

4. ESTIMATION PAR INTERVALLE

4.1. **Des notes !** On suppose que les notes des étudiants suivent une loi normale. On tire un échantillon aléatoire de 80 notes. Les observations figurent dans le tableau ci-dessous :

Note x_i	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Nombre de notes n_i	1	1	2	4	8	8	10	12	10	6	8	7	3

- (1) Au vu de ces réalisations, calculer la moyenne et l'écart-type de l'échantillon.
- (2) Estimer les intervalles de confiance à 95% et à 99% pour la moyenne de la population si la variance est connue et vaut $\sigma^2 = 5$.
- (3) Estimer l'intervalle de confiance à 95% si la variance doit être aussi estimée à partir de l'échantillon.
- (4) Si les mêmes valeurs pour la moyenne et l'écart-type avaient été déterminés à partir d'un échantillon de 400 notes, quel serait alors l'intervalle de confiance ?

4.2. **Où est passé mon ordinateur ?** On cherche à estimer le pourcentage p de personnes qui possèdent un ordinateur dans une certaine population. On tire un échantillon aléatoire de 400 personnes différentes et on constate que 40 d'entre elles possèdent un ordinateur.

- (1) Donner un intervalle de confiance à 95% du pourcentage p de personnes qui ont un ordinateur.

4.3. **On échange.** On teste un médicament. L'efficacité du traitement est quantifiée sur une échelle entre 0 et 5. Les quatre patients traités avec le médicament obtiennent les valeurs $\{5, 4, 0, 1\}$.

- (1) Utilisez le tableau 1, obtenu avec la méthode du bootstrap, pour donner un interval de confiance à 60% pour l'efficacité du médicament.

5	4	1	0
0	0	4	1
1	5	4	5
1	4	5	0
5	0	4	1
0	5	4	0
1	4	0	4
1	1	5	1
5	4	5	0
1	0	4	5

TABLE 1. Bootstrap

4.4. Réglage d'une machine. Une machine produit des tiges métalliques dont la longueur nominale est égale à 8,30 cm. On suppose que la longueur des pièces produites suit une loi normale avec écart-type de 0,6 cm. Sur la base d'un échantillon aléatoire de taille $n = 100$, on veut tester si la machine est bien réglée ou si une opération de maintenance a accidentellement changé la longueur à 8,5 cm. La moyenne des longueurs mesurées sur l'échantillon est de 8,4 cm.

- (1) Conclure pour un risque de première espèce α de 5% et 1%.
- (2) Quel est risque de deuxième espèce correspondant ?
- (3) Quelle serait la conclusion avec un échantillon de taille $n = 20$?

4.5. Vérifier la définition d'intervalle de confiance [R]. La méthode de construction d'un intervalle avec confiance $1 - \alpha$ garantit que si on a m échantillons en moyenne $m(1 - \alpha)$ d'entre eux contiennent l'espérance de la variable aléatoire. On vérifie ce résultat.

- (1) Générer $m = 10000$ échantillons chacun de taille $n = 10$ d'une variable aléatoire normale avec espérance $\mu = 5$ et variance $\sigma^2 = 4$.
- (2) Calculer la moyenne empirique de chaque échantillon.
- (3) Calculer le rayon des intervalles de confiance au 95% ?
- (4) Compter dans combien de cas l'espérance appartient aux intervalles de confiance.

Suggestions: utiliser les fonctions R *rnorm*, *matrix* et *rowMeans*.

4.6. Radio Campus. Radio-Campus est une des radios libres qui émet sur Nice-Sophia-Antipolis. Les responsables de la radio souhaitent en connaître l'audience auprès des étudiants de l'Université. Une enquête est effectuée dans l'U.F.R. Sciences. Les responsables de la radio désireraient connaître avec une précision (relative) de l'ordre de 15% (pour un coefficient de confiance de 95%) la proportion p d'étudiants qui écoutent régulièrement Radio-Campus au moins 3 fois par semaine. Un premier échantillon aléatoire de 50 étudiants donne une première estimation de p qui est de 44%.

- (1) Quelle doit être la taille de l'échantillon complémentaire (taille arrondie à la dizaine supérieure) qu'il convient de prélever dans la population étudiante de l'U.F.R. Sciences.
- (2) Donner un intervalle de confiance à 95% du nombre d'étudiants de l'U.F.R. Sciences qui écoutent régulièrement Radio-Campus, si dans l'échantillon définitif (c'est à dire incluant le premier échantillon de 50 personnes), on observe une fréquence de 46% d'étudiants écoutant régulièrement Radio-Campus.
- (3) Une enquête du temps d'écoute est réalisée sur 60 étudiants-auditeurs sondés. On leur remet une fiche sur laquelle il leur est demandé chaque matin d'indiquer approximativement leur temps d'écoute de Radio-Campus la veille, et ce pendant une semaine. Les résultats observés conduisent sur cet échantillon à une moyenne d'écoute hebdomadaire de 350 minutes et à un écart-type de 125 minutes. Donner un intervalle de confiance à 90% du temps d'écoute hebdomadaire de Radio-Campus par les étudiants de l'U.F.R. Sciences.