

三角域上的调和 B-B 曲面

徐 岗 汪国昭

(浙江大学数学系 杭州 310027)

摘 要 利用方向导数研究了三角域上的调和 B-B 曲面的性质,给出了三角域上的 B-B 曲面为调和曲面的充要条件,并且证明了任何一个三角域上的调和 B-B 曲面的控制网格均由它的第 1 层和第 2 层控制顶点完全决定.最后对极小曲面在建筑设计中的应用进行了初步探讨.

关键词 极小曲面;调和曲面;三角域上的调和 B-B 曲面;控制网格;建筑设计
中图法分类号 TP391

Harmonic B-B Surfaces over the Triangular Domain

XU Gang WANG Guo-Zhao

(Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract The minimal surfaces have been extensively employed in many areas. However, the complexity of the minimal surface equation prevents people from modeling minimal surface in CAD. In some special cases, the harmonic surface can be considered as an approximation to the minimal surface. In this paper, the properties of the harmonic B-B surface over the triangular domain are discussed. A sufficient and necessary condition of a B-B surface over the triangular domain being a harmonic surface is obtained. It is proved that the control net of an arbitrary harmonic B-B surface over the triangular domain is fully determined by the first and second layers of control points. This paper also presents some applications of the minimal surface in architectural design.

Keywords minimal surface; harmonic surface; harmonic B-B surface over the triangular domain; control net; architectural design

1 引 言

极小曲面被广泛应用于建筑、航空、造船、材料科学、晶体学等领域,因此将极小曲面引入 CAGD 有着积极的意义.文献[1,2]对 Enneper 极小曲面在 CAGD 中的应用进行了研究.文献[3,4]运用有限元方法进行极小曲面造型.文献[5]证明了 Enneper 曲面是唯一的一类三次参数多项式极小曲面,并且给出了用四次参数多项式曲面表示极小曲面的一个充分条件.基于 Dirichlet 能量函数最小化的方法,

文献[6,7]分别用矩形域上的张量积 Bézier 曲面和三角域上的 B-B 曲面来近似表示极小曲面.但是上面的方法都比较复杂,在实际应用中极不方便.实际上,如果一张参数曲面满足等温参数条件,那么它为极小曲面的充要条件是它为调和曲面.文献[8,9]考虑用调和曲面来近似表示极小曲面,给出了矩形域上的张量积 Bézier 曲面为调和曲面的充要条件,并且证明了该张量积曲面的控制网格由其相对的两条边界曲线的控制顶点完全决定,这就给实际设计带来了方便.

但在实际应用中,通常希望曲面边界在 xy 平

面上的投影是一条凸的闭曲线,所以在调和曲面设计中,通常需要对调和曲面进行裁剪以达到这样的要求.因此,将调和曲面表示成三角域上的 B-B 曲面会更加方便.

基于上述理由,本文研究三角域上的调和 B-B 曲面的性质,给出了三角域上的 B-B 曲面为调和曲面的充要条件,并且证明了任何一个三角域上的调和 B-B 曲面的控制网格均由它的第 1 层和第 2 层控制顶点完全决定.与文献[8,9]相比,本文需考虑定义域为非直角三角形的情况,但在推导充要条件的过程中无需进行升阶,因此得到的结果相对来说比较简单,证明过程中也无需将 Bernstein 基化为幂基,更加简洁易懂,而且其它层的控制顶点与最底部的两层控制顶点的表示关系可以直接通过迭代的方法求出,无需求解线性方程组.实际上,对三角域上的调和 B-B 曲面沿着参数方向进行延拓,便得到矩形域上的调和 Bézier 曲面.

2 三角域上的 B-B 曲面及其性质

设有 $(n+1)(n+2)/2$ 个点向量 $\mathbf{T}_{i,j,k} \in \mathfrak{R}^3, i, j, k \geq 0, i+j+k=n$, 则称

$$\mathbf{X}(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} B_{i,j,k}^n(u, v, w) \mathbf{T}_{i,j,k},$$

$$(u, v, w) \in T, u, v, w \geq 0, u+v+w=1 \quad (1)$$

为三角域 T 上的 n 次 Bernstein-Bézier 参数曲面,简称 B-B 曲面,这里

$$B_{i,j,k}^n(u, v, w) = \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k$$

称为 n 次 Bernstein 基函数, $\mathbf{T}_{i,j,k}$ 称为曲面(1)的控制顶点.为了下文表述的方便,将 $(n-k+2)$ 个控制顶点 $\{\mathbf{T}_{i,j,k-1}\}_{i+j=n-k+1}$ 记为该曲面的第 k 层控制顶点.

由基函数 $B_{i,j,k}^n(u, v, w)$ 的性质,可得到下列求导公式(证明见文献[10,11]):

$$\frac{\partial \mathbf{X}(u, v, w)}{\partial u} = n \sum_{i+j+k=n-1} B_{i,j,k}^{n-1}(u, v, w) (\mathbf{T}_{i+1,j,k} - \mathbf{T}_{i,j,k+1}) \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}(u, v, w)}{\partial v} = n \sum_{i+j+k=n-1} B_{i,j,k}^{n-1}(u, v, w) (\mathbf{T}_{i,j+1,k} - \mathbf{T}_{i,j,k+1}) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{X}(u, v, w)}{\partial w} = n \sum_{i+j+k=n-1} B_{i,j,k}^{n-1}(u, v, w) (\mathbf{T}_{i,j,k+1} - \mathbf{T}_{i+1,j,k}) \quad (4)$$

3 三角域上的调和 B-B 曲面

由于调和函数经过正交变换后仍然为调和函数,因此对于定义域为非直角三角形的情况(见图 1),需要对曲面函数在 u 方向和垂直于 u 轴的方向分别求二阶导数(见图 2),即算子 $\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right)$ 应变为

$$\Delta^\perp = \left[\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^\perp \right].$$

实际上,我们有下列引理.

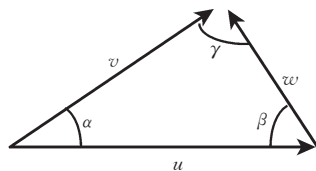


图 1 定义域 T

引理 1. 三角域 T 上的 n 次 B-B 曲面 $\mathbf{X}(u, v, w)$ 为调和曲面,当且仅当

$$\mathbf{X}_{uu} \sin 2\gamma + 2\cos\alpha (\mathbf{X}_{vw} \sin\beta - \mathbf{X}_{wu} \sin\gamma) + \mathbf{X}_{vv} \sin 2\beta = 0 \quad (5)$$

其中 α, β, γ 如图 1 所示.

证明. 由图 2,利用方向导数,我们有

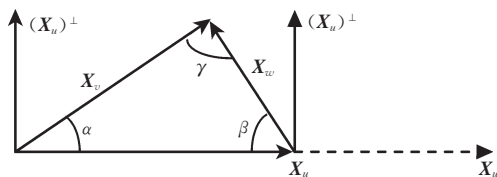


图 2 垂直于 u 轴的方向导数

$$\mathbf{X}_v = \mathbf{X}_u \cos\alpha + (\mathbf{X}_u)^\perp \sin\alpha \quad (6)$$

$$\mathbf{X}_w = \mathbf{X}_u \cos(\pi - \beta) + (\mathbf{X}_u)^\perp \sin(\pi - \beta) \quad (7)$$

即 $(\mathbf{X}_u)^\perp = \mathbf{X}_v \csc\alpha - \mathbf{X}_u \cot\alpha$, $(\mathbf{X}_u)^\perp = \mathbf{X}_w \csc\beta + \mathbf{X}_u \cot\beta$, 上面两式联立,利用积化和差公式及 $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$ 可以得到

$$\mathbf{X}_u = \frac{\mathbf{X}_v \sin\beta - \mathbf{X}_w \sin\alpha}{\sin\gamma}, \quad \mathbf{X}_v = \frac{\mathbf{X}_w \sin\alpha + \mathbf{X}_u \sin\gamma}{\sin\beta} \quad (8)$$

将 $(\mathbf{X}_u)^\perp$ 看作式(6)中的 \mathbf{X} , 由 $(\mathbf{X}_u)^\perp = \mathbf{X}_v \csc\alpha - \mathbf{X}_u \cot\alpha$ 便可以得到

$$(\mathbf{X}_{uu})^\perp = \mathbf{X}_{uu} \cot^2\alpha - 2\mathbf{X}_{uv} \cos\alpha \csc^2\alpha + \mathbf{X}_{vv} \csc^2\alpha,$$

故 $\mathbf{X}_{uu} + (\mathbf{X}_{uu})^\perp = 0 \Leftrightarrow \mathbf{X}_{uu} - 2\mathbf{X}_{uv} \cos\alpha + \mathbf{X}_{vv} = 0$, 也即

$$\mathbf{X}_{uu} - \mathbf{X}_{uv} \cos\alpha - \mathbf{X}_{vu} \cos\alpha + \mathbf{X}_{vv} = 0 \quad (9)$$

保持式(9)中的首尾两项不变,将式(8)代入其中间两项,并注意到 $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$ 以及 $\sin\beta = \sin(\alpha + \gamma)$, 便可以得到式(5). 证毕.

定理 1. 三角域上的 n 次 B-B 曲面 $\mathbf{X}(u, v, w)$ 为调和曲面, 当且仅当控制顶点满足

$$E\mathbf{T}_{i+2,j,k} + F\mathbf{T}_{i,j,k+2} + G\mathbf{T}_{i,j+2,k} + L\mathbf{T}_{i+1,j,k+1} + M\mathbf{T}_{i,j+1,k+1} + N\mathbf{T}_{i+1,j+1,k} = 0 \quad (10)$$

其中 $i, j, k \geq 0, i+j+k=n-2,$

$$\begin{aligned} E &= \sin \gamma (\cos \gamma + \cos \alpha), \\ F &= \frac{1}{2} (\sin 2\gamma + \sin 2\beta) + \cos \alpha (\sin \gamma - \sin \beta), \\ G &= \frac{1}{2} \sin 2\beta, \quad L = \cos \alpha (\sin \beta - 2\sin \gamma) - \sin 2\gamma, \\ M &= \sin \beta (\cos \alpha - 2\cos \beta), \quad N = -\cos \alpha \sin \beta \end{aligned} \quad (11)$$

证明. 由引理 1 及式(2)~(4)知,

$$\begin{aligned} \Delta^\perp \mathbf{X}(u, v, w) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} \sin 2\gamma + 2 \cos \alpha \sin \beta \frac{\partial^2}{\partial w \partial v} - \right. \\ &\quad \left. 2 \cos \alpha \sin \gamma \frac{\partial^2}{\partial w \partial u} + \frac{\partial^2}{\partial v^2} \sin 2\beta \right) \mathbf{X} \\ &= 2n(n-1) \sum_{i+j+k=n-2} B_{i,j,k}^{n-2}(u, v, w) \mathbf{G}_{i,j,k}^{n-2}, \end{aligned}$$

其中 $\mathbf{G}_{i,j,k}^{n-2} = E\mathbf{T}_{i+2,j,k} + F\mathbf{T}_{i,j,k+2} + G\mathbf{T}_{i,j+2,k} + L\mathbf{T}_{i+1,j,k+1} + M\mathbf{T}_{i,j+1,k+1} + N\mathbf{T}_{i+1,j+1,k}, E, F, G, L, M, N$ 如式(11)所示.

由 $B_{i,j,k}^{n-2}(u, v, w)$ 的线性无关性, 便得到

$$\Delta^\perp \mathbf{X}(u, v, w) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{G}_{i,j,k}^{n-2} = 0. \quad \text{证毕.}$$

上述定理给出了三角域上的 B-B 曲面为调和曲面的充要条件, 也就是说当且仅当控制网格 $\{\mathbf{T}_{i,j,k}\}$ 满足式(10)所列出的 $n(n-1)/2$ 个等式时, 其所对应的三角域上的 B-B 曲面 $\mathbf{X}(u, v, w)$ 为调和曲面. 实际上, 当 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ 时, 可以得到

$$\mathbf{T}_{i+2,j,k} + 2\mathbf{T}_{i,j,k+2} + \mathbf{T}_{i,j+2,k} - 2\mathbf{T}_{i+1,j,k+1} - 2\mathbf{T}_{i,j+1,k+1} = 0, \quad i+j+k=n-2 \quad (12)$$

特别地, 当 $n=2$ 时, 我们有以下推论.

推论 1. 三角域上的二次 B-B 曲面为调和曲面, 当且仅当

$$\mathbf{T}_{002} = -\frac{1}{F}(E\mathbf{T}_{200} + G\mathbf{T}_{020} + L\mathbf{T}_{101} + M\mathbf{T}_{011} + N\mathbf{T}_{110}).$$

用模板(即显示用某些控制顶点来生成其它控制顶点的图)可以表示如下:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{002} &= -\frac{1}{F} \times \begin{matrix} & \cdot & & & \\ & M & L & & \\ & G & N & E & \\ & & & & \cdot \end{matrix} \xrightarrow{\alpha = \frac{\pi}{2}} \\ \mathbf{T}_{002} &= \frac{1}{2} \times \begin{matrix} & & & & \\ & 2 & 2 & & \\ & -1 & 0 & -1 & \end{matrix} \end{aligned}$$

图 3 给出了两个二次调和 B-B 曲面的例子.

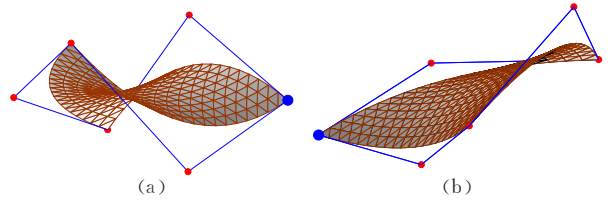


图 3 二次调和 B-B 曲面(其中较小的顶点为事先给定的控制顶点, 较大的顶点为根据调和条件求出的控制顶点, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 下同)

当 $n=3$ 时, 不妨令 $\alpha = \frac{\pi}{2}$, 则由式(12), 可以得到

下列推论.

推论 2. 直角三角域上的三次 B-B 曲面为调和曲面, 当且仅当

$$\begin{cases} \mathbf{T}_{102} = \frac{1}{2}(2\mathbf{T}_{111} + 2\mathbf{T}_{201} - \mathbf{T}_{300} - \mathbf{T}_{120}) \\ \mathbf{T}_{012} = \frac{1}{2}(2\mathbf{T}_{111} + 2\mathbf{T}_{021} - \mathbf{T}_{030} - \mathbf{T}_{210}) \\ \mathbf{T}_{003} = \frac{1}{2}(4\mathbf{T}_{111} + \mathbf{T}_{201} - \mathbf{T}_{300} - \mathbf{T}_{120} + \mathbf{T}_{021} - \mathbf{T}_{030} - \mathbf{T}_{210}) \end{cases} \quad (13)$$

注意到由式(13)给出的第 3 个等式可以得到

$$\mathbf{T}_{111} = \frac{1}{4}(2\mathbf{T}_{003} - \mathbf{T}_{021} + \mathbf{T}_{030} + \mathbf{T}_{120} - \mathbf{T}_{201} + \mathbf{T}_{210} + \mathbf{T}_{300}),$$

这正是文献[7]给出的三角域上的三次 B-B 曲面所满足的 Dirichlet 极值条件. 这也验证了如果一张曲面为调和曲面, 则它一定满足 Dirichlet 极值条件.

同样可以用模板来表示 $\mathbf{T}_{102}, \mathbf{T}_{012}$ 和 \mathbf{T}_{003} ,

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{102} &= \frac{1}{2} \times \begin{matrix} & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 0 & & 2 & 2 & \\ & & 0 & -1 & 0 & -1 \\ & & & & & \cdot \end{matrix} \\ \mathbf{T}_{012} &= \frac{1}{2} \times \begin{matrix} & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 2 & & 2 & 0 & \\ & & -1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & & & \cdot \end{matrix} \\ \mathbf{T}_{003} &= \frac{1}{2} \times \begin{matrix} & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & 1 & & 4 & 1 & \\ & & -1 & -1 & -1 & -1 \\ & & & & & \cdot \end{matrix} \end{aligned}$$

图 4 给出了三次调和 B-B 曲面的例子, 其中图 4(c) 为 Enneper 极小曲面及其 B-B 控制网格, 图 4(d) 为其侧视图, 其参数形式为

$$\mathbf{X}(u, v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + vu^2, u^2 - v^2 \right).$$

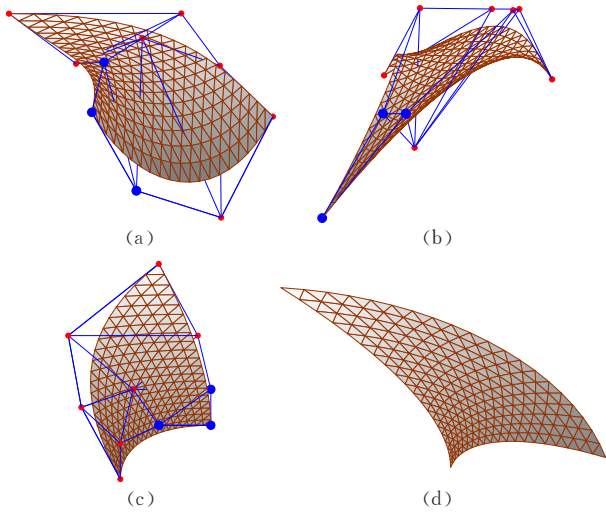


图 4 三次调和 B-B 曲面

由推论 1 和推论 2 可以发现,三角域上的低次调和 B-B 曲面的控制网格由它的第 1 层和第 2 层控制顶点完全决定.事实上,这一结论对于任意次的三角域上的调和 B-B 曲面都成立,下面我们给出它的证明.

定理 2. 三角域上的调和 B-B 曲面的控制网格由它的第一层和第二层控制顶点完全决定,即如果 $\mathbf{X}(u, v, w)$ 为三角域上的 n 次调和 B-B 曲面, $\{\mathbf{T}_{i,j,k}\}, i, j, k \geq 0, i+j+k=n$ 为它的控制网格,则第 1 层和第 2 层控制顶点 $\{\mathbf{T}_{ij0}\}_{i+j=n}$ 和 $\{\mathbf{T}_{ij1}\}_{i+j=n-1}$ 完全决定了该曲面其余的控制顶点.

证明. 由定理 1 知 $\mathbf{X}(u, v, w)$ 为调和曲面当且仅当

$$\left\{ \begin{array}{l} -\mathbf{F}\mathbf{T}_{0,0,n} = \mathbf{E}\mathbf{T}_{2,0,n-2} + \mathbf{G}\mathbf{T}_{0,2,n-2} + \mathbf{L}\mathbf{T}_{1,0,n-1} + \mathbf{M}\mathbf{T}_{0,1,n-1} + \mathbf{N}\mathbf{T}_{1,1,n-2}, \\ -\mathbf{F}\mathbf{T}_{1,0,n-1} = \mathbf{E}\mathbf{T}_{3,0,n-3} + \mathbf{G}\mathbf{T}_{1,2,n-3} + \mathbf{L}\mathbf{T}_{2,0,n-2} + \mathbf{M}\mathbf{T}_{1,1,n-2} + \mathbf{N}\mathbf{T}_{2,1,n-3}, \\ -\mathbf{F}\mathbf{T}_{0,1,n-1} = \mathbf{E}\mathbf{T}_{2,1,n-3} + \mathbf{G}\mathbf{T}_{0,3,n-3} + \mathbf{L}\mathbf{T}_{1,1,n-2} + \mathbf{M}\mathbf{T}_{0,2,n-2} + \mathbf{N}\mathbf{T}_{1,2,n-3}, \\ \dots\dots\dots \\ -\mathbf{F}\mathbf{T}_{0,n-3,3} = \mathbf{E}\mathbf{T}_{2,n-3,1} + \mathbf{G}\mathbf{T}_{0,n-1,1} + \mathbf{L}\mathbf{T}_{1,n-3,2} + \mathbf{M}\mathbf{T}_{0,n-2,2} + \mathbf{N}\mathbf{T}_{1,n-2,1}, \\ \dots\dots\dots \\ -\mathbf{F}\mathbf{T}_{n-3,0,3} = \mathbf{E}\mathbf{T}_{n-1,1,1} + \mathbf{G}\mathbf{T}_{n-3,2,1} + \mathbf{L}\mathbf{T}_{n-2,0,2} + \mathbf{M}\mathbf{T}_{n-3,1,2} + \mathbf{N}\mathbf{T}_{n-2,1,1}, \\ -\mathbf{F}\mathbf{T}_{0,n-2,2} = \mathbf{E}\mathbf{T}_{2,n-2,0} + \mathbf{G}\mathbf{T}_{0,n,0} + \mathbf{L}\mathbf{T}_{1,n-2,1} + \mathbf{M}\mathbf{T}_{0,n-1,1} + \mathbf{N}\mathbf{T}_{1,n-1,0}, \\ \dots\dots\dots \\ -\mathbf{F}\mathbf{T}_{n-2,0,2} = \mathbf{E}\mathbf{T}_{n,0,0} + \mathbf{G}\mathbf{T}_{n-2,2,0} + \mathbf{L}\mathbf{T}_{1,n-2,1} + \mathbf{M}\mathbf{T}_{n-1,0,1} + \mathbf{N}\mathbf{T}_{n-1,1,0}, \end{array} \right. \quad \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} 2 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{array} \right\} \begin{array}{l} n-2 \\ n-1 \end{array} \quad (14)$$

由上面的 $n(n-1)/2$ 个等式可知,第 $(n+1)$ 层的控制顶点由第 n 层和第 $(n-1)$ 层的控制顶点决定,第 n 层的控制顶点由第 $(n-1)$ 层和第 $(n-2)$ 层的控制顶点决定,依次类推,第 3 层的控制顶点由第 1 层和第 2 层的控制顶点决定.因此,该曲面控制网格的每一层控制顶点均由第 1 层和第 2 层的控制顶点决定.

证毕.

由式(14)可知,我们直接利用迭代的方法便可求出其它层的控制顶点与最底部的两层控制顶点的表示关系,无需求解线性方程组,这样便大大简化了求解过程.图 5 给出了四次调和 B-B 曲面的例子,其中图 5(c)为文献[5]给出的四次等温参数极小曲面及其 B-B 控制网格,图 5(d)为其侧视图,其参数形式为

$$\mathbf{X}(u, v) = \left\{ -u^4 + 6u^2v^2 - v^4 + 2uv, (1-4uv)(u^2 - v^2), \frac{4}{3}[u(u^2 - 3v^2) - v(v^2 - 3u^2)] \right\}.$$

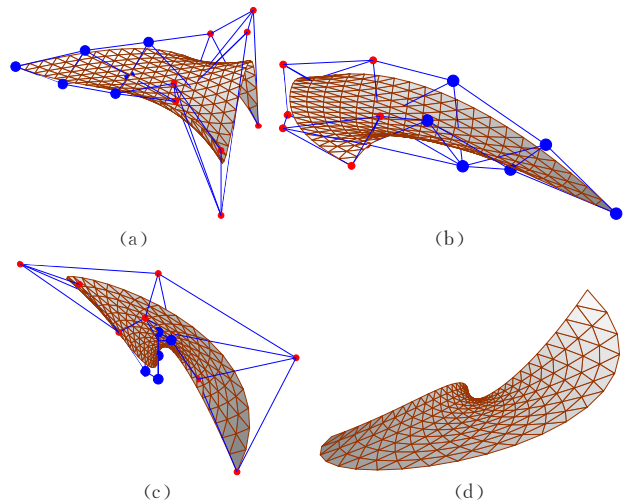


图 5 四次调和 B-B 曲面

4 实例分析与应用

本节将对本文中的曲面实例进行分析比较,研究它们的几何形状,并探讨它们在建筑设计中的一些应用.

由于调和曲面可近似看作极小曲面,而极小曲面又以平均曲率处处为零为基本特征,因此,本文主要分析调和 B-B 曲面的平均曲率性质.表 1 分别给出了图 3、图 4 及图 5 中的曲面平均曲率的大小,其中最大值与平均值分别表示该曲面上 20×20 个采样点处的平均曲率的最大值与平均值.由表 1 中的数据可以看出,对于这些曲面实例来说,它们在各采样点处的平均曲率与零已相差不大.特别地,由微分几何知识可知,调和 B-B 曲面均为负高斯曲率曲面.

表 1 实例曲面的平均曲率值

	平均曲率	
	最大值	平均值
图 3(a)	0.8146	0.3432
图 3(b)	0.6431	0.2769
图 4(a)	0.8037	0.2056
图 4(b)	0.5679	0.1905
图 4(c)	0.0	0.0
图 5(a)	0.6654	0.1679
图 5(b)	0.6892	0.2368
图 5(c)	0.0	0.0

利用计算机辅助几何设计技术来进行建筑形状设计已成为图形学领域一个新的研究热点^[12,13].空间膜结构是当今流行的建筑结构体系,现已大量用于滨海旅游、博览会、文艺、体育等大空间的公共建筑上.极小曲面具有非常完美的表面形状和应力状态,是膜结构最合理的理想初始状态.由于调和曲面可近似看作极小曲面,因此,我们可以利用本文方法来完成膜结构设计中“找形”阶段的工作.图 6 给出了利用本文方法设计的空间膜结构的例子.

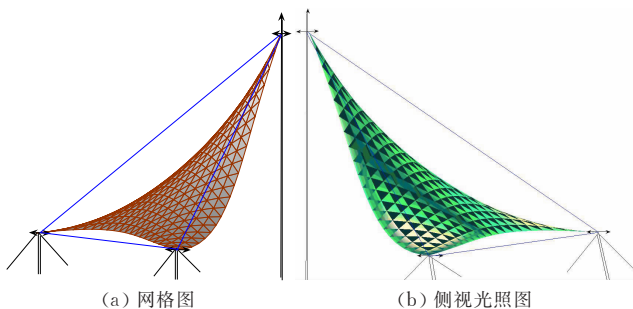


图 6 利用本文方法设计的膜结构

5 结论及将来工作

调和曲面与极小曲面有着密切的联系.在某些特定条件下,极小曲面可近似看作调和曲面.本文给出了三角域上的 B-B 曲面为调和曲面的充要条件,并且证明了任何一个三角域上的调和 B-B 曲面均由它的第 1 层和第 2 层控制顶点完全决定,这非常

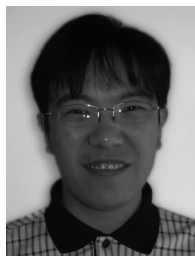
有利于 CAGD 中调和曲面特别是极小曲面的几何设计.

CAGD 中的极小曲面造型工作还有很多需要完善的地方.文献[9]给出了一类完全由边界曲线决定的矩形域上的张量积 Bézier 曲面,称为双调和 Bézier 曲面.相对于文献[6,7]中基于 Dirichlet 函数最小化的方法来说,这类曲面是对极小曲面的一种更好的近似.我们可以运用本文中类似的方法得出三角域上的 B-B 曲面为双调和曲面的充要条件,并且可以证明任何一个三角域上的双调和 B-B 曲面均由它的第 1 层、第 2 层、第 3 层和第 4 层控制顶点完全决定.另外,寻找高次等温参数多项式极小曲面并深入探讨极小曲面的应用,也将是我们下一步的研究方向.

参 考 文 献

- 1 Jin Wen-Biao. Modeling and application of some special surfaces[Ph. D. dissertation]. Department of Applied Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou, 1999(in Chinese)
(金文标.若干特殊曲面的造型和应用[博士学位论文].浙江大学,杭州,1999)
- 2 Jin Wen-Biao, Wang Guo-Zhao. Geometry design of a class of minimal surface with negative Gauss curvature. Chinese Journal of Computers, 1999, 23(12): 1277~1279(in Chinese)
(金文标,汪国昭.一类极小曲面的几何设计.计算机学报, 1999, 23(12): 1277~1279)
- 3 Man Jia-Ju, Wang Guo-Zhao. Modeling of minimal surface based on the finite element method. Chinese Journal of Computers, 2003, 26(4): 507~510(in Chinese)
(满家巨,汪国昭.基于有限元方法的极小曲面造型.计算机学报, 2003, 26(4): 507~510)
- 4 Man Jia-Ju, Wang Guo-Zhao. Approximating to nonparameterized minimal surface with B-spline surface. Journal of Software, 2003, 14(4): 824~829(in Chinese)
(满家巨,汪国昭. B-样条函数极小曲面造型.软件学报, 2003, 14(4): 824~829)
- 5 Man Jia-Ju, Wang Guo-Zhao. Polynomial minimal surface in Isothermal parameter. Chinese Journal of Computers, 2002, 25(2): 197~201(in Chinese)
(满家巨,汪国昭.等温参数多项式极小曲面.计算机学报, 2002, 25(2): 197~201)
- 6 Monderde J.. Bézier surfaces of minimal area: The Dirichlet approach. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(2): 117~136
- 7 Arnal A., Lluçh A., Monderde J.. Triangular Bezier surfaces of minimal area. In: Proceedings of the International Workshop on Computer Graphics and Geometric Modeling, Montreal, 2003, 366~375

- 8 Monterde J. . The Plateau-Bézier problem. In: Wilson M. J. , Martin R. R. eds. Mathematics of Surfaces X. Lecture Notes in Computer Science 2768. Springer, Berlin, 2003, 262~273
- 9 Monterde J. , Ugail H. . On harmonic and biharmonic Bézier surfaces. Computer Aided Geometric Design, 2004, 21(7): 697~715
- 10 Farin G. E. . Triangular Bernstein-Bézier patches. Computer Aided Geometric Design, 1986, 3(2): 83~127
- 11 Wang Guo-Jin, Wang Guo-Zhao, Zheng Jian-Min. Computer Aided Geometric Design. Beijing: China Higher Education Press, 2002(in Chinese)
(王国瑾,汪国昭,郑建民. 计算机辅助几何设计. 北京:高等教育出版社,2002)
- 12 Glymph J. *et al.* A parametric strategy for freeform glass structures using quadrilateral planar facets. In: Proceedings of the Acadia 2002, ACM, 2002, 303~321
- 13 Liu Y. , Pottmann H. , Wallner J. , Yang Y. L. , Wang W. P. . Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(3): 681~689



XU Gang, born in 1981, Ph. D. candidate. His research interests include computer aided geometric design and computer graphics etc.

WANG Guo-Zhao, born in 1944, professor, Ph. D. supervisor. His research interests include computer graphics, computer aided geometric design, and medical image processing etc.

Background

The minimal surfaces have been extensively applied in many areas such as architecture, material science, aviation, ship manufacture, biology, crystallogeny and so on. So it is very meaningful to introduce the minimal surface into CAGD. Jin and Wang proposed the geometric construction of Enneper's surface, which is the unique cubic parametric polynomial minimal surface. The approximation solution of minimal surface bounded by Bézier or B-spline curves is proposed by Man and Wang. Man and Wang proposed the control mesh construction of the helicoid and catenoid. Harmonic surface

is a kind of surface with negative Gaussian curvature related to minimal surfaces. The modeling scheme of harmonic Bézier surfaces is proposed by Monerde and Ugail. In this paper, we propose the sufficient and necessary condition of a B-B surface over the triangular domain being a harmonic surface. We have proved that the control net of an arbitrary harmonic B-B surface over the triangular domain is fully determined by the first and second layers of control points. Some applications of the minimal surface in architectural design are also discussed.