Projet BOUM : Méthodes d'homogénéisation mathématique pour les modèles de trafic routier

par Guillaume Costeseque[*], Jérémy Firozaly[†], Wilfredo Salazar[‡]et Mamdouh Zaydan[‡]

La modélisation mathématique du trafic routier connaît un regain d'intérêt depuis quelques années, grâce notamment à l'application de la théorie des équations d'Hamilton-Jacobi et de leurs solutions dites *solutions de viscosité*. Devant le développement et le déploiement attendu des véhicules automatisés / autonomes, il devient intéressant d'évaluer le potentiel de ces véhicules en termes de gestion du trafic routier.

Pour cela, les travaux existants se sont limités à l'usage de modèles microscopiques, caractérisant le comportement de conduite d'usagers en "poursuite". Nous nous proposons de regarder ce problème sous l' *angle micro-macro*, le trafic étant représenté au niveau macroscopique par des variables hydrodynamiques agrégées. Ce problème peut être reformulé comme un problème d'homogénéisation des équations d'Hamilton-Jacobi comme cela a déjà été démontré par divers travaux des membres de notre groupe.

Grâce à l'appui de la bourse BOUM délivrée par la SMAI, notre projet a rassemblé le 28 septembre 2016 à l'Institut Henri Poincaré (Paris), un groupe de huit jeunes chercheur(se)s provenant de l'INSA Rouen, de l'Ecole des Ponts ParisTech, de l'ENS Ulm et d'Inria Sophia-Antipolis mais également du Forschungszentrum Jülich en Allemagne. Cette journée d'échanges a été l'occasion d'aborder certains des problèmes encore ouverts (homogénéisation de modèles d'ordre supérieur, introduction d'un temps de réaction, etc.).

Le premier exposé a été donné par Wilfredo Salazar (INSA Rouen) et portait sur l'ensemble de ses travaux de thèse autour du passage de modèles microscopiques à des modèles macroscopiques pour le trafic routier. L'idée d'un tel passage se fait par une technique dite d'*homogénéisation* : cela consiste à injecter un système d'Equations aux Différences Ordinaires (EDO) dans une Equation aux Derivées Partielles (EDP) et faire un changement d'échelle, en temps et en espace. Wilfredo a notamment présenter ses travaux autour de :

- L'homogénéisation pour un modèle microscopique de second ordre [4] ayant la forme suivante
$$\ddot{x}_j(t) = a_j \left[V_j \left(x_{j+1}(t) - x_j(t)\right) - \dot{x}_j(t)\right]$$
où x_j définit la position du véhicule (j), $a_j \in \mathbb{R}$ est une constante définissant la sensibilité du conducteur (j) et $V_j : p \mapsto V_j(p)$ désigne une fonction reliant une interdistance à une vitesse. Wilfredo introduit alors un changement de variable pour se ramener à un système d'EDO du premier ordre et il prouve la convergence de cette variable auxiliaire vers la solution de l'EDP suivante
$$\partial_t u_0 = \bar{F}\left(\partial_n u_0\right)$$
qui est la version Hamilton-Jacobi du modèle de trafic macroscopique LWR [10, 11] en Lagrangien. L'Hamiltonien effectif $\bar{F}$ peut être estimé numériquement.

[1]Inria Sophia Antipolis - Méditerranée, Université Côte d'Azur, Inria, CNRS, LJAD.
[2]Centre d'Enseignement et de Recherche en Mathématiques et Calcul Scientifique (CERMICS), Ecole des Ponts ParisTech & Laboratoire d'Analyse et de Mathématiques Appliquées (LAMA), Université Paris-Est Créteil.
[3]Laboratoire de Mathématiques de l'INSA Rouen (LMI), INSA Rouen.

- La modélisation d'une perturbation locale [5] interagissant sur un modèle microscopique de premier ordre
$$\dot{x}_j(t) = V\left(x_{j+1}(t) - x_j(t)\right).\Phi(x_j(t))$$
avec $\Phi(y) = \mathbb{1}_{\{|y|\geq r\}}$ où r désigne le rayon d'influence de la perturbation (positionnée par hypothèse en $x = 0$). Par passage à la limite, on attend que la perturbation locale tende vers un point avec une condition de jonction comme donné par Imbert et Monneau [9] avec un limiteur de flux $\bar{A}$. Wilfredo a également présenté une estimation numérique du limiteur de flux $\bar{A}$ par discrétisation de l'opérateur non-local. Ces résultats peuvent être étendus dans le cas d'un modèle microscopique de second ordre localement perturbé [7].

- La modélisation d'une bifurcation simple avec un modèle microscopique de premier ordre [6]. Wilfredo nous présente des simulations numériques dans le cas d'une répartition simple des véhicules en sortie de divergent (un véhicule sur deux part sur la voie de droite par exemple).

Antoine Tordeux (Forschungszentrum Jülich, Allemagne) nous a ensuite parlé de son travail intitulé "From a car-following model with reaction time to a macroscopic convection-diffusion traffic flow model". Ce travail a été effectué en collaboration avec Michael Herty (RWTH Aachen, Allemagne) et Armin Seyfried (Forschungszentrum Jülich, Allemagne). Antoine considère un modèle microscopique du premier ordre $\dot{x}_i(t+\tau) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t))$ avec τ un temps de réaction/anticipation. Par approximation avec un développement de Taylor, il obtient un nouveau modèle du premier ordre, sans temps de retard mais avec une dépendance selon les deux plus proches leaders, que l'on peut trouver dans la littérature sous le nom de modèle multi-anticipatif. Ce modèle respecte un principe de comparaison (dans le sens où il ne génère pas de collisions entre véhicules) si $F(\cdot) \geq 0$ et $F(s) = 0$ pour tout $s \leq l$ où l est l'interdistance minimale (correspondant à l'inverse de la densité maximale de véhicules). En s'appuyant sur la même méthode de passage micro-macro que ce qui a été réalisé dans [1], il est alors possible de montrer que ce nouveau modèle converge vers la solution d'un modèle macroscopique de convection-diffusion [12]
$$\partial_t \rho + \partial_x\left(\rho V(\rho)\right) = -\tau \partial_x\left((\rho V'(\rho))^2 \partial_x \rho\right)$$
où $V : \rho \mapsto F(1/\rho)$. Antoine nous a ensuite présenté différents schémas numériques aux volumes finis (qui se différencient par la façon dont sont calculés les flux numériques) pour résoudre le modèle macroscopique et il nous a détaillé les propriétés de stabilité des solutions numériques stationnaires obtenues pour chacun de ces schémas selon la valeur du temps de réaction/anticipation τ et des pas de discrétisations spatio-temporelles. Antoine nous a également montré des simulations numériques superposant solution numérique du modèle microscopique et solution numérique du modèle macroscopique avec diffusion.

L'exposé suivant portait sur l'homogénéisation d'un modèle microscopique en une dimension d'espace, avec un terme de retard. L'exposé a été donné par Jérémy Firozaly (Ecole des Ponts ParisTech) et il s'agit d'un travail en collaboration avec Régis Monneau (Ecole des Ponts ParisTech). Son travail [2] porte sur le passage micro-macro pour une loi de poursuite de premier ordre du type $\dot{x}_i(t+\tau) = F(x_{i+1}(t) - x_i(t))$. En introduisant l'Ansatz $u^\varepsilon(t,n) := \varepsilon x_{\lfloor \frac{n}{\varepsilon} \rfloor}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$ qui satisfait une EDP particulière, puis en faisant tendre ε vers zéro, il est possible de montrer que u^ε tend vers l'unique solution de viscosité u^0 de l'équation d'Hamilton-Jacobi suivante
$$\partial_t u^0 = F\left(\partial_n u^0\right)$$

lorsque τ est suffisamment petit. La borne supérieure sur τ dépend de la constante de Lipschitz de la fonction de vitesse F. Comme nous l'avons vu précédemment, l'équation d'Hamilton-Jacobi ci-dessus correspond à une reformulation du modèle de trafic macroscopique LWR [10, 11] en Lagrangien. L'une des difficultés dans le cas d'un modèle avec temps de retard $\tau > 0$, est le "contrôle" de l'évolution du système aux temps initiaux. Cela entraîne donc certaines hypothèses sur les conditions initiales sur un intervalle suffisamment grand (et pas uniquement à $t = 0$). La preuve de convergence s'appuie sur un principe de comparaison strict pour l'EDP vérifié par u^ε qui nous a été détaillé par Jérémy.

Enfin, Mamdouh Zaydan (INSA Rouen) est revenu plus en détail sur les preuves techniques de l'homogénéisation d'un modèle microscopique de second ordre avec une perturbation locale [7] qui avait été évoquée plus tôt dans la journée par Wilfredo Salazar. Le modèle microscopique se lit comme suit

$$\ddot{x}_j(t) = a\left[V\left(x_{j+1}(t) - x_j(t)\right)\right].\Phi(x_{j+1}(t) - x_j(t))$$

où la sensibilité a et la fonction vitesse $V : p \mapsto V(p)$ sont supposées être identiques pour l'ensemble des conducteurs. Loin de la perturbation, les correcteurs ont une forme relativement classique (voir par exemple [3]) tandis qu'à la jonction, la construction du correcteur est moins évidente et repose notamment sur l'idée de la "cellule tronquée" par Achdou et Tchou, reprise par Galise, Imbert et Monneau [8]. Mamdouh travaille actuellement à la généralisation de ces résultats à des problèmes avec une perturbation dépendant de x (ce qui est déjà le cas) mais aussi du temps t. Cela implique de maîtriser les oscillations en temps mais cela peut permettre de modéliser un feu de trafic par exemple.

L'ensemble des membres de ce projet tient à remercier chaleureusement la SMAI pour son soutien qui a permis la structuration d'un groupe de jeunes chercheurs ainsi que l'élaboration de futures collaborations que nous espérons fructueuses.

References

[1] A. Aw, Axel Klar, Michel Rascle, and Thorsten Materne, *Derivation of continuum traffic flow models from microscopic follow-the-leader models*, SIAM Journal on Applied Mathematics 63(1), 259-278, 2002.

[2] Jérémy Firozaly, *Homogenization of a 1D pursuit law with delay*, arXiv preprint arXiv:1601.02507, 2016.

[3] Nicolas Forcadel, Cyril Imbert, and Régis Monneau, *Homogenization of some particle systems with two-body interactions and of the dislocation dynamics*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series A 23.3, 2009.

[4] Nicolas Forcadel, and Wilfredo Salazar, *Homogenization of second order discrete model and application to traffic flow*, Differential and Integral Equations 28, 1039-1068, 2015.

[5] Nicolas Forcadel, and Wilfredo Salazar, *A junction condition by specified homogenization of a discrete model with a local perturbation and application to traffic flow*, 2016.

[6] Nicolas Forcadel, and Wilfredo Salazar, *Homogenization of a discrete model for a bifurcation and application to traffic flow*, 2016.

[7] Nicolas Forcadel, Wilfredo Salazar, and Mamdouh Zaydan, *Homogenization of second order discrete model with local perturbation and application to traffic flow*, 2016.

[8] Giulio Galise, Cyril Imbert, and Régis Monneau, *A junction condition by specified homogenization and application to traffic lights*, Analysis & PDE 8.8, 1891-1929, 2015.

[9] Cyril Imbert, Régis Monneau, *Flux-limited solutions for quasi-convex Hamilton-Jacobi equations on networks*, arXiv preprint arXiv:1306.2428, 2013.

[10] Michael J. Lighthill, Gerald Beresford Whitham, *On kinematic waves. II. A theory of traffic flow on long crowded roads*, Proceedings of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 229.1178, 317-345 1955.

[11] Paul I. Richards, *Shock waves on the highway*, Operations research 4.1, 42-51, 1956.

[12] Antoine Tordeux, Guillaume Costeseque, Michael Herty, and Armin Seyfried, *From traffic and pedestrian follow-the-leader models with reaction time to first order convection-diffusion flow models*, arXiv preprint arXiv:1612.04050, 2016.