolue moyenne
            end

            T=[T; [vmax, Smin, R] ];
            %on enregistre au sein d'une même matrice, les valeurs des
            %erreurs obtenues pour chaque couple (vmax, Smin)
        end
    end
end
```

```

    [minimum, indiceligne]=min(T(:,3));
    %recherche l'indice de ligne avec le couple (vmax, Smin) qui
    permet le RMSE minimal
    vmaxopt=T(indiceligne,1);
    Sminopt=T(indiceligne,2);
    F=[F; O(i,1), vmaxopt, Sminopt, minimum];

SuiveurSimulee=TrajectoireSimulee(Leader, SuiveurObserve, vmaxopt, Sminopt);

    %on trace sur un nouveau graphique, les trajectoires du leader et
    %celles (simulée et observée) du véhicule suiveur

    plot(Leader(:,4), Leader(:,6), 'k');
    plot(SuiveurObserve(:,4), SuiveurObserve(:,6), 'b');
    plot(SuiveurSimulee(:,4), SuiveurSimulee(:,6), 'r');

    %on ré initialise les matrices de mesure

    Leader=TrajectoireSimulee(Leader, SuiveurObserve, vmaxopt, Sminopt);
    T=[];

    mesure=mesure+O(i,2);
end

function S=TrajectoireSimulee(L, SuiveurObserve, vmax, Smin)
%temps en seconde
%distance en mètres

%L matrice de la trajectoire du véhicule leader
%S matrice de la trajectoire simulée du véhicule suiveur
[C,E]=tempscommun(L, SuiveurObserve);

S=SuiveurObserve(E(2,1):E(2,2), :);

deltat=0.1;

for i=2:length(S)
    if S(i,19)==0
        vitesse=0;
    else
        vitesse=max(0, vmax*(1-Smin/S(i,19)));
    end
    S(i,6)=S(i-1,6)+vitesse*deltat/3.6;
end

```

2) Au niveau macroscopique :

```
function DensiteSimulee=SchemaGodunov(S)

deltat=1;
deltax=50;

DensiteObservee=SchemaMacro(S,deltat);
DebitObserve=Debit(DensiteObservee,deltat);

[n,m]=size(DensiteObservee);
DensiteSimulee=zeros(n,m);
DensiteSimulee(1,:)=DensiteObservee(1,:);

for i=2:(n-1)
    for j=2:m
        [Offre1,Demande1]=OffreDemande(DensiteSimulee(i-
1,j),DensiteSimulee(i,j),DebitObserve(i-
1,j),DebitObserve(i,j),deltax);

[Offre2,Demande2]=OffreDemande(DensiteSimulee(i,j),DensiteSimulee(i+1,
j),DebitObserve(i,j),DebitObserve(i+1,j),deltax);
        fluxentrant=min(Demande1,Offre1);
        fluxsortant=min(Demande2,Offre2);
        DensiteSimulee(i,j)=DensiteSimulee(i,j-1)-
deltat/deltax.*(fluxsortant-fluxentrant);
    end
end

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

M4=980;
M6=520;
D=DensiteSimulee;

figure

image('xdata',[0 M4],'ydata',[0 M6],'cdata',D);

j=max(max(D(:,:)));
colormap(jet(j+1));
c=colorbar;
set(c,'ytick',1:max(j)+1,'yticklabel',num2str((0:max(j)).'))
axis equal
set(gca,'xlim',[0 M4],'ylim',[0
M6],'xtick',0:30:M4,'ytick',0:50:M6,'xgrid','on','ygrid','on','layer',
'top');
```

3) Détermination du temps de retard critique

```
function [m,M]=DelayTrajectory(vmax,v0,tau)
%fonction permettant de tracer la trajectoire d'un véhicule suivant
une loi de poursuite retardée (temps de retard tau), linéaire par
morceaux (nulle entre [0, dmin], linéaire croissante entre [dmin,
dmax] jusqu'à atteindre
%vmax pour une interdistance >= dmax
%pendant la période [-tau, 0] le véhicule roule à la vitesse maximale
%(vmax) puis va décélérer car il prend en compte son prédécesseur qui
%circule à la vitesse v0, pouvant être nulle (véhicule à l'arrêt)
%l'origine des temps est prise de telle sorte que l'interdistance soit
%égale à l'interdistance critique (dmax) pour laquelle la vitesse
devient inférieure à vmax

%paramètres de la loi de poursuite
dmin=5;
dmax=25;

%choix d'un pas de temps suffisamment faible
k=20;
deltat=tau/k;

%initialisation de la matrice contenant :
%en première colonne l'abscisse x que le véhicule occupe au cours du
temps
%en deuxième colonne, le vitesse du véhicule
%en troisième colonne, le temps
A=-dmax-k*vmax*deltat:deltat*vmax:-dmax;
B(1:(k+1),1)=vmax;
C=-tau:deltat:0;
M=[A' B C'];

%insertion d'un test logique pour savoir si le véhicule percute ou non
son
%prédécesseur ; le test est initialisé pour une situation sans
accident
m='OK';
for i=(k+2):floor(20/deltat)
    M(i,3)=M(i-1,3)+deltat;
    M(i,1)=M(i-1,1)+M(i-1,2)*deltat; %schéma explicite du 1er ordre
d'Euler
    M(i,2)=max(0,min(vmax,vmax*(v0*M(i,3)-M(i-k,1)-dmin)/(dmax-
dmin)));
    if M(i,1)>=v0*M(i,3)
        m='Accident';
    end
end
end
```

```

function T=TestDelayTrajectory2(taumin,taumax)
%fonction permettant de tester différentes valeurs de temps de retard
afin
%de déterminer le tau critique pour lequel on passe d'une situation
sans
%accident à une situation avec accident

%initialisation
pas=(taumax-taumin)/1000;

T=[];

figure
hold on
xlabel('Tau critique','FontSize',12)
ylabel('Lambda','FontSize',12)

%Variation de la vitesse maximale (pour couvrir différents réseaux
%possibles : urbain, interurbain, autoroutier)
for vmax=10:40

    %Variation de la vitesse du dernier véhicule du peloton précédant
    for v0=0:vmax

        %Variation du temps de réaction
        for i=taumax:-pas:taumin
            %Application de la fonction
            n=DelayTrajectory(vmax,v0,i);
            %Test : cas d'accident ou non ?
            if strcmp(n,'Accident')==1
                m=i;
            end
        end
        %Enregistrement de la valeur du temps de réaction critique
        M=T;
        %Normalisation du tau critique
        dmax=25;
        dmin=5;
        taucrit=m/(vmax/(dmax-dmin));
        lambda=log(1/m)/m;
        T=[M ; [taucrit lambda] ];
    end
end

%Tracé en 3D du temps critique afin de comparer pour tous les cas
%d'études (valeurs différentes de vmax et de vo)
plot(T(:,1),T(:,2));

```

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- Traffic flow theory: a state-of-the-art report*, Transportation Research Board, 1999, revised in 2001.
- K. AHMED, M. BEN-AKIVA, H. KOUTSOPOULOS, R. MISHALANI, *Models of freeway lane changing and gap acceptance behavior*. In: Lesort, J.B. (Ed.), 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory. Elsevier, New York, 1996.
- A. AW, A. KLAR, T. MATERNE and M. RASCLE, *Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader*, Siam J. Appl. Math. 63 (2002), pp. 258-278.
- A. AW and M. RASCLE, *Resurrection of "Second Order" Models of traffic flow*, Siam, J. Appl. Math. 60 (2000), pp. 916-938.
- M. BANDO et al, *Dynamical model of traffic congestion and numerical simulation*. Phys. Rev. E 51 (1995), pp. 10-35.
- G. BARLES, *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, vol. 17 of Mathématiques Applications (Berlin), Mathematics & Applications, Springer-Verlag, Paris, 1994.
- O. BIHAM, A.A. MIDDLETON et D. LEVINE, *Self-organization and a dynamical transition in traffic-flow models*, Physical Review A, vol. 46, issue 10, 1992, 13 pages.
- R. BILLOT et al., *A conditionally linearly stable second-order traffic model derived from a Vlasov kinetic description*, Comptes Rendus Mécanique 338, 2010, pp. 529–537.
- P. BONNEL, *Prévoir la demande de transport*, Presse des Ponts et Chaussées, Octobre 2004, 426 pages.
- E. BOURREL, *Modélisation dynamique de l'écoulement du trafic routier : du macroscopique au microscopique*, Mémoire de thèse, INSA Lyon, Décembre 2003, 261 pages.
- M. BRACKSTONE et M. McDONALD, *Car-following: A historical review*, Transportation Research F 2, 1999, pp. 181–196.
- A. CEDER et A. D. MAY, *Further evaluation of single and two regime traffic flow models*, Transportation Research Record, 567, 1976, pp. 1-30.
- R.E. CHANDLER, R. HERMAN, and E.W. MONTROLL, *Traffic Dynamics: Studies in Car-Following*. Operations Research, 1958, pp. 165-184.

- A. CIUFFO and V. PUNZO, *Verification of Traffic Micro-simulation Model Calibration Procedures: Analysis of Goodness-of-Fit Measures*, in proceedings of the 89th TRB Annual Meeting, Washington DC, 2010.
- G. M. COCLITE, M. GARAVELLO, B. PICCOLI, *Traffic Flow on a Road Network*, SIAM J, Math. Anal. 36 (no. 6), 2005, pp. 1862-1886.
- M. G. CRANDALL, H. ISHII, P-L LIONS, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 27, (1992), no. 1, pp. 1-67.
- M. CREMER et J. LUDWIG, *A fast simulation model for traffic flow on the basis of Boolean operations*, Math. Comp. Simul. 28, 1986, pp. 297-303
- C.F. DAGANZO, *The cell transmission model. Part 1: a simple dynamic representation of highway traffic*, California PATH Working paper, University of California, 1993, 55 pages.
- C.F. DAGANZO, *The cell transmission model. Part 2: network traffic*, California PATH Working paper, University of California, 1993, 22 pages.
- C.F. DAGANZO, *Requiem for second-order fluid approximation of traffic flow*, Transportation Research B29, 1995, pp. 277-286.
- G. DUNCAN, *PARAMICS Technical Report: Car-Following, Lane-Changing and Junction Modelling*, Edinburgh, Quadstone, 1997, 11 pages.
- L. C. EDIE, *Car following and steady state theory for non-congested traffic*, Operations Research, volume n°9, 1960, pp. 66-76.
- T.W. FORBES, H.J. ZAGORSKI, E.L. HOLSHOUSER et W.A. DETERLINE, *Measurement of driver reactions to tunnel conditions measurement of driver*, in Highway Research Board, Proceedings, volume n°37, pp. 345-357, 1958
- N. FORCADEL, C. IMBERT, R. MONNEAU, *Homogenization of the dislocation dynamics and of some particle systems with two-body interactions*, à paraître dans Discrete and Continuous Dynamical Systems A.
- N. FORCADEL, C. IMBERT, R. MONNEAU, *Homogenization of accelerated Frenkel-Kontorova models with n types of particles*, tech. rep., CERMICS, ENPC, Université Paris-Est, 2011; and HAL:[hal-00387818-version 3] (06/06/2011).
- J.-F. GABARD, *Car-Following Models*, «Concise Encyclopedia of Traffic and Transportation Systems», M. Papageorgiou (Ed. Pergamon Press), Oxford, 1991

D.C. GAZIS, R. HERMAN, R.W. ROTHERY, *Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow*, Operations Research, volume 9, n°4, juillet-août 1961, pp. 545-567

D.L. GERLOUGH et M.J. HUBER, *Monograph on traffic flow theory*, Transportation Research Board, Special report n°165, 1975

P.G. GIPPS, *A behavioural car-following model for computer simulation*, Transportation Research Board Part B, volume 15, avril 1981, pp. 105-111

S. GODUNOV, *A difference scheme for numerical computation of discontinuous solutions of equations of fluid dynamics*, Math. Sb. 47 (89), 1959, pp. 271-306.

H. GREENBERG, *An analysis of traffic flow*, Operations Research, 1959, pp. 779-785.

B.D. GREENSHIELDS, *A study of highway capacity*, Proceedings Highway Research Record, Washington, volume 14, 1935, pp. 448-477.

D. HELBING, *Traffic and self-driven many-particle systems*, *Reviews of Modern Physics*, volume n°73, 7 décembre 2001, pp. 1067-1141.

W. HELLY, *Simulation of Bottlenecks in Single-lane Traffic Flow*, (Herman R.C. Ed.), Proc. Symp. Theory of Traffic Flow, Elsevier, Amsterdam, 1961, pp. 207-238.

M.P. HEYES et R. ASHWORTH, *Further research on car following models*, Transportation Research, 6, 1972, pp. 287-291.

P. HIDAS, *Modeling lane changing and merging in microscopic traffic simulation*, Transportation Research Part C 10 (5-6), 2002, pp. 351– 371.

S.P. HOOGENDOORN et P.H.L. BOVY, *State-of-the-art of Vehicular Traffic flow Modeling*, special issue on Road Traffic Modeling and Control of the Journal of Systems and Control Engineering, 2001, 75 pages

R. JIANG, Q-S. WU et Z-J. ZHU, *A new continuum model for traffic flow and numerical tests*, Transportation Research Part B: Methodological, Volume 36, Issue 5, Juin 2002, pp. 405-419.

E. KOMETANI et T. SASAKI, *A safety index for traffic with linear spacing*, Operations Research, volume 7, n° 6, novembre-décembre 1959, pp. 704-720

S. KERNER, *Experimental features of self-organization in traffic flow*, Phys. Rev. Lett. 81, 1998, pp. 3797-3800.

- S. KRAUSS, *Microscopic modeling of traffic flow: investigation of collision free vehicle dynamics*, University of Cologne, Germany, 1997, 129 pages
- N. FARHI, *Modélisation MinPlus et commande du trafic de villes régulières*, thèse INRIA, 2008, 176 pages.
- C. LATTANZIO, P. MARCATI, *The zero relaxation limit for the hydrodynamic Whitham traffic flow model*, J. Differential Equations 141 (1997), no. 1, pp. 150-178.
- J.A. LAVAL et L. LECLERCQ, *Microscopic modeling of the relaxation phenomenon using a macroscopic lane-changing model*, Transportation Research Part B 42, 2008, pp. 511–522
- J.A. LAVAL et C.F. DAGANZO, *Lane-changing in traffic streams*. Transportation Research, Part B 40 (3), 2006, pp. 251–264.
- J. P. LEBACQUE, *The Godunov Scheme and what it means for First Order Traffic Flow Models*, in: J.B. Lesort, *Transportation and Traffic Theory: Proceedings of the 13th International Symposium on Transportation and Traffic Theory*, Pergamon-Elsevier, 1996.
- L. LECLERCQ, *Modélisation dynamique du trafic et applications à l'estimation du bruit routier*, Mémoire de thèse, LICIT, Octobre 2002, 310 pages.
- L. LECLERCQ, S. MOUTARI, *Hybridization of a class of "second order" models of traffic flow*, Simulation Modelling Practice and Theory 15, 2007, pp. 918–934
- W. LEUTZBACH et R. WIEDEMANN, *Development and applications of traffic simulation models at the Karlsruhe Institut für Verkehrswesen*, Traffic Engineering and Control, Mai 1986, pp. 270-278.
- M. J. LIGHTHILL and G. B. WITHAM, *On kinetic waves. II. Theory of Traffic Flows on Long Crowded Roads*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A, 229 (1955), pp. 317-345.
- L. MAGNE, S. RABUT, J.-F. GABARD, *Towards an hybrid macro-micro traffic flow simulation model*, Informs Meeting, Salt Lake City, 7-10 mai 2000
- S. MAMMAR, *Développement d'un modèle de simulation macro-microscopique de trafic*, Mémoire de thèse, INRETS – PHOENIX ISI, Décembre 2006, 206 pages.
- A.D. MAY, *Traffic Flow Fundamentals*, Prentice-Hall, 1990
- A.D. MAY et H.E.M. KELLER, *Non integer car following models*, Highway Research Record, 199, 1967, pp. 19-32.

T. MONAMY, H. HAJ-SALEM et J.P. LEBACQUE, *Experimental analysis of trajectories for the modeling of capacity drop*, Procedia – Social and behavioural sciences, Submitted, 2010, 11 pages.

K. NAGEL et M. SCHRECKENBERG, *A cellular automaton model for freeway traffic*, J. Phys. I France 2, 1992, pp. 2221-2229.

P. NELSON, *Kinetic theories*, AHB45 Committee on Traffic Flow Theory & Characteristics, Transportation Research Board, chap 11, 2008, 12 pages.

G.F. NEWELL, *Nonlinear effects in the dynamics of car-following*, Operations Research n°9, 1961, pp. 209-229

G.F. NEWELL, *A simplified car-following theory: a lower order model*, Transportation Research Part B, 36, 2002, pp. 195-205

G. OROSZ, B. KRAUSKOPF, R.E. WILSON, *Bifurcations and multiple traffic jams in a car-following model and with reaction-time delay*, Physica D 211 (2005), pp. 277-293.

G. OROSZ and G. STEPAN, *Subcritical Hopf bifurcations in a car-following model with reaction-time delay*, Proc. R. Soc. A 462 (2006), pp. 2643-2670.

H.J. PAYNE, *Models of freeway traffic and control*, Math. Models Publ. Sys. 28, Simul. Council Proc., 1971, pp. 51–61.

L.A. PIPES, *An operational analysis of traffic dynamics*, Journal of Applied Physics, volume n°24, mars 1953, pp. 274-281.

I. PRIGOGINE, *A Boltzmann-like approach to the statistical theory of traffic flow*, Theory of traffic flow, Elsevier, Amsterdam, 1961, pp. 158–164.

I. PRIGOGINE and R. HERMAN, *Kinetic theory of vehicular traffic*, American Elsevier Publishing Co., New York, 1971.

P. I. RICHARDS, *Shock Waves on the Highway*. Oper. Res., 4 (1956), pp. 42-51.

M. TREIBER, A. HENNECKE et D. HELBING, *Congested traffic states in empirical observations and microscopic simulations*, Physical Review E 62, (2000), pp. 1805–1824.

R. WIEDEMANN, *Simulation des Verkehrsflusses*, Schriftenreihe des Instituts für Verkehrswesen, Helft, Universität Karlsruhe, 1974

R. WIEDEMANN et U. REITER, *Microscopic traffic simulation: the simulation system MISSION, background and actual state*. Project ICARUS (V1052), Final Report. Brussels, CEC. 2: Appendix A. 1992.

H.M. ZHANG, *A non-equilibrium traffic model devoid of gas like behavior*, Transportation Research Part B, 36, n°3, 2002, pp. 275–290.



abertis

Avinguda del Parc Logístic, 12-20
08040 Barcelona
Tel: +34 93 230 50 00
www.abertis.com

*Modélisation du trafic routier : passage
du microscopique au macroscopique*

Auteur : **Guillaume Costeseque**

Maître de Master : **M. Lebacque, Jean-Patrick
M. Monneau, Régis**

Paris, Septembre 2011