

旋转圆锥网格及其在玻璃/钢结构中的应用

徐 岗¹⁾ 陈小雕^{1,2)} 汪国昭³⁾

¹⁾(杭州电子科技大学计算机学院 杭州 310018)

²⁾(浙江大学 CAD & CG 国家重点实验室 杭州 310058)

³⁾(浙江大学数学系计算机图象图形研究所 杭州 310027)

(xugangzju@gmail.com)

摘 要 圆锥网格是计算机辅助建筑设计中一类新的平面四边形网格,具有良好的等距性质,非常适用于玻璃/钢结构,而旋转曲面是建筑设计中的常用形状.通过引入旋转圆锥网格的概念,并利用圆锥网格的定义,给出了构造旋转圆锥网格的简单方法.证明了只在旋转曲面 $\mathbf{r}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$ 的 v 参数方向进行均匀分割,而在 u 参数方向进行任意分割,则所产生的平面四边形网格为圆锥网格;并研究了旋转曲面为圆锥曲面和圆柱曲面的特殊情况;最后给出了基于旋转圆锥网格的玻璃结构造型实例.该方法简单易行,对计算机辅助建筑设计中的玻璃/钢结构造型有一定的实际应用价值.

关键词 圆锥网格;旋转曲面;圆网格;计算机辅助建筑设计

中图法分类号 TP391

Conical Mesh of Revolution and its Application in Glass Structures and Steel Structures

Xu Gang¹⁾ Chen Xiaodiao^{1,2)} Wang Guozhao³⁾

¹⁾(College of Computer, Hangzhou Dianzi University, Hangzhou 310018)

²⁾(State Key Laboratory of CAD & CG, Zhejiang University, Hangzhou 310058)

³⁾(Institute of Computer Graphics and Image Processing, Department of Mathematics, Zhejiang University, Hangzhou 310027)

Abstract Conical mesh is a novel class of planar quad mesh with nice offset property, and is well suited for glass/steel structure design. Surfaces of revolution often appear in architecture design. By introducing the definition of conical mesh, conical mesh of revolution is proposed and a simple method for the construction of conical mesh of revolution is also presented in this paper. We proved that for a surface of revolution $\mathbf{r}(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$, if the division in v direction is uniform, then the resulting quad mesh with arbitrary division in u direction from $\mathbf{r}(u, v)$ is a conical mesh. We also investigate the special construction method in the cases of cones and cylinders. Some modeling examples of glass/steel structure based on conical mesh of revolution are presented. The methods are simple and easy to implement, and are valuable for modeling of glass/steel structure in computer aided architecture design.

Key words conical mesh; surface of revolution; circular mesh; computer aided architectural design

计算机辅助建筑设计是应用各种计算机技术来辅助进行建筑设计的一门学科,如计算机生成草图技术、虚拟现实及计算机动画技术等.这一学科的出现,使建筑设计更加直观、方便,并在近 20 年中得到突飞猛进的发展.

玻璃/钢结构是近年来出现的新兴建筑结构,已广泛应用于体育场馆、车站、候机大厅等大型建筑^[1-2].由于玻璃/钢结构的构成单元为四边形网格,因此研究适合于玻璃/钢结构的四边形网格的构造方法便成为当务之急.四边形网格是数字几何处理与离散微分几何的主要研究对象之一.文献[3]首次将离散微分几何用于玻璃/钢结构设计,提出了平面四边形网格与圆锥网格的概念.平面四边形网格是指其所有的网格单元均为平面四边形的网格,即其 4 个内角之和为 2π .圆锥网格是平面四边形网格的特例,它具有良好的等距性质,即如果沿着每个面片的法向量平移一个常数距离,则所产生的新网格与原网格具有相同的连接关系,并且新网格仍是圆锥网格,因此它可用于玻璃/钢结构设计.旋转曲面在建筑设计中具有广泛的应用,将圆锥网格与旋转曲面结合起来,即研究离散旋转曲面在何种条件下满足圆锥网格条件,对计算机辅助建筑设计具有积极意义.本文提出了旋转圆锥网格的概念,给出了旋转圆锥网格的简单构造方法,并将其应用于玻璃/钢结构.

1 旋转圆锥网格及其构造

定义 1^[3].如果在平面四边形网格的某一顶点 $P_{i,j}$ 处满足 $\phi_1 + \phi_3 = \phi_2 + \phi_4$,则称该顶点为圆锥顶点,如图 1 所示.

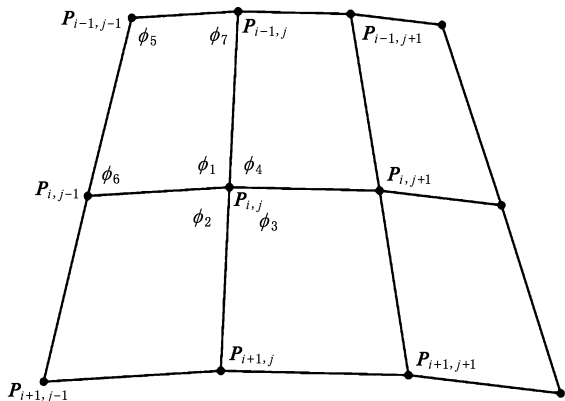


图 1 旋转圆锥网格示意图

定义 2.如果平面四边形网格的所有的内部顶点均为圆锥顶点,则称该网格为圆锥网格.

定义 3.如果某一圆锥网格上经向和纬向的网格顶点分别位于某一旋转曲面的经向和纬向的等参数曲线上,则称该圆锥网格为旋转圆锥网格.

圆锥网格是曲面上主曲率线网的离散形式,而旋转曲面上的等参数曲线便是该曲面的曲率线.那么,是否对旋转曲面上的等参数曲线按照参数区间任意划分时,所得到的四边形网格一定是圆锥网格呢?答案是否定的.因此,如何给出旋转圆锥网格的构造方法,便成为急需解决的问题.本文将给出旋转圆锥网格的简单构造方法,并给出其证明.

旋转曲面 $r(u, v)$ 的一般形式为

$$r(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)),$$

其中, $u \in [a, b]$, $v \in [c, d]$.在旋转曲面的 u 参数方向,将区间 $[a, b]$ 划分为 m 个子区间,分别记为 $[u_0, u_1], [u_1, u_2], \dots, [u_{i-1}, u_i], [u_i, u_{i+1}], \dots, [u_{m-1}, u_m]$,其中, $u_0 = a, u_m = b$;类似地,在旋转曲面的 v 参数方向,将区间 $[c, d]$ 划分为 n 个子区间,分别记为 $[v_0, v_1], [v_1, v_2], \dots, [v_{j-1}, v_j], [v_j, v_{j+1}], \dots, [v_{n-1}, v_n]$,其中, $v_0 = c, v_n = d$.如果 $u_{i+1} - u_i = u_i - u_{i-1}$,则称在 u 参数方向为均匀细分;类似地,如果 $v_{j+1} - v_j = v_j - v_{j-1}$,则称在 v 参数方向为均匀细分.记 $P_{k,l} = r(u_k, v_l)$, $k = 0, 1, 2, \dots, m-1, m; l = 0, 1, 2, \dots, n-1, n$.将 $P_{k,l} = r(u_k, v_l)$ 按照图 1 方式进行连接,便得到一个四边形网格.

定理 1.对于旋转曲面 $r(u, v)$,如果在 v 参数方向进行均匀分割,在 u 参数方向进行任意分割,则所得到的四边形网格为圆锥网格,即为旋转圆锥网格.

证明.设 $P_{k,l} = r(u_k, v_l)$, $k = i-1, i, i+1; l = j-1, j, j+1$,如图 1 所示.记 $f(u_i) = f_i, g(u_i) = g_i$,经计算得

$$P_{i,j}P_{i-1,j} = ((f_{i-1} - f_i)\cos v_j, (f_{i-1} - f_i)\sin v_j, g_{i-1} - g_i),$$

$$P_{i,j}P_{i,j-1} = (f_i(\cos v_{j-1} - \cos v_j), f_i(\sin v_{j-1} - \sin v_j), 0),$$

$$P_{i,j}P_{i+1,j} = ((f_{i+1} - f_i)\cos v_j, (f_{i+1} - f_i)\sin v_j, g_{i+1} - g_i),$$

$$P_{i,j}P_{i,j+1} = (f_i(\cos v_{j+1} - \cos v_j), f_i(\sin v_{j+1} - \sin v_j), 0),$$

$$P_{i-1,j}P_{i-1,j-1} = (f_{i-1}(\cos v_{j-1} - \cos v_j), f_{i-1}(\sin v_{j-1} - \sin v_j), 0);$$

因此 $\mathbf{P}_{i,j}\mathbf{P}_{i,j-1} \parallel \mathbf{P}_{i-1,j}\mathbf{P}_{i-1,j-1}$. 类似地, $\mathbf{P}_{i,j}\mathbf{P}_{i,j-1} \parallel \mathbf{P}_{i+1,j}\mathbf{P}_{i+1,j-1}, \mathbf{P}_{i-1,j+1}\mathbf{P}_{i-1,j} \parallel \mathbf{P}_{i,j+1}\mathbf{P}_{i,j}, \mathbf{P}_{i,j}\mathbf{P}_{i,j+1} \parallel \mathbf{P}_{i+1,j}\mathbf{P}_{i+1,j+1}$; 因此该四边形网格为平面四边形网格.

进一步地, 我们有

$$\cos \phi_1 = \frac{\mathbf{P}_{i,j}\mathbf{P}_{i-1,j-1} \cdot \mathbf{P}_{i,j}\mathbf{P}_{i,j-1}}{\|\mathbf{P}_{i,j}\mathbf{P}_{i-1,j-1}\| \|\mathbf{P}_{i,j}\mathbf{P}_{i,j-1}\|} = \frac{f_i(f_{i-1} - f_i) \sin \frac{v_j - v_{j-1}}{2}}{\sqrt{f_i^2} \sqrt{(f_{i-1} - f_i)^2 + (g_{i-1} - g_i)^2}} \quad (1)$$

$$\cos \phi_2 = -\frac{f_i(f_{i+1} - f_i) \sin \frac{v_j - v_{j-1}}{2}}{\sqrt{f_i^2} \sqrt{(f_{i+1} - f_i)^2 + (g_{i+1} - g_i)^2}} \quad (2)$$

$$\cos \phi_3 = -\frac{f_i(f_{i+1} - f_i) \sin \frac{v_{j+1} - v_j}{2}}{\sqrt{f_i^2} \sqrt{(f_{i+1} - f_i)^2 + (g_{i+1} - g_i)^2}} \quad (3)$$

$$\cos \phi_4 = -\frac{f_i(f_{i-1} - f_i) \sin \frac{v_{j+1} - v_j}{2}}{\sqrt{f_i^2} \sqrt{(f_{i-1} - f_i)^2 + (g_{i-1} - g_i)^2}} \quad (4)$$

显然, 当 $v_{j+1} - v_j = v_j - v_{j-1}$ 时, $\cos \phi_1 = \cos \phi_4$, $\cos \phi_2 = \cos \phi_3$, 即 $\phi_1 = \phi_4$, $\phi_2 = \phi_3$, 因此 $\phi_1 + \phi_3 = \phi_2 + \phi_4$. 即该四边形网格为圆锥网格, 为旋转圆锥网格. 证毕.

圆锥网格与圆锥面有着密切关系.

推论 1. 如果 $f(u) = g(u)$, 即 $\mathbf{r}(u, v)$ 为圆锥面, 则在 u 参数方向和 v 参数方向进行任意分割, 所得到的四边形网格均为圆锥网格.

证明. 由式(1)~(4)及 $f(u) = g(u)$ 可得, $\cos \phi_1 = \cos \phi_2$, $\cos \phi_3 = \cos \phi_4$, 即 $\phi_1 = \phi_2$, $\phi_3 = \phi_4$, 因此 $\phi_1 + \phi_3 = \phi_2 + \phi_4$. 即在 u 参数方向和 v 参数方向进行任意分割, 所得到的四边形网格均为圆锥网格.

证毕.

圆网格是与圆锥网格相对应的一类四边形网格, 组成该网格的所有的四边形都具有一个外接圆^[3-4].

推论 2. 若 $\mathbf{r}(u, v)$ 为圆柱面, 则在 u 参数方向和 v 参数方向进行任意分割, 所得到的四边形网格既是圆锥网格, 又是圆网格.

证明. 因 $\mathbf{r}(u, v)$ 为圆柱面, 故所产生的四边形网格的内角均为 $\frac{\pi}{2}$. 因此在图 1 中, $\phi_1 + \phi_3 = \phi_2 +$

$\phi_4, \phi_1 + \phi_5 = \pi, \phi_6 + \phi_7 = \pi$. 即所得到的四边形网格既是圆锥网格, 又是圆网格. 证毕.

2 实例与应用

图 2 所示为利用本文方法构造的圆锥网格的例子. 图 2a 所示为在 u 参数方向和 v 参数方向进行均匀分割的情况; 图 2b 所示为在 v 参数方向进行均匀分割, 而在 u 参数方向为非均匀分割的情况.

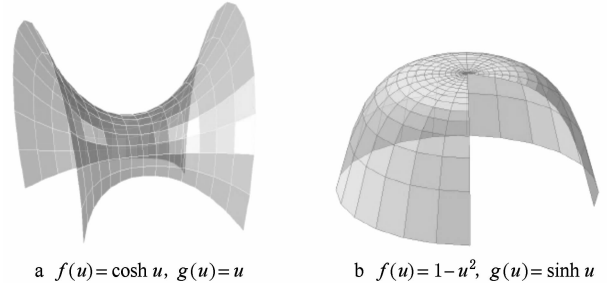


图 2 旋转圆锥网格

图 3 所示为相应于圆锥和圆柱的特殊情况的例子, 该例可直接应用于玻璃结构/钢结构设计.

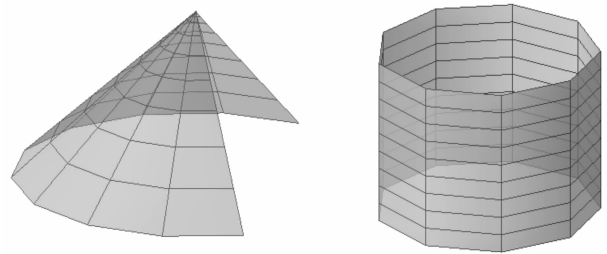


图 3 圆锥与圆柱的特殊情况

3 结论及将来工作

旋转曲面是当代建筑结构, 特别是玻璃/钢结构中的常见几何形状. 本文提出了旋转圆锥网格的概念, 并给出了构造旋转圆锥网格的一种简单方法, 采用该方法所构造的旋转圆锥网格是旋转曲面上等参数线网的离散形式; 还探讨了圆锥网格与圆锥曲面的关系, 所提出的构造方法简便直观, 可用于大型玻璃/钢结构的设计.

极小曲面在建筑设计中也有着广泛应用^[5-6]. 因此, 研究基于极小曲面的圆锥网格的构造方法同样具有重要的实际意义, 这将是我们的下一步研究工作的重点.

参 考 文 献

- [1] Zhang Qilin. Structure of glass curtain wall [M]. Ji'nan: shandong Press of Science and Technology, 2006 (in Chinese)
(张其林. 玻璃幕墙结构[M]. 济南: 山东科学技术出版社, 2006)
- [2] Chen Shaofan. Design principle of steel structure [M]. 3rd ed. Beijing: Science Press, 2005 (in Chinese)
(陈绍蕃. 钢结构设计原理[M]. 第3版. 北京: 科学出版社, 2005)
- [3] Liu Y, Pottmann H, Wallner J, *et al.* Geometric modeling with conical meshes and developable surfaces [J]. ACM Transactions on Graphics, 2006, 25(3): 681-689
- [4] Pottmann H, Brell-Cokcan S, Wallner J. Discrete surfaces for architectural design [C] //Proceedings of Curves and Surface Design, Avignon, 2006: 213-234
- [5] Xu Gang, Wang Guozhao. Control mesh representation of a class of minimal surface [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2007, 19(2): 240-244 (in Chinese)
(徐 岗, 汪国昭. 一类极小曲面的控制网格表示[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2007, 19(2): 240-244)
- [6] Xu G, Wang G Z. Harmonic-type Bézier surfaces over rectangular and triangular domain [J]. Journal of Information & Computational Science, 2006, 3(2): 325-332
-
- (上接第 1069 页)
- [8] Wang W P, Goldman R, Tu C H. Enhancing Levin's method for computing quadric-surface intersections [J]. Computer Aided Geometric Design, 2003, 20(7): 401-422
- [9] Tu C H, Wang W P, Mourrain B, *et al.* Signature sequence of intersection curve of two quadrics for exact morphological classification [R]. Hong Kong: Hong Kong University, 2005
- [10] Chen Xiaodiao, Yong Junhai, Zheng Guoqin, *et al.* Torus/sphere intersection algorithm [J]. Journal of Computer-Aided Design & Computer Graphics, 2005, 17(6): 1202-1206 (in Chinese)
(陈小雕, 雍俊海, 郑国勤, 等. 圆环面/球面求交算法[J]. 计算机辅助设计与图形学学报, 2005, 17(6): 1202-1206)
- [11] Dupont L, Lazard D, Lazard S, *et al.* Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics [C] // Proceedings of ACM Symposium on Computational Geometry, San Diego, 2003: 246-255
- [12] Tu C H, Wang W P, Wang J Y. Classifying the nonsingular intersection curve of two quadric surfaces [C] //Proceedings of Geometric Modeling and Processing, Wako, 2002: 23-32
- [13] Dupont L, Lazard D, Lazard S, *et al.* Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics: III. parameterizing singular intersections [R]. Paris: Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2005
- [14] Penaranda M L, Lazard L, Petitjean S. Near-optimal parameterization of the intersection of quadrics: II. A classification of pencils [R]. Paris: Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2005