N° d'ordre 42-99 Année 1999

THÈSE

Présentée devant

L'UNIVERSITÉ CLAUDE BERNARD-LYON 1

pour l'obtention du

DIPLÔME DE DOCTORAT

par

Frédéric HAVET

Chemins, cycles et arbres dans les tournois

Soutenue le 12 janvier 1999

Rapporteurs:

P. HELL, Full Professor, Simon Fraser University, Canada
M. LAS-VERGNAS, Directeur de Recherche, Equipe Combinatoire Paris VI
A. G. THOMASON, Lecturer, University of Cambridge, Grande Bretagne

Jury:

J. A. BONDY, Professeur, Université Claude Bernard Lyon I (Directeur de thèse)
P. CAMION, Directeur de Recherche Emérite, I.N.R.I.A. Rocquencourt (Président)
A. GOLDMAN, Professeur, Université Claude Bernard Lyon I
M. LAS-VERGNAS, Directeur de Recherche, Equipe Combinatoire Paris VI
J. ZENG, Professeur, Université Claude Bernard Lyon I

Remerciements.

Ma thèse s'est déroulée au laboratoire de Mathématiques Discrètes de l'Université de Lyon I. L'ambiance conviviale qui y règne a rendu très agréable mon travail en son sein.

Je tiens tout d'abord à exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse Adrian Bondy. Tout en me laissant une entière liberté dans ma recherche, son aide fut précieuse dans l'orientation de celle-ci. Grâce à sa connaissance encyclopédique de la théorie des graphes, il a toujours su apporter un avis pertinent et me donner des références sur les problèmes que j'ai pu lui soumettre.

Je remercie chaleureusement Stéphan Thomassé. Ma collaboration avec lui au début de ma thèse fut déterminante. Celle-ci m'a permis d'acquérir une rigueur et une méthode de travail. Il a su me communiquer son enthousiasme pour les mathématiques et c'est toujours un plaisir de travailler avec lui.

Je tiens à remercier Maurice Pouzet pour m'avoir donné le goût de la combinatoire, lors de son cours de maîtrise, et pour m'avoir accueilli dans son laboratoire.

J'exprime ma profonde gratitude à Nicolas, pour qui les systèmes informatiques n'ont pas de secrets. Très gentiment, il a toujours sacrifié son temps dès que mon ordinateur devenait récalcitrant.

Ma reconnaissance va aussi à Bernard, Christian, Franck, Hamza, Imed, Jean Luc et Luisa avec qui les discussions, mathématiques ou non, furent enrichissantes.
Je n'oublie pas ceux du laboratoire de probabilité, notamment Didier Piau dont les critiques pertinentes ont amélioré la rédaction de cette thèse et Alexis qui a patiemment subi mes allées-venues dans son bureau pour retirer mes impressions.

Je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur Paul Camion de m'avoir fait l'honneur de présider ce jury. Sa présence fut pour moi particulièrement importante puisqu'un de ses théorèmes est à l'origine de la thématique abordée dans ma thèse.

Je remercie Monsieur le Profeseur Pavol Hell, Monsieur le Professeur Michel Las-Vergnas et Monsieur le Professeur Andrew Thomason de s'être intéressé à ma thèse en acceptant d'en être rapporteur.

Je tiens à présenter mes remerciements à Monsieur le Professeur André Goldman et Monsieur le Professeur Jian Zeng pour avoir accepté d'être présents au jury.

Le moral étant un des nerfs de la recherche, je voudrais maintenant remercier ma famille, mes amis et camarades qui ont permis que le mien reste toujours au beau fixe:

Je remercie Pierre et Stéphan notamment pour m'avoir envoyé des articles depuis Grenoble ou Montpellier.

Je suis reconnaissant à Miguel de m'avoir fait découvrir l'Afrique ainsi que d'avoir avec Anne-Claire (vive les mariés!) supporter mes humeurs dans les Rocheuses.

J'accorde le carton bleu aux joyeux membres l'équipe Pastis: Alex, Benji, Charlie, Fennec, Footix, Guigui, Pector et Toon's qui, en réussissant à me faire gagner un match de football, m'ont montré qu'ici-bas rien n'est impossible.

Je remercie les thésards du quatrième étage de l'IPNL pour avoir égayer beaucoup de mes déjeuners avec de la physique nucléaire. Plus particulièrement, les qualités de barmaid de Clothilde et Karine lors de mon pot de thèse ont été très appréciées.

Je suis aussi reconnaissant à Bertrand, Hervé, Ludovic, Manu, Renaud et Vincent d'avoir animé mes pauses jus d'orange que ce soit sur un banc au soleil pendant les beaux jours, ou accoudés au radiateur par temps froid.

Je remercie mon père et mon frère d'avoir passé des heures à traquer les fautes d'orthographes dans mon manuscrit.

Je remercie aussi tous ceux qui m'ont fait le plaisir d'assister à ma soutenance ainsi que ceux qui m'ont fait part de leur soutien.

Enfin, je voudrais très amoureusement remercier Gaëlle pour avoir partager ma vie durant mes années de thèse.

Résumé.

Un digraphe est k-*inévitable* s'il est contenu dans tous les tournois d'ordre k. Après un chapitre introductif, nous traitons de l'inévitabilité des chemins, des cycles et des arbres. Enfin, dans le dernier chapitre considérons le côté algorithmique du problème.

Rosenfeld conjectura qu'il existe un entier $N > 7$ tel que tout chemin d'ordre $n \geq N$ est n-inévitable. Ceci a été vérifié par différents auteurs pour des chemins particuliers et Thomason l'a prouvé pour $n \geq 2^{128}$ et a conjecturé que c'est vrai pour $n \geq 8$. Avec Thomassé, nous réglons définitivement la question en prouvant le théorème suivant:
Tous les chemins d'ordre n sont n-inévitables à part trois exceptions d'ordre 3, 5 et 7.

Rosenfeld conjectura qu'il existe un entier N tel que tout cycle non direct d'ordre $n \geq N$ est n-inévitable. Ceci a été vérifié par différents auteurs pour des cycles particuliers et Thomason l'a prouvé pour $n \geq 2^{128}$ et a conjecturé que c'est vrai pour $n \geq 9$. Nous établissons plusieurs résultats partiels:
Soit T un tournoi réductible d'ordre $n \geq 9$ et C un cycle orienté non direct d'ordre n. Alors T contient C.
Soit T un tournoi $(= k)$-fortement connexe $(k \geq 1)$ d'ordre $n \geq 6$ et C un cycle d'ordre n qui contient un bloc de longueur au moins $k+2$. Alors T contient C.
Soit T est un tournoi $(= 1)$-fortement connexe d'ordre $n \geq 9$ et C un cycle d'ordre n. Alors T contient C.
De plus, pour chacun de ces résultats, nous caractérisons entièrement toutes les exceptions de petits ordres.

Soit $f(n)$ le plus petit entier tel que tout arbre est $f(n)$-inévitable. Et soit $g(k)$ le plus petit entier tel que tout arbre ayant k feuilles est $(n + g(k))$ -inévitable. Sumner a conjecturé que $f(n) = 2n - 2$. Häggkvist et Thomason ont prouvé $f(n) \leq 12n$ et $f(n) \leq (4 + o(1))n$. De plus, ils ont prouvé que $g(k) \leq 2^{512k^3}$. Avec Thomassé, nous conjecturons que $g(k) \leq k - 1$. Cette conjecture implique celle de Sumner.
Nous montrons que $g(3) \leq 5$ et en déduisons que $f(n) \leq 7,6n$.

Dans le dernier chapitre, nous présentons des algorithmes en $O(n^2)$ pour trouver un chemin hamiltonien dans un tournoi, un cycle hamiltonien non-direct dans un tournoi réductible ou exactement 1-fortement connexe et un cycle ayant un bloc de taille au moins $k + 2$ dans un tournoi exactement k-fortement connexe.

Table des Matières

Liste des Figures

Chapitre 1

Préliminaires et problématique.

1.1 Définitions préliminaires.

1.1.1 Définitions élémentaires.

Un *graphe* G est un couple $(V(G), E(G))$ où $V(G)$ est l'ensemble des *sommets* et $E(G)$ un ensemble de paires (non ordonnées) de $V(G)$, appelé ensemble des *arêtes*. Si $\{x, y\}$ est une arête de G, on dit que x et y sont *reliés* dans G. On note alors $x \sim y$ ou $y \sim x$.

Un *digraphe* ou *graphe orienté* D est un couple $(V(D), E(D))$ où $V(D)$ est l'ensemble des *sommets* et $E(D)$ un ensemble de couples (ordonnés) de $V(D)$, appelé ensemble des *arêtes*. Si (x, y) est une arête de D, on dit que x *domine* y ou y *est dominé* par x. On note alors $x \rightarrow y$ ou $y \leftarrow x$.

Le *dual* d'un digraphe D est le digraphe noté $-D$ tel que x domine y dans $-D$ si et seulement si x est dominé par y dans D.

Un digraphe D est une *orientation* d'un graphe si $V(D) = V(G)$ et x est relié à y dans G si et seulement si x domine y ou x est dominé par y dans D.

L'*ordre* d'un graphe G (orienté ou non), noté $|G|$, est son nombre de sommets, soit $|V(G)|$ et sa *taille*, notée $||G||$, est son nombre d'arêtes, soit $|E(G)|$.

Le *voisinage* d'un sommet x dans un graphe G, noté $N_G(x)$, est l'ensemble des sommets y reliés à x dans G. Ces sommets sont appelés *voisins* de x. Le *degré* de x dans G, noté $d_G(x)$, est le cardinal de son voisinage.

Le *voisinage externe* (respectivement *interne*) d'un sommet x dans un digraphe D, noté $N_D^+(x)$ (resp. $N_D^-(x)$), est l'ensemble des sommets y de D, appelés *voisins externes* (resp. *internes*) de X tels que $x \rightarrow y$ (resp. $x \leftarrow y$). Le *degré externe* (respectivement *interne*) de x dans D, noté $d_D^+(x)$ (resp. $d_D^-(x)$), est le cardinal de son voisinage externe (resp. interne).

Le graphe G' est un *sous-graphe* de G si $V(G') \subseteq V(G)$ et $E(G') \subseteq E(G)$. Si G' est un sous-graphe de G, on dit que G *contient* G' ou que G' *est contenu* dans G. Soit $S \subseteq V(G)$, le sous-graphe de G *induit* par S, noté $G(S)$, est le graphe G' tel que $V(G') = S$

et $E(G') = \{\{x,y\} \in E(G); x \in S, y \in S\}$.

Soient $A_1,\ldots,A_k$ une famille de sous-graphes et $B_1,\ldots,B_l$ une famille d'ensembles de sommets de G. On note $G(A_1,\ldots,A_k,B_1,\ldots,B_l)$ le graphe induit dans G par l'ensemble des sommets des A_i et les B_j, i.e. par $\bigcup_{1\leq i\leq k} V(A_i) \cup \bigcup_{1\leq j\leq l} B_j$. On note $G-(A_1,\ldots,A_k)$ le graphe induit par G sur les sommets de $V(G)\setminus(\bigcup_{1\leq i\leq k} V(A_i)\cup\bigcup_{1\leq j\leq l} B_j)$. Pour alléger les notations, on notera souvent $G-(A)$, $G-A$ et $G-\{x\}$, $G-x$.

De la même manière, on définit les notions de *sous-digraphe* et *sous-digraphe induit*.

Soient X et Y des ensembles de sommets ou des sous-digraphes d'un digraphe, on note $X \to Y$ si pour tout sommet x de X et tout sommet y de Y, on a $x \to y$.

1.1.2 Graphes particuliers.

Un *chemin* P est un graphe tel que $V(P) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $E(P) = \{\{x_i, x_{i+1}\}, 1 \leq i < n\}$. On notera aussi P par $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Les sommets x_1 et x_n sont les *extrémités* de P, x_1 est son *origine* et x_n sa *fin*.
Soient $P = (x_1, \ldots x_n)$ et $Q = (y_0, \ldots, y_p)$ deux chemins avec $y_0 = x_n$. La *concaténation* de P et Q, notée PQ est le chemin $(x_1, \ldots x_n, y_1, \ldots, y_p)$.
Une orientation d'un chemin est un *chemin orienté*. Le chemin orienté $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est *ascendant* (respectivement *descendant*) si pour tout $1 \leq i < n$, on a $x_i \to x_{i+1}$ (resp. $x_i \leftarrow x_{i+1}$). Un chemin *direct* est un chemin ascendant ou descendant, c'est à dire un chemin dont toutes les arêtes sont dans le même sens. Le nombre de sommets d'un plus long chemin direct dans un digraphe D est noté $\lambda(D)$.

Un *cycle* C est un graphe tel que $V(C) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $E(C) = \{\{x_i, x_{i+1}\}, 1 \leq i < n\} \cup \{\{x_n, x_1\}\}$. On notera aussi C par $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1)$.
Une orientation d'un cycle est un *cycle orienté*. Le cycle orienté $(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_1)$ est *direct*, si $x_n \to x_1$ et si pour tout $1 \leq i < n$, on a $x_i \to x_{i+1}$.

La taille d'un chemin ou d'un cycle est souvent appelée *longueur*. Un chemin ou un cycle est *hamiltonien* dans un graphe s'il passe par tous les sommets de ce graphe.

Un graphe G est *connexe* si pour tous sommets $x \neq y$, G contient un chemin d'extrémités x et y.
Un digraphe est *fortement connexe* si quels que soient deux sommets $x \neq y$, il existe un chemin ascendant d'origine x et de fin y. Un digraphe D est *k-fortement connexe* pour toute partie X de $k-1$ sommets, $D - X$ est fortement connexe. Un digraphe est *exactement k-fortement connexe* ou *$(=k)$-fortement connexe* s'il est k-fortement connexe et non $k+1$-fortement connexe.
Un digraphe est *acyclique* s'il ne contient pas de cycle direct.

Une *forêt* est un graphe sans cycle. Un *arbre* est un graphe connexe sans cycle. Les *feuilles* d'un arbre sont ses sommets de degré 1.

Une orientation d'une forêt est une *forêt orientée* et une orientation d'un arbre est un *arbre orienté*.

Un graphe *complet* est un graphe tel que deux sommets distincts sont toujours reliés. Le graphe complet sur n sommets est noté K_n. Une orientation d'un graphe complet est un *tournoi*. Un tournoi non fortement connexe est dit *réductible*. Un tournoi est réductible si et seulement si il admet une *décomposition* en deux sous-tournois non vides T_1 et T_2 tels que $V(T_1) \cup V(T_2) = V(T)$, $V(T_1) \cap V(T_2) = \emptyset$ et $T_1 \to T_2$.

Le *3-cycle* (x, y, z) est le tournoi à trois sommets tel que $x \to y$, $y \to z$ et $z \to x$. La *3-chaine* $> x, y, z >$ est le tournoi à trois sommets tel que $x \to \{y, z\}$ et $y \to z$. Ce sont les deux seuls tournois à trois sommets.

Propriété 1.1 *Soit T un tournoi. Il existe au plus $2k-1$ sommets de T tels que $d_T^+(x) < k$.*

1.1.3 Coloration.

Une *k-coloration* d'un graphe G est une application $f : V(G) \longrightarrow S$, où S est un ensemble de cardinalité k, appelé ensemble de *couleurs*. Communément, S est l'ensemble $\{1, 2, \ldots, k\}$. Une coloration est *propre* si pour toute arête $\{x, y\} \in E(G)$, $f(x) \neq f(y)$, autrement dit si deux sommets reliés sont de couleurs différentes. Un graphe G est dit *k-colorable* s'il admet une k-coloration propre. Le *nombre chromatique* d'un graphe G, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier tel que G est k-colorable. Si $\chi(G) = k$, on dit que G est *k-chromatique*.
On définit de la même manière les colorations d'un digraphe, les digraphes *k-colorables* et *k-chromatiques* et le *nombre chromatique* d'un digraphe; une coloration d'un digraphe D étant *propre* si pour toute arête (x, y) de D, $f(x) \neq f(y)$.

1.1.4 Convention de dessin.

Dans toutes les figures de cette thèse, nous représentons des tournois. Lorsque deux sous-tournois T_1 et T_2 délimités par des ellipses vérifient $T_1 \to T_2$, on dessine une arête de l'ellipse entourant T_1 vers celle entourant T_2. Lorsqu'un dessin comporte des arêtes en pointillé (sans flèche) ou non représentées, il représente tous les tournois avec une orientation quelconque de ces arêtes.

1.2 Problématique.

Il est clair que si D est une orientation de G alors $\chi(D) = \chi(G)$. La coloration d'un graphe semble donc, à première vue, indépendante de ses orientations. Cependant, il existe de nombreux rapports entre ces deux notions. Des théorèmes permettent à partir des colorations d'un graphe de déduire certaines propriétés des orientations, comme le théorème de Gallai-Roy. A l'inverse, des théorèmes comme le théorème d'Alon et Tarsi permettent de déduire des propriétés de coloration à partir des orientations d'un graphe.

1.2.1 Le théorème de Gallai-Roy.

Le premier lien qui a été fait entre les orientations et les colorations d'un graphe est le théorème de Gallai-Roy:

Théorème 1.1 (Gallai, 1968 [14] - Roy, 1967 [30]) *Tout digraphe D contient un chemin direct d'ordre au moins $\chi(D)$. Autrement dit, $\lambda(D) \geq \chi(D)$.*

Preuve. Soit D' un sous-digraphe acyclique maximal de D, et pour tout sommet v de D, soit $c(v)$ le nombre de sommets d'un plus long chemin ascendant d'origine v dans D'. Comme $V(D') = V(D)$, c définit une $\lambda(D')$-coloration de D. Nous allons montrer que c est une coloration propre de D. Comme $\lambda(D') \leq \lambda(D)$, ceci nous donnera le résultat.

Remarquons que s'il existe un chemin ascendant P d'origine x et de fin y dans D' alors $c(x) > c(y)$. En effet, si Q est un chemin ascendant d'origine y dans D', PQ est un chemin ascendant (plus long) d'origine x dans D', puisque D' est acyclique. Ainsi si $(x, y) \in E(D')$, $c(x) \neq c(y)$. D'autre part si $(x, y) \in E(D) \setminus E(D')$, alors, puisque D' est maximal, il y a un chemin ascendant d'origine y et de fin x, et là aussi $c(x) \neq c(y)$. □

Ce théorème nous permet de définir le nombre chromatique d'un graphe G en fonction de la longueur des chemins directs de ses orientations:

$$\chi(G) = \min\{\lambda(\vec{G}), \vec{G} \text{ orientation de } G\}.$$

En effet, le théorème de Gallai-Roy montre que $\chi(G) \leq \lambda(\vec{G})$ pour toute orientation $\vec{G}$ de G. L'inégalité inverse est obtenue en considérant l'orientation de G pour laquelle $u \to v$ si et seulement si $c(u) < c(v)$, avec c une $\chi(G)$-coloration propre de G.

1.2.2 Le théorème d'Alon et Tarsi.

D'autre part, Alon et Tarsi [2] ont prouvé le théorème suivant qui permet de déduire des propriétés de coloration d'un graphe en comptant certaines de ses orientations.

Soient G un graphe, R une orientation (de référence) de G et S une fonction qui à chaque sommet de G associe un ensemble.
Une orientation $\vec{G}$ de G sera dite *paire* (respectivement *impaire*) si le nombre d'arêtes orientées de manières différentes dans $\vec{G}$ et R (i.e. $(x, y) \in E(\vec{G})$ et $(y, x) \in E(R)$) est pair (resp. impair). Une orientation $\vec{G}$ de G est *compatible* avec S, si pour tout sommet v, $d^+_{\vec{G}}(v) + 1 = |S(v)|$. Le nombre d'orientations paires (resp. impaires) de G compatibles avec S est noté $OP(G, S)$ (resp. $OI(G, S)$).

Théorème 1.2 (Alon et Tarsi, 1992 [2]) *Soit G un graphe. Pour tout sommet v de G, soit $S(v)$ un ensemble d'entiers distincts. Si $OI(G,S) \neq OP(G,S)$ alors G admet une coloration propre c telle que $c(v) \in S(v)$ pour tout sommet v de G.*

Ce théorème a été en particulier utilisé par Fleischner et Stiebitz [12] (voir aussi [1]) pour résoudre un problème proposé par Du, Hsu et Hwang [10] ainsi que son renforcement proposé par Erdös.

Théorème 1.3 (Fleischner et Stiebitz, 1992 [12]) *Soit G un graphe à $3n$ sommets, dont l'ensemble des arêtes est l'union disjointe d'un cycle hamiltonien et de n triangles deux à deux sommet-disjoints. Alors G est 3-chromatique.*

1.2.3 Digraphes universels et inévitables.

Un digraphe est *n-universel* si tout digraphe n-chromatique le contient.
Le théorème de Gallai-Roy, nous dit que le chemin direct d'ordre n est n-universel. On peut se demander plus généralement quels sont les digraphes n-universels.
On ne peut pas prouver d'universalité pour un cycle orienté car un théorème d'Erdös [11] affirme que pour tout couple d'entiers (n,k), il existe des graphes n-chromatiques qui ne contiennent pas de cycles de longueur inférieure à k. Cependant, Bondy [7] a montré un résultat approchant: tout digraphe fortement connexe k-chromatique contient un cycle direct de longueur au moins k.
D'autre part, Burr [8] a montré que tout arbre orienté d'ordre n est $(n-1)^2$-universel. Il a de plus conjecturé que tout arbre orienté d'ordre n est $(2n-2)$-universel.

Les tournois d'ordre n étant les digraphes n-chromatiques les plus simples, il est naturel lorsque l'on s'intéresse aux digraphes n-universels de regarder d'abord la classe plus large des digraphes qui sont contenus dans tous les tournois d'ordre n. Dans [31], Saks et Sós ont défini ces digraphes comme les digraphes *n-inévitables*. On peut en particulier se demander quels sont les chemins, les cycles et les arbres orientés que l'on peut trouver dans tout tournoi d'ordre donné (voir [5] pour un tour d'horizon).

Le premier résultat sur les digraphes inévitables est le théorème de Rédei [27] (la restriction du théorème de Gallai-Roy aux tournois):

Théorème 1.4 (Rédei, 1934 [27]) *Tout tournoi possède un chemin hamiltonien direct. Autrement dit, le chemin direct d'ordre n est n-inévitable.*

Preuve. Par récurrence sur l'ordre des tournois. Soit T un tournoi d'ordre n. Soit x un sommet de T. Par hypothèse de récurrence, le tournoi $T-x$ a un chemin hamiltonien direct (ascendant) $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$. Si $x \rightarrow x_1$, alors $(x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1})$ est un chemin hamiltonien direct de T. De même, si $x \leftarrow x_{n-1}$, $(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x)$ est un chemin hamiltonien direct de T. Sinon il existe i tel que $x_i \to x \to x_{i+1}$. Ainsi $(x_1, x_2, \ldots, x_i, x, x_{i+1}, \ldots, x_{n-1})$ est un chemin hamiltonien direct de T. $\square$

Plus généralement, on peut se demander quels sont les chemins orientés (non nécessairement directs) n-inévitables.

Conjecture 1 (Rosenfeld, 1972 [28]) Il existe un entier N, tel que pour tout $n \geq N$, tout chemin orienté d'ordre n est n-inévitable.

La question peut également se poser pour le cycles orientés. Le premier résultat est le théorème de Camion (la restriction du théorème de Bondy aux tournois):

Théorème 1.5 (Camion, 1959 [9]) *Tout tournoi fortement connexe possède un cycle hamiltonien direct.*

Preuve. Ce théorème peut se déduire d'une assertion plus forte démontrée par Moon [24]: *Soit T un tournoi fortement connexe d'ordre n et x un sommet de T. Pour tout $3 \leq k \leq n$, T contient un cycle direct d'ordre k contenant x.*

Par récurrence sur k.

Si $k = 3$, prenons x un sommet de T. Il existe un sommet $y \in N^+(x)$ et un sommet $z \in N^-(x)$ tel que $y \to z$, sinon T est réductible. Ainsi (x, y, z) est un cycle direct d'ordre 3.

Si $k \geq 4$, par récurrence T contient un cycle direct d'ordre $k-1$ contenant x, noté $C_{k-1} = (x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_1)$ avec $x = x_{k-1}$. S'il existe un sommet y de $T - C_{k-1}$ qui domine un sommet x_l et qui est dominé par un sommet x_m, alors il existe i tel que $x_i \to y \to x_{i+1}$ et $(x_1, x_2, \ldots x_i, y, x_{i+1}, \ldots, x_{k-1}, x_1)$ est un cycle direct d'ordre k contenant x. Sinon soient Y l'ensemble des sommets dominés par C_{k-1} et Z l'ensemble des sommets qui dominent C_{k-1}. Comme T est fortement connexe, il existe $y \in Y$ et $z \in Z$ tels que $y \to z$ et alors $(z, x_2, \ldots, x_{k-1}, y, z)$ est un cycle direct d'ordre k contenant x. $\square$

A cause des tournois réductibles, le cycle direct d'ordre n n'est pas n-inévitable et à cause des tournois transitifs, qui sont acycliques, il n'existe aucun entier k pour lequel il est k-inévitable.

On peut cependant se demander si les cycles non-directs sont inévitables.

Conjecture 2 (Rosenfeld, 1974 [29]) Il existe un entier N, tel que pour tout $n \geq N$, tout cycle orienté non direct d'ordre n est n-inévitable.

La conjecture de Burr restreinte aux tournois est la conjecture de Sumner:

Conjecture 3 (Sumner) Tout arbre orienté d'ordre n est contenu dans tout tournoi d'ordre $2n-2$. Autrement dit, tout arbre orienté d'ordre n est $(2n-2)$-inévitable.

1.2.4 Présentation des résultats.

Dans cette thèse, nous traitons de l'inévitabilité des chemins, des cycles et des arbres orientés dans les tournois et donc des trois conjectures précédentes. Puisque nous ne nous intéressons qu'à des digraphes, nous entendrons désormais par *chemin*, *cycle*, *forêt* et *arbre* chemin orienté, cycle orienté, forêt orientée et arbre orienté.

Dans le deuxième chapitre, nous traitons de l'inévitabilité des chemins dans les tournois. Grünbaum [15] a prouvé qu'à part trois exceptions, tout tournoi contient un chemin *alterné* (deux arêtes consécutives sont de sens opposé) hamiltonien ; les exceptions sont le 3-cycle, le tournoi régulier à cinq sommets et le tournoi de Paley à sept sommets. Thomason [35] a montré que la conjecture 1 de Rosenfeld est vraie avec $N = 2^{128}$. Nous améliorons ici ce résultat et règlons définitivement le problème en montrant: *Tout cycle non direct d'ordre $n \geq 8$ est n-inévitable.* Ceci est une conséquence immédiate du résultat suivant:

Théorème 2.3 *Soit T un tournoi d'ordre n et P un chemin d'ordre n. Alors T contient P sauf si $(T;P)$ est une exception de Grünbaum.*

Dans le troisième chapitre, nous nous intéressons aux cycles dans les tournois. Benhocine et Wojda [6] ont montré que la conjecture 2 est vraie pour les cycles ayant deux blocs (sous-chemins directs maximaux) et Thomason [35] a montré qu'elle est vraie pour $N = 2^{128}$. Nous montrons tout d'abord le résultat suivant (cf théorème 3.1):

Théorème *Un tournoi réductible d'ordre au moins 9 contient tous les cycles hamiltoniens non directs.*

Ensuite nous montrons (cf théorèmes 3.2 et 3.3) le théorème ci-dessous:

Théorème *Soient T un tournoi $(= k)$-fortement connexe d'ordre $n \geq 6$ et C un cycle d'ordre n ayant un bloc de taille au moins $k + 2$. Alors T contient C.*

Ce résultat admet comme corollaire celui de Benhocine et Wojda et nous permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 3.4 *Un tournoi (=1)-fortement connexe d'ordre au moins neuf contient tous les cycles hamiltoniens.*

De plus, pour les trois théorèmes précédents, nous caractérisons complétement les exceptions de petit ordre.

Dans le quatrième chapitre, nous traitons de l'inévitabilité des arbres. Häggkvist et Thomason [16] ont prouvé que les arbres d'ordre n sont $12n$-inévitables et $(4 + o(1))n$-

inévitables. De plus, ils ont prouvé qu'un arbre d'ordre n ayant k feuilles est $(n+2^{512k^3})$-inévitable. Avec Stéphan Thomassé, nous émettons la conjecture suivante:

Conjecture 4 (Havet et Thomassé) Tout arbre d'ordre n ayant k feuilles est $(n+k-1)$-inévitable.

Nous montrons le résultat suivant (cf corollaire 4.2):

Théorème *Un arbre qui est le raccordement d'ordre n de k chemins est* $(n+\frac{3}{2}(k^2-3k)+5)$-*inévitables. En particulier, les arbres à trois feuilles d'ordre n sont* $(n+5)$-*inévitables.*

A partir de ce résultat, nous montrons le théorème:

Théorème 4.4 *Un arbre d'ordre n est* $(\frac{38}{5}n-6)$-*inévitable.*

Enfin dans le dernier chapitre, nous abordons l'algorithmie des chemins et des cycles dans les tournois. Hell et Rosenfeld [18] ont montré que trouver un chemin hamiltonien direct était de complexité $O(n \log n)$ et Bampis, Hell, Manoussakis et Rosenfeld [4] ont donné un algorithme en $O(n)$ pour trouver un chemin hamiltonien alterné dans un tournoi. Cependant aucun algorithme n'a été donné pour un chemin en général. Pour les cycles, seul le cas du cycle direct a été étudié. Manoussakis [23] a donné un algorithme en $O(n^2)$ qui trouve un cycle hamiltonien direct dans un tournoi (s'il existe). Nous donnons des algorithmes en $O(n^2)$ qui permettent de trouver un chemin d'ordre n dans un tournoi d'ordre n (s'il existe), un cycle d'ordre n non direct dans un tournoi réductible d'ordre n (s'il existe) et un cycle d'ordre n dans un tournoi (=1)-fortement connexe d'ordre n.

Chapitre 2

Chemins dans les tournois.

Le premier résultat sur l'inévitabilité des chemins dans les tournois est le théorème de Rédei qui affirme que tout tournoi contient un chemin hamiltonien direct. Plus généralement, on peut se pencher sur l'existence de chemins orientés arbitraires dans un tournoi. En 1971, Grünbaum [15] prouva qu'à part trois exceptions, tout tournoi contient un chemin *alterné* (deux arêtes consécutives sont de sens opposé) hamiltonien ; les exceptions sont le 3-cycle, le tournoi régulier à cinq sommets et le tournoi de Paley à sept sommets. Un an plus tard, en 1972, Rosenfeld [28] donna une preuve plus simple d'un résultat plus fort: dans un tournoi sur au moins neuf sommets, tout sommet est origine d'un (des deux) chemin hamiltonien alterné. De plus, il émit la conjecture 1: Il existe un entier $N > 7$ tel que tout tournoi d'ordre $n \geq N$ contient tous les chemins orientés hamiltoniens. La condition $N > 7$ venait simplement des contrexemples de Grünbaum. Plusieurs articles ont donné des résultats partiels à cette conjecture: Alspach et Rosenfeld [3] et Straight [34] l'ont prouvée pour les chemins à deux blocs (sous-chemins directs maximaux), Alspach et Rosenfeld [3] l'ont prouvée pour les chemins dont le $i^{\text{ème}}$ bloc est de longueur au moins $i+1$. Forcade [13] a montré ce résultat surprenant: Dans un tournoi d'ordre 2^k, il y a un nombre impair de chemins orientés hamiltoniens d'un type donné. Enfin Thomason [35] a établi cette conjecture en montrant que N est inférieur à 2^{128}.

Dans ce chapitre, nous établissons complètement la conjecture de Rosenfeld. Nous montrons que tout tournoi contient tout chemin orienté hamiltonien à part les trois exceptions de Grünbaum.

Définition 1 Soit $P = (x_1, \ldots, x_n)$ un chemin. Le chemin $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ est noté P^* et le chemin $(x_2, \ldots, x_n)$, ${}^*P$. Le chemin $(x_n, \ldots, x_1)$, noté P^{-1}, est l'*inverse* de P.

P est *sortant* (respectivement *entrant*) si $x_1 \to x_2$ (resp. $x_2 \to x_1$). Rappelons que P est ascendant (respectivement descendant) si $x_i \to x_{i+1}$ (resp. $x_{i+1} \to x_i$) pour tout i, $1 \leq i \leq n-1$. Un chemin direct est un chemin ascendant ou descendant. Un chemin hamiltonien ascendant d'un tournoi T sera noté O_T et un chemin hamiltonien descendant d'un tournoi T sera noté I_T.

Les *blocs* de P sont les sous-chemins directs maximaux de P. On énumère les blocs de P depuis son origine. Le premier bloc est noté $B_1(P)$ et sa taille $b_1(P)$. De même le $i^{\text{ème}}$ bloc de P est noté $B_i(P)$ et sa taille $b_i(P)$. Le chemin P est entièrement décrit par la suite signée $sgn(P)(b_1(P),\dots,b_k(P))$ où k est le nombre de blocs de P et $sgn(P)=+$ si P est sortant et $sgn(P)=-$ si P est entrant.

Si les $P_i=(x_1^i,\dots,x_{n_i}^i)$ sont des chemins, le chemin $(P_1,P_2,\dots,P_k)$ est le chemin $(x_1^1,\dots,x_{n_1}^1,x_1^2,\dots,x_{n_2}^2,\dots,x_{n_{k-1}}^{k-1},x_1^k,\dots,x_{n_k}^k)$.

Soit X un ensemble de sommets de T. La *section finale* (resp. *initiale*) de X dans T notée $S_T^+(X)$ (resp.$S_T^-(X)$) est l'ensemble des sommets y de T tels qu'il existe $x\in X$ et un chemin ascendant (resp. descendant), éventuellement réduit à un sommet, d'origine x et de fin y. On note $s_T^+(X)$ (resp.$s_T^-(X)$) son cardinal. Un *outgénérateur* (resp. *ingénérateur*) est un sommet x tel que $S_T^+(x)=V(T)$ (resp.$S_T^-(x)=V(T)$). On note $Out(T)$ l'ensemble des outgénérateurs de T et $In(T)$ l'ensemble des ingénérateurs de T. Remarquons que pour un tournoi fortement connexe $Out(T)=In(T)=V(T)$.

Pour alléger les notations, dans ce chapitre et les suivants, comme nous serons souvent dans un tournoi T, nous supprimons les indices T. Par exemple, nous notons $N_T^+(x)$, $N^+(x)$.

Il est clair que si un sommet x est origine d'un chemin sortant P dans un tournoi T, alors sa section finale dans T est de cardinal supérieur à l'ordre du premier bloc de P. Autrement dit $s_T^+(x)\geq b_1(P)+1$. Cette condition n'est hélas pas suffisante: prenons par exemple un tournoi T pour lequel il existe deux sommets x et y tels que $x\to y$, $y\to T-(x,y)$ et $x\leftarrow T-(x,y)$, et un chemin sortant de longueur au moins 2 dont le premier bloc est de longueur 1. Il est clair qu'alors x n'est pas origine de P bien que $s_T^+(x)\geq b_1(P)+1$.
Cependant, si on considère deux sommets distincts x et y tels que $s_T^+(x)\geq b_1(P)+1$, on peut se demander si un de ces deux sommets est une origine de P dans T.

Dans la première partie de ce chapitre nous répondons par l'affirmative si l'ordre du chemin sortant est strictement inférieur à celui du tournoi (théorème 2.1). Ceci nous permet de donner une condition nécessaire et suffisante pour un sommet d'être origine d'un chemin d'ordre $n-1$ dans un tournoi d'ordre n.

Ensuite, nous donnons une caractérisation de toutes les paires $(T;P)$ où T est un tournoi et P un chemin sortant, tous deux d'ordre n, telles que parmi toute paire de sommets qui engendre une section finale plus grande que le premier bloc de P, il y a une origine de P dans T. Nous donnons tout d'abord les 52 petites exceptions et les 14 familles infinies d'exceptions dans les troisième et quatrième parties.
Parmi ces exceptions, bien sûr, nous retrouvons celles de Grünbaum. Cependant, pour toutes les autres, T contient P, ce qui nous permet de montrer la conjecture 1 de Rosenfeld (théorème 2.3).

Notre caractérisation nous permet d'obtenir d'autres corollaires. Nous montrons notamment que dans un tournoi 3-fortement connexe d'ordre au moins 9, tout sommet est origine de tous les chemins hamiltoniens (corollaire 2.3.1) et que dans un tournoi 2-fortement connexe d'ordre au moins 9, pour tout chemin chemin P d'ordre n, tout sommet est origine de P ou de $-P$ (corollaire 2.3.2).

2.1 Chemins d'ordre n dans les tournois d'ordre $n+1$.

Le théorème suivant est un renforcement d'un théorème de Thomason dans [35].

Théorème 2.1 (Havet et Thomassé, [17]) *Soient T un tournoi d'ordre $n+1$, P un chemin sortant d'ordre n et x, y deux sommets distincts de T. Si $s^+(x,y) \geq b_1(P)+1$ alors x ou y est une origine de P dans T.*

Preuve. On le prouve par récurrence sur n, le résultat étant trivialement vrai pour $n=1$. Supposons maintenant que le théorème et son dual sont vrai pour $|T|=n$. Soient x et y deux sommets de T tels que $x \to y$ et $s^+(x,y) \geq b_1(P)+1$. Nous devons distinguer deux cas:

Cas 1: $b_1(P) \geq 2$.

Si $d^+(x) \geq 2$, soit $z \in N^+(x)$ un outgénérateur de $S^+(x) - x$ et $t \in N^+(x)$, $t \neq z$. D'après la définition de z, on a $s^+_{T-x}(t,z) = s^+(x) - 1 > b_1({}^*P)$.
Comme ${}^*P$ est un chemin sortant, par hypothèse de récurrence, t ou z est une origine de ${}^*P$ dans $T-x$. Ainsi x est origine de P dans T.

Nous pouvons donc supposer que y est le seul voisin externe de x. Soit z un outgénérateur de $T(N^+(y))$. (z existe car $s^+(x,y) \geq 3$). Alors $z \to x$ et z est un outgénérateur de $S^+(x,y) - y$. Il vient que $s^+_{T-y}(x,z) = s^+(x,y) - 1$, et par hypothèse de récurrence, x ou z est origine de ${}^*P$ dans $T-y$. Comme $d^+_{T-y}(x) = 0$, cette origine est forcément z. On a donc y qui est origine de P dans T.

Cas 2: $b_1(P) = 1$.

Supposons d'abord que $d^+(x) \geq 2$. On note X l'ensemble $S^-_{T-x}(N^+(x))$. Considérons la partition $(X, Y, \{x\})$ de T où $Y = T - (X, x)$. On a $Y \to x$, $X \to Y$ et $y \in X$. Si $|X| \geq b_2(P)+1$ alors x est origine de P dans T; en effet, soit $z \in N^+(x)$ un ingénérateur de $T(X)$ et soit $u \in N^+(x)$, $u \neq z$. Par hypothèse de récurrence, z ou u est origine de ${}^*P$ dans $T-x$. Ainsi x est origine P dans T. Si $|X| \leq b_2(P)$, on a $|Y| > 1$ puisque $b_2(P) \leq n-2$ et $|X| + |Y| = n$. Soit $z \in Y$ un ingénérateur de $T(Y)$. Remarquons que $d^+(x) > 1$ et $S^-_{T-y}(z) = T - y$. Soit $u \in Y$, $u \neq z$. Par hypothèse de récurrence, u ou z est origine de ${}^*P$ dans $T-y$; par conséquent, y est origine de P dans T.

Supposons maintenant que $d^+(x) = 1$, ainsi $N^+(x) = \{y\}$.
Si $d^+(y) < 2$ alors $N^-_{T-x}(y)$ a au moins $n-2$ sommets. Par hypothèse de récurrence,

on peut trouver $^{**}P$ dans $T(N^-_{T-x}(y))$, donc x est origine de P dans T.

Si $d^+(y) \geq 2$, posons $Y = S^-_{T-y}(N^+(y))$ et $X = V\backslash(Y \cup \{x, y\})$ et considérons la partition $(X, Y, \{x\}, \{y\})$ de V. Par définition, $X \to \{x, y\}$, $Y \to X \cup \{x\}$. Si $|Y| \geq b_2(P) + 1$ alors y est origine de P par l'argument précédent. Si $|Y| \leq b_2(P)$,alors $b_2(P) \geq d^+(y) \geq 2$. Si $|X| \geq 2$, soit $z \in X$ un ingénérateur de $T - (x, y)$ et soit $u \in X$ $u \neq z$. Comme $b_2(P) \geq 2$, $^{**}P$ est un chemin entrant et par hypothèse de récurrence, z ou u est origine de $^{**}P$ dans $T - (x, y)$. Ainsi x, (via y) est origine de P dans T. Enfin, si $|X| = 1$ alors $|Y| = n - 2$ et puisque $n - 2 \geq b_2(P) \geq |Y|$, on a $b_2(P) = n - 2$. Ceci veut dire que $^*P$ est un chemin descendant. Comme y est un ingénérateur de $T - x$, x est origine de P dans T. $\square$

Ceci nous permet de retrouver un résultat de Thomason:

Corollaire 2.1.1 (Thomason, 1986 [35]) *Tout tournoi T d'ordre $n + 1$ contient tout chemin P d'ordre n. De plus , tout ensemble de $b_1(P) + 1$ sommets contient une origine de P. En particulier, au moins deux sommets de T sont origines de P .*

Corollaire 2.1.2 *Soient T un tournoi fortement connexe d'ordre $n + 1$ et P un chemin sortant d'ordre n. Alors:*
(i) Tout sommet de T, sauf peut-être un, est origine de P.
(ii) Si $b_1(P) \geq 2$, tout sommet de degré externe au moins 2 est origine de P.

Corollaire 2.1.3 *Si T est 2-fortement connexe, tout sommet de T est origine de P.*

Notre but maintenant est de donner une condition nécessaire et suffisante sur un sommet pour qu'il soit origine d'un chemin P d'ordre n donné dans un tournoi d'ordre $n+$ 1. Essentiellement, cette condition indique s'il y assez de "place" dans T pour commencer P en x.

Définition 2 - Une *séparation* d'un chemin $P = (x_1, \cdots, x_n)$ est un couple de chemins (P_1, P_2) où $P_1 = (x_1, \cdots, x_k)$ et $P_2 = (x_k, \cdots, x_n)$ pour un certain k, $1 \leq k \leq n$; par exemple $((x_1, x_2),^* P)$ est une séparation de P. Remarquons que $|P_1| + |P_2| = |P| + 1$ pour toute séparation (P_1, P_2) de P.

- Soit x un sommet d'un tournoi T d'ordre n et $P = (x_1, \ldots, x_k)$ un chemin sortant avec $k \leq n$. On dit que (x, P) est *bloqué* dans T si $s^+(x) \leq b_1(P)$ ou si $b_1(P) = 1$ et $s^-_{T-x}(N^+(x)) \leq b_2(P)$. Soit x un sommet d'un tournoi T d'ordre n et $P = (x_1, \ldots, x_k)$ un chemin entrant avec $k \leq n$. On dit que (x, P) est *bloqué* dans T si $s^-(x) \leq b_1(P)$ ou si $b_1(P) = 1$ et $s^+_{T-x}(N^-(x)) \leq b_2(P)$.

- On dit que (x, P) est *forcé* dans T si pour tout $k' \leq k$, il y a un unique chemin isomorphe à $(x_1, \cdots, x_{k'})$ dans T d'origine x. On dit que (x, P) est *forcé* vers y si y est la fin du chemin $(x_1, \cdots, x_k)$ d'origine x. Remarquons que si P est un chemin sortant, cela veut dire que x a un unique voisin externe z et ainsi de suite, suivant si ${}^*P$ est entrant ou sortant que z a un unique voisin interne ou externe dans $T - x$. Ceci est donc une forte restriction sur T.

Lemme 2.1 *Soient T un tournoi d'ordre $n+1$, P un chemin d'ordre n et x un sommet de T. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

i) Le sommet x n'est pas origine de P dans T.

ii) Il existe une séparation (P_1, P_2) de P telle que (x, P_1) est forcé vers y dans T et (y, P_2) est bloqué dans $T - P_1^*$.

Preuve. Par récurrence sur n. Pour des raisons de dualité, on peut supposer que P est un chemin sortant. Si $d^+(x) = 1$, on applique simplement l'hypothèse de récurrence à y l'unique voisin externe de x en remplacant T par $T - x$, P par ${}^*P$ et x par y. Supposons que $d^+(x) \geq 2$ et que x n'est pas bloqué. Si $b_1(P) = 1$, considérons y un ingénérateur de $N^+(x)$ et z un outgénérateur de $N^+(x)$ distinct de y. Comme x n'est pas bloqué, $S^-_{T-x}(z, y) = S^-_{T-x}(N^+(x))$, donc $s^-_{T-x}(z, y) \geq b_1({}^*P)$. Ainsi d'après le théorème 2.1, y ou z est une origine de ${}^*P$ dans $T - x$ et x est origine de P. Un argument similaire nous donne le résultat si $b_1(P) \geq 2$. □

2.2 Les petites exceptions.

On voudrait maintenant prouver un analogue du théorème 2.1 pour les chemins d'ordre n dans les tournois d'ordre n. Malheureusement, un tel énoncé n'est pas vrai et admet des exceptions.

Définition 3 - Une *exception* est un couple $(T; P)$, où T est un tournoi et P un chemin sortant de même ordre que T, tels qu'ils existe deux somets x, y de T, qui ne sont pas origine de P dans T et pour lesquels $s^+(x, y) \geq b_1(P) + 1$.

- Les *exceptions de Grünbaum* sont $(3A; \pm(1,1))$, $(5A; \pm(1,1,1,1))$ et $(7A; \pm(1,1,1,1))$ où $3A$, $5A$ et $7A$ sont les tournois dessinés dans les figures suivantes (2.1 et 2.2).

Nous donnons maintenant une liste d'exceptions toutes d'ordre inférieur à neuf. Nous les appelons (avec leurs duales) les *petites exceptions* ou exceptions $\mathcal{E}_i = (T; P)$ où T est un tournoi et P un chemin sortant. Pour chacune de ces exceptions, nous donnons S l'ensemble des sommets de T qui ne sont pas origine de P dans T et les chemins $P_1, \ldots, P_k$ les chemins P dans T dont les origines sont les sommets de $V \backslash S$.

Exc $\mathcal{E}_0 = (3A; +(1,1))$; $S = \{1,2,3\}$.
Exc $\mathcal{E}_1 = (4A; +(1,1,1))$; $S = \{1,2,3\}$; $(4,2,1,3)$.
Exc $\mathcal{E}_2 = (4A; +(1,2))$; $S = \{3,4\}$; $(1,3,2,4)$; $(2,3,1,4)$.

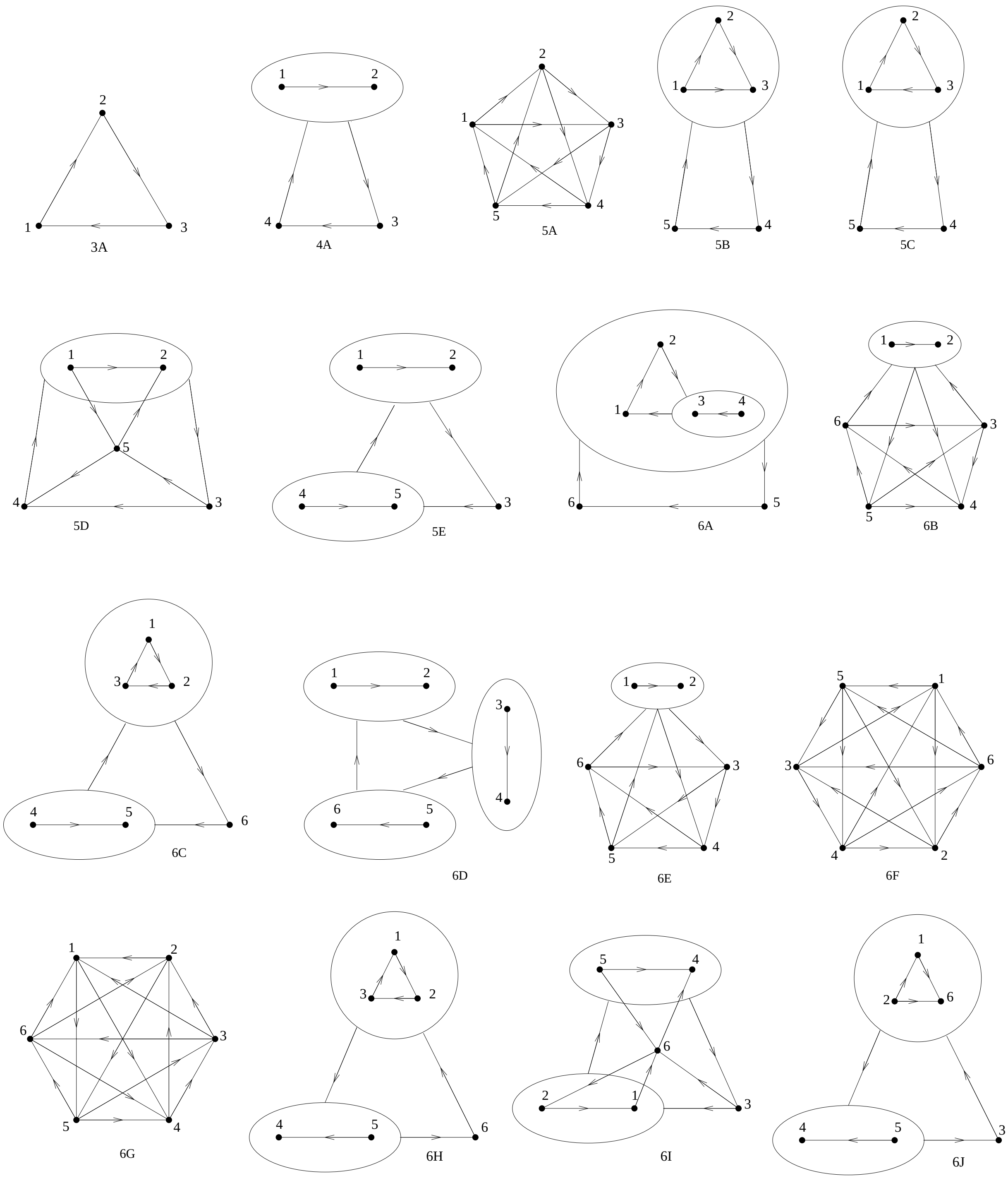

Figure 2.1: Les tournois des petites exceptions.

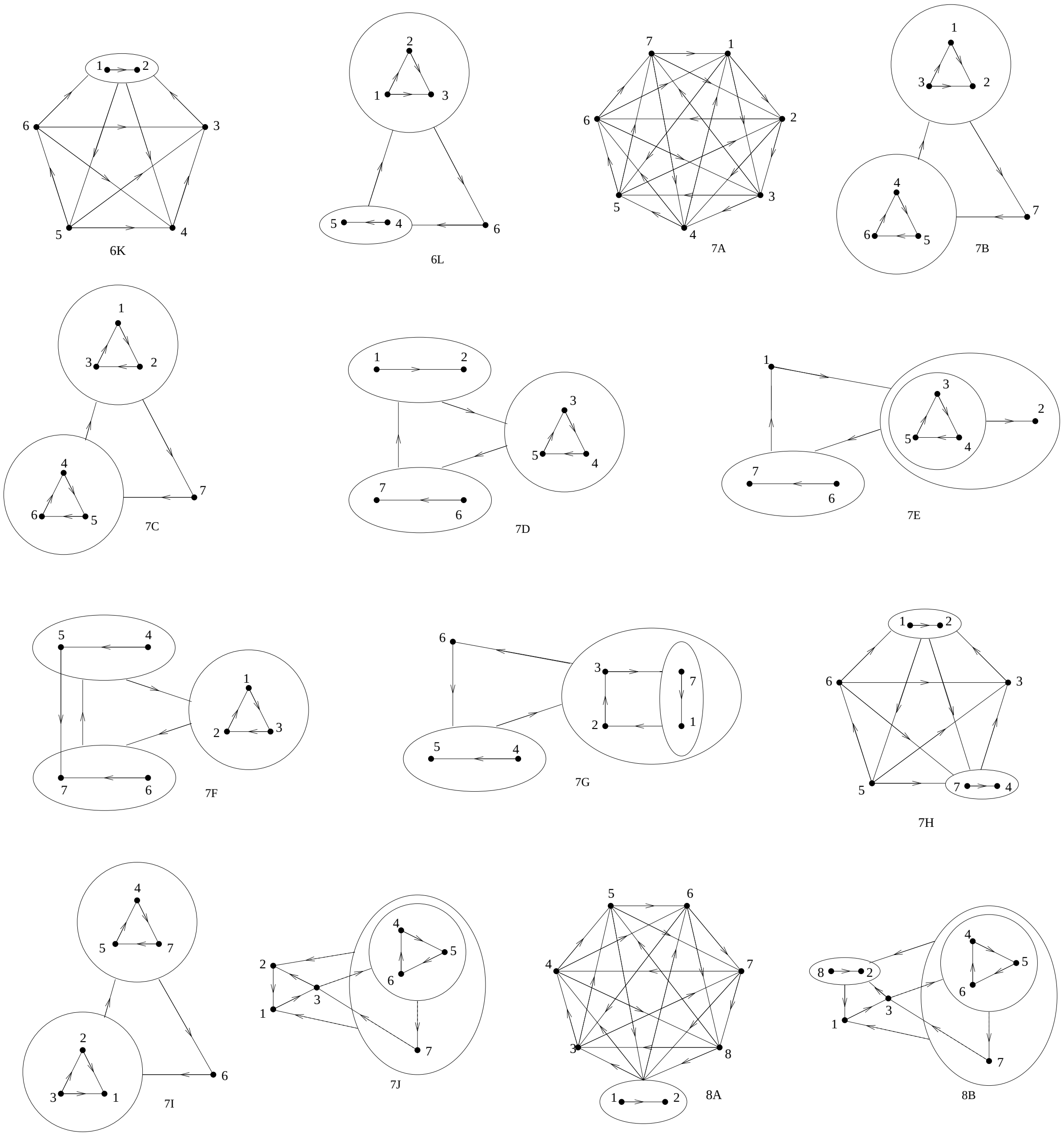

Figure 2.2: Les tournois des petites exceptions.

Exc $\mathcal{E}_3 = (4A; +(2,1))$; $S = \{1,2\}$; $(3,4,2,1)$; $(4,1,3,2)$.
Exc $\mathcal{E}_4 = (5A; +(1,1,1,1))$; $S = \{1,2,3,4,5\}$.
Exc $\mathcal{E}_5 = (5B; +(2,1,1))$; $S = \{1,2,3\}$; $(4,5,2,1,3)$; $(5,1,4,2,3)$.
Exc $\mathcal{E}_6 = (5C; +(1,1,2))$; $S = \{4,5\}$; $(1,2,5,3,4)$; $(2,3,5,1,4)$; $(3,1,5,2,4)$.
Exc $\mathcal{E}_7 = (5C; +(2,1,1))$; $S = \{1,2,3,4\}$; $(5,1,4,2,3)$.
Exc $\mathcal{E}_8 = (5D; +(1,1,1,1))$; $S = \{2,5\}$; $(1,2,5,4,3)$; $(3,5,1,2,4)$; $(4,2,1,5,3)$.
Exc $\mathcal{E}_9 = (5E; +(1,1,1,1))$; $S = \{2,4,5\}$; $(1,2,4,5,3)$; $(3,5,4,2,1)$.
Exc $\mathcal{E}_{10} = (5E; +(1,2,1))$; $S = \{3,5\}$; $(1,2,4,3,5)$; $(2,3,1,4,5)$; $(4,5,3,1,2)$.
Exc $\mathcal{E}_{11} = (5E; +(2,2))$; $S = \{1,2\}$; $(3,4,2,1,5)$; $(4,2,3,1,5)$; $(5,2,3,1,4)$.
Exc $\mathcal{E}_{12} = (5E; +(1,1,2))$; $S = \{1,2\}$; $(3,5,4,1,2)$; $(4,1,5,2,3)$; $(5,1,4,2,3)$.
Exc $\mathcal{E}_{13} = (6A; +(3,1,1))$; $S = \{3,4\}$;
$(1,5,6,3,2,4)$; $(2,5,6,1,4,3)$; $(5,6,2,3,4,1)$; $(6,1,2,3,4,5)$.
Exc $\mathcal{E}_{14} = (6B; +(2,1,1,1))$; $S = \{3,4\}$;
$(1,5,4,3,2,6)$; $(2,5,4,3,1,6)$; $(5,6,2,1,4,3)$; $(6,1,2,3,4,5)$.
Exc $\mathcal{E}_{15} = (6C; +(1,1,2,1))$; $S = \{1,2,3,6\}$; $(4,3,5,2,6,1)$; $(5,3,4,2,6,1)$.
Exc $\mathcal{E}_{16} = (6C; +(1,2,1,1))$; $S = \{4,5,6\}$; $(1,6,3,4,2,5)$; $(2,6,3,4,1,5)$; $(3,6,2,4,1,5)$.
Exc $\mathcal{E}_{17} = (6D; +(2,1,1,1))$; $S = \{2,4,6\}$; $(1,2,4,3,6,5)$; $(3,4,6,5,2,1)$; $(5,6,2,1,4,3)$.
Exc $\mathcal{E}_{18} = (6D; +(1,2,2))$; $S = \{2,4,6\}$; $(1,2,6,3,4,5)$; $(3,4,1,5,6,2)$; $(5,6,4,1,2,3)$.
Exc $\mathcal{E}_{19} = (6D; +(1,1,1,2))$; $S = \{2,4,6\}$; $(1,2,5,6,4,3)$; $(3,4,1,2,6,5)$; $(5,6,3,4,2,1)$.
Exc $\mathcal{E}_{20} = (6E; +(1,1,1,1,1))$; $S = \{1,2\}$;
$(3,4,1,2,5,6)$; $(4,6,5,2,1,3)$; $(5,1,6,3,2,4)$; $(6,2,1,4,3,5)$.
Exc $\mathcal{E}_{21} = (6E; +(2,1,1,1))$; $S = \{1,2\}$;
$(3,4,6,5,2,1)$; $(4,5,2,1,3,6)$; $(5,6,2,1,4,3)$; $(6,3,4,1,2,5)$.
Exc $\mathcal{E}_{22} = (6F; +(1,1,1,1,1))$; $S = \{1,2,3\}$;
$(4,2,1,5,6,3)$; $(5,3,2,6,4,1)$; $(6,1,3,4,5,2)$.
Exc $\mathcal{E}_{23} = (6G; +(1,1,1,1,1))$; $S = \{4,6\}$;
$(1,4,5,6,3,2)$; $(2,1,6,4,5,3)$; $(3,2,6,4,1,5)$; $(5,4,6,1,3,2)$.
Exc $\mathcal{E}_{24} = (6H; +(1,1,1,1,1))$; $S = \{1,2,3,4\}$; $(5,4,3,1,6,2)$; $(6,1,3,4,2,5)$.
Exc $\mathcal{E}_{25} = (6H; +(1,1,1,2))$; $S = \{4,5\}$;
$(1,4,2,5,3,6)$; $(2,4,3,5,1,6)$; $(3,4,1,5,2,6)$; $(6,1,3,4,5,2)$.
Exc $\mathcal{E}_{26} = (6H; +(1,1,3))$; $S = \{4,5,6\}$; $(1,4,5,6,2,3)$; $(2,4,5,6,3,1)$; $(3,4,5,6,1,2)$.
Exc $\mathcal{E}_{27} = (6H; +(1,3,1))$; $S = \{4,6\}$;
$(1,2,6,5,3,4)$; $(2,3,6,5,1,4)$; $(3,1,6,5,2,4)$; $(5,4,3,2,6,1)$.
Exc $\mathcal{E}_{28} = (6H; +(2,1,2))$; $S = \{4,5\}$;
$(1,2,4,5,6,3)$; $(2,3,4,5,6,1)$;$(3,1,4,5,6,2)$; $(6,1,4,2,3,5)$.
Exc $\mathcal{E}_{29} = (6I; +(1,1,1,1,1))$; $S = \{4,6\}$;
$(1,4,5,6,3,2)$; $(2,1,3,6,5,4)$; $(3,6,5,4,2,1)$; $(5,4,6,2,3,1)$.
Exc $\mathcal{E}_{30} = (6J; +(1,1,1,1,1))$; $S = \{4,6\}$;
$(1,6,2,4,5,3)$; $(2,6,1,4,5,3)$; $(3,1,2,4,6,5)$; $(5,4,2,6,3,1)$.
Exc $\mathcal{E}_{31} = (6K; +(1,2,2))$; $S = \{3,4\}$;
$(1,4,6,5,3,2)$; $(2,4,6,5,3,1)$; $(5,4,1,6,3,2)$; $(6,3,4,1,2,5)$.

Exc $\mathcal{E}_{32} = (6L; +(1,2,1,1))$; $S = \{5,6\}$;
$(1,6,3,4,2,5)$; $(2,6,3,4,1,5)$; $(3,6,1,4,2,5)$; $(4,5,6,1,3,2)$.
Exc $\mathcal{E}_{33} = (7A; +(1,1,1,1,1,1))$; $S = \{1,2,3,4,5,6,7\}$.
Exc $\mathcal{E}_{34} = (7B; +(1,1,2,1,1))$; $S = \{1,2,3\}$;
$(4,5,7,6,1,3,2)$; $(5,6,7,4,1,3,2)$; $(6,4,7,5,1,3,2)$; $(7,5,4,1,2,6,3)$.
Exc $\mathcal{E}_{35} = (7B; +(2,1,3))$; $S = \{1,2,3\}$;
$(4,3,1,5,6,2,7)$; $(5,3,1,6,4,2,7)$; $(6,3,1,4,5,2,7)$; $(7,4,3,5,6,1,2)$.
Exc $\mathcal{E}_{36} = (7B; +(2,3,1))$; $S = \{1,2\}$;
$(3,1,2,5,4,7,6)$; $(4,5,6,7,1,3,2)$; $(5,6,4,7,1,3,2)$; $(6,4,5,7,1,3,2)$; $(7,4,2,1,3,5,6)$.
Exc $\mathcal{E}_{37} = (7C; +(1,1,1,1,1,1))$; $S = \{4,5,6\}$;
$(1,2,4,3,5,6,7)$; $(2,3,4,1,5,6,7)$; $(3,1,4,2,5,6,7)$; $(7,5,4,1,6,3,2)$.
Exc $\mathcal{E}_{38} = (7C; +(1,1,2,1,1))$; $S = \{1,2,3\}$;
$(4,1,5,6,3,2,7)$; $(5,1,6,4,3,2,7)$; $(6,1,4,5,3,2,7)$; $(7,5,4,1,2,6,3)$.
Exc $\mathcal{E}_{39} = (7C; +(2,1,3))$; $S = \{1,2,3\}$;
$(4,3,1,5,6,2,7)$; $(5,3,1,6,4,2,7)$; $(6,3,1,4,5,2,7)$; $(7,4,3,5,6,1,2)$.
Exc $\mathcal{E}_{40} = (7D; +(1,1,1,2,1))$; $S = \{1,2\}$;
$(3,4,1,2,7,5,6)$; $(4,5,1,2,7,3,6)$; $(5,3,1,2,7,4,6)$; $(6,2,1,5,4,3,7)$; $(7,2,1,5,4,3,6)$.
Exc $\mathcal{E}_{41} = (7D; +(1,1,1,3))$; $S = \{6,7\}$;
$(1,5,4,6,3,2,7)$; $(2,5,4,6,3,1,7)$; $(3,7,4,5,2,1,6)$; $(4,7,5,3,2,1,6)$; $(5,7,3,4,2,1,6)$.
Exc $\mathcal{E}_{42} = (7D; +(2,2,1,1))$; $S = \{6,7\}$;
$(1,3,4,2,6,7,5)$; $(2,3,4,1,6,7,5)$; $(3,4,6,5,1,2,7)$; $(4,5,6,3,1,2,7)$; $(5,3,6,4,1,2,7)$.
Exc $\mathcal{E}_{43} = (7E; +(1,1,2,1,1))$; $S = \{2,7\}$;
$(1,2,3,6,7,4,5)$; $(3,2,1,4,7,5,6)$; $(4,2,1,3,7,5,6)$; $(5,2,1,3,7,4,6)$; $(6,7,3,4,2,1,5)$.
Exc $\mathcal{E}_{44} = (7F; +(1,1,1,3))$; $S = \{6,7\}$;
$(1,7,3,2,5,4,6)$; $(2,7,1,3,5,4,6)$; $(3,7,2,1,5,4,6)$; $(4,1,2,7,6,3,5)$; $(5,1,2,7,6,3,4)$.
Exc $\mathcal{E}_{45} = (7G; +(2,1,2,1))$; $S = \{1,7\}$;
$(2,6,5,4,3,1,7)$; $(3,6,5,4,7,2,1)$; $(4,3,6,7,1,2,5)$; $(5,3,6,7,1,2,4)$; $(6,5,1,7,2,3,4)$.
Exc $\mathcal{E}_{46} = (7H; +(2,2,2))$; $S = \{4,7\}$;
$(4,1,7,4,6,5,3,2)$; $(2,7,4,6,5,3,1)$; $(3,1,2,6,5,7,4)$; $(5,3,2,1,6,7,4)$; $(6,2,4,7,5,3,1)$.
Exc $\mathcal{E}_{47} = (7I; +(1,1,2,1,1))$; $S = \{4,5,7\}$;
$(1,4,5,6,2,3,7)$; $(2,4,5,6,1,3,7)$; $(3,4,5,6,1,2,7)$; $(6,1,3,5,4,2,7)$.
Exc $\mathcal{E}_{48} = (7J; +(1,1,2,1,1))$; $S = \{1,2\}$;
$(3,2,4,5,1,6,7)$; $(4,2,3,5,1,6,7)$; $(5,2,3,4,1,6,7)$; $(6,2,3,4,1,5,7)$; $(7,2,3,4,1,5,6)$.
Exc $\mathcal{E}_{49} = (8A; +(1,1,1,1,1,1,1))$; $S = \{1,2\}$; $(3,5,4,6,1,2,7,8)$; $(4,6,5,2,7,1,8,3)$;
$(5,6,4,8,7,2,1,3)$; $(6,7,3,4,1,2,8,5)$; $(7,4,3,5,8,2,1,6)$; $(8,5,3,4,7,2,1,6)$.
Exc $\mathcal{E}_{50} = (8A; +(2,1,1,1,1,1))$;$S = \{1,2\}$; $(3,4,6,5,2,7,1,8)$; $(4,6,7,5,2,1,3,8)$;
$(5,6,7,3,4,1,2,8)$; $(6,8,2,1,4,3,7,5)$; $(7,8,2,1,6,4,5,3)$; $(8,3,4,1,2,5,7,6)$.
Exc $\mathcal{E}_{51} = (8B; +(2,1,2,1,1))$; $S = \{2,8\}$; $(1,3,2,4,5,8,6,7)$; $(3,2,1,4,5,8,6,7)$;
$(4,2,1,5,6,8,7,3)$; $(5,2,1,6,4,8,7,3)$; $(6,2,1,4,5,8,7,3)$; $(7,3,2,4,5,8,6,1)$.

Lemme 2.2 *Soient T un tournoi d'ordre n, x un sommet de T et P un chemin sortant d'ordre n tel que $(T-x;^* P)$ soit une petite exception et $^*P$ soit sortant. Si $d^+(x) \geq 2$ et x n'est pas origine de P dans T alors une (et une seule) des deux assertions suivantes est vraie :*

i) $(T;P)$ est une petite exception.

ii) Tout voisin externe de x est origine de P.

Preuve. Nous énumérons toutes les petites exceptions et nous les étendons de toutes les manières possibles par un sommet x de degré externe au moins deux. Afin de rendre cette preuve plus concise, nous utilisons les notations suivantes : supposons que $(T-x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{E}_j$. Nous utilisons deux notations suivant les cas :
i) $[S;\mathcal{E}_k;(x_1,\ldots,x_{n+1})]$ veut dire que le voisinage externe de x dans T est S et que $(T;P)$ est l'exception $\mathcal{E}_k$. L'isomorphisme entre (T,P) et l'exception $\mathcal{E}_k$ est donné par $(x_1\ldots x_{n+1})$, $x_1\ldots x_n$ étant les images de $1\ldots n$ et x_{n+1} l'image de x.
ii) $[S;P_1;\ldots;P_k]$ veut dire que le voisinage externe de x dans T est S, et que chaque sommet de S est origine de T dans S, $P_1;\ldots;P_k$ étant la liste de ces chemins.

Exc $\mathcal{E}_0$: $+(2,1)$ $[\{1,2,3\};\ (1,2,3,x);\ (2,3,1,x);\ (3,1,2,x)]$ $[\{1,2\};\ \mathcal{E}_3;\ (2,3,4,1)]$ Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_1$: $+(2,1,1)$ $[\{1,2\};\ (1,3,x,4,2);\ (2,3,x,4,1)]$ $[\{1,3\};\ \mathcal{E}_7;\ (1,2,4,5,3)]$ $[\{2,3\};\ \mathcal{E}_5;\ (1,3,4,5,2)]$ $[\{1,2,3\};\ \mathcal{E}_5;\ (2,3,4,5,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_2$: $+(2,2)$ $[\{3,4\};\ \mathcal{E}_{11};\ (4,5,2,3,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_3$: $+(3,1)$ $[\{1,2\};\ (1,3,4,2,x);\ (2,3,4,1,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_4$: $+(2,1,1,1)$ $[\{1,2\};\ (1,2,4,3,x,5);\ (2,3,x,5,1,4)]$ $[\{1,3\};\ (1,3,4,2,x,5);\ (3,5,1,4,x,2)]$ $[\{1,2,4\};\ (1,3,4,x,2,5);\ (2,3,5,4,1,x);\ (4,1,2,5,x,3)]$ $[\{1,2,3\};\ \mathcal{E}_{21};\ (2,3,4,5,6,1)]$ $[\{1,2,3,4\};\ (1,3,4,x,2,5);\ (2,3,5,4,1,x);\ (3,5,2,x,1,4);\ (4,5,1,x,3,2)]$ $[\{1,2,3,4,5\};\ (1,3,4,x,2,5);\ (2,4,5,x,3,1);\ (3,5,1,x,4,2);\ (4,1,2,x,5,3);\ (5,2,3,x,1,4)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_5$: $+(3,1,1)$ $[\{1,2,3\};\ (1,4,5,2,x,3);\ (2,4,5,1,x,3);\ (3,4,5,1,x,2)]$ $[\{1,2\};\ (1,4,x,2,5,3);\ (2,4,x,1,5,3)]$ $[\{1,3\};\ (1,4,x,3,5,2);\ (3,4,x,1,5,2)]$ $[\{2,3\};\ (2,4,x,3,5,1);\ (3,4,x,2,5,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_6$: $+(2,1,2)$ $[\{4,5\};\ \mathcal{E}_{28};\ (1,2,3,4,6,5)]$.
Exc $\mathcal{E}_7$: $+(3,1,1)$ $[\{1,2,3,4\};\ (1,4,5,3,x,2);\ (2,4,5,3,x,1);\ (3,4,5,2,x,1);\ (4,5,1,2,x,3)]$ $[\{1,2,4\};\ \mathcal{E}_{13};\ (3,1,2,5,6,4)]$ $[\{1,4\};\ (1,4,5,3,2,x);\ (4,5,2,x,3,1)]$ $[\{1,2\};\ (1,4,x,2,5,3);\ (2,4,x,1,5,3)]$ $[\{1,2,3\};\ (1,4,x,3,5,2);\ (2,4,x,3,5,1);\ (3,4,x,2,5,1)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_8$: $+(2,1,1,1)$ $[\{2,5\};\ (2,3,5,1,x,4);\ (5,4,2,1,x,3)]$.
Exc $\mathcal{E}_9$: $+(2,1,1,1)$ $[\{2,4,5\};\ \mathcal{E}_{14};\ (5,4,6,1,2,3)]$ $[\{4,5\};\ \mathcal{E}_{17};\ (1,2,3,5,6,4)]$ $[\{2,4\};\ (2,3,x,5,1,4);\ (4,1,2,5,x,3)]$ $[\{2,5\};\ (2,3,x,4,1,5);\ (5,1,2,4,x,3)]$.
Exc $\mathcal{E}_{10}$: $+(2,2,1)$ $[\{3,5\};\ (3,4,5,x,1,2);\ (5,2,3,x,4,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_{11}$: $+(3,2)$ $[\{1,2\};\ (1,3,x,2,5,4);\ (2,3,x,1,5,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{12}$: $+(2,1,2)$ $[\{1,2\};\ (1,3,x,4,5,2);\ (2,3,x,4,5,1)]$.

Exc $\mathcal{E}_{13}$: $+(4,1,1)$ $[\{3,4\}; (3,1,2,5,x,6,4); (4,1,2,5,x,6,3)]$.
Exc $\mathcal{E}_{14}$: $+(3,1,1,1)$ $[\{3,4\}; (3,4,6,x,1,5,2); (4,6,3,2,1,x,5)]$.
Exc $\mathcal{E}_{15}$: $+(2,1,2,1)$ $[\{1,2,3,6\}; (1,6,5,4,x,3,2); (2,6,5,4,x,1,3); (3,6,5,4,x,2,1); (6,5,2,4,x,1,3)]$ $[\{1,2,6\}; \mathcal{E}_{45}; (1,2,3,4,5,6,7)]$ $[\{1,2,3\}; (1,2,3,4,5,x,6); (2,3,1,4,5,x,6); (3,1,2,4,5,x,6)]$ $[\{1,2\}; (1,2,3,4,5,x,6); (2,3,1,4,5,x,6)]$ $[\{1,6\}; (1,6,5,4,2,x,3); (6,5,2,4,x,1,3)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{16}$: $+(2,2,1,1)$ $[\{4,5\}; \mathcal{E}_{42}; (3,4,5,1,2,6,7)]$ $[\{4,6\}; (4,5,x,2,1,6,3); (6,5,x,2,4,1,3)]$ $[\{5,6\}; (5,1,6,x,2,3,4); (6,4,x,1,5,3,2)]$ $[\{4,5,6\}; \mathcal{E}_{42}; (3,4,5,1,2,7,6)]$.
Exc $\mathcal{E}_{17}$: $+(3,1,1,1)$ $[\{2,4,6\}; (2,4,5,6,3,x,1); (4,6,1,2,5,x,3); (6,2,3,4,1,x,5)]$ $[\{2,4\}; (2,4,5,6,3,x,1); (4,6,1,2,5,x,3)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{18}$: $+(2,2,2)$ $[\{2,4,6\}; (2,3,4,x,5,6,1); (4,5,6,x,1,2,3); (6,1,2,x,3,4,5)]$ $[\{2,4\}; (2,3,4,x,5,6,1); (4,5,6,3,1,x,2)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{19}$: $+(2,1,1,2)$ $[\{2,4,6\}; (2,3,x,5,6,4,1); (4,5,x,1,2,6,3); (6,1,x,3,4,2,5)]$ $[\{2,4\}; (2,3,x,5,6,4,1); (4,5,x,1,2,6,3)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{20}$: $+(2,1,1,1,1)$ $[\{1,2\}; (1,3,x,4,6,5,2); (2,3,x,4,6,5,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_{21}$: $+(3,1,1,1)$ $[\{1,2\}; (1,3,5,2,6,x,4); (2,3,5,1,6,x,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{22}$: $+(2,1,1,1,1)$ $[\{1,2\}; (1,2,3,6,x,5,4); (2,3,1,4,x,6,5)]$ $[\{1,2,3\}; (1,2,3,6,x,5,4); (2,3,1,4,x,6,5); (3,1,2,5,x,4,6)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{23}$: $+(2,1,1,1,1)$ $[\{4,6\}; (4,2,1,3,x,5,6); (6,1,4,5,x,3,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{24}$: $+(2,1,1,1,1)$ $[\{1,2,3,4\}; (1,2,4,5,x,6,3); (2,3,4,5,x,6,1); (3,1,4,5,x,6,2); (4,6,1,x,3,2,5)]$ $[\{1,2,4\}; (1,2,4,5,x,6,3); (2,3,4,5,x,6,1); (4,6,x,3,5,1,2)]$ $[\{1,4\}; (1,2,4,5,x,6,3); (4,6,x,3,5,1,2)]$ $[\{1,2\}; (1,2,4,5,x,6,3); (2,3,4,5,x,6,1)]$ $[\{1,2,3\}; (1,2,4,5,x,6,3); (2,3,4,5,x,6,1); (3,1,4,5,x,6,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{25}$: $+(2,1,1,2)$ $[\{4,5\}; (4,6,1,3,5,x,2); (5,6,1,3,4,x,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{26}$: $+(2,1,3)$ $[\{4,5,6\}; \mathcal{E}_{35}; (4,5,6,2,1,7,3)]$ $[\{4,5\}; (4,6,x,1,2,3,5); (5,6,x,1,2,3,4)]$ $[\{4,6\}; \mathcal{E}_{35}; (4,5,6,2,3,7,1)]$ $[\{5,6\}; \mathcal{E}_{39}; (4,5,6,1,3,7,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{27}$: $+(2,3,1)$ $[\{4,6\}; \mathcal{E}_{36}; (4,5,6,2,3,7,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_{28}$: $+(3,1,2)$ $[\{4,5\}; (4,6,x,5,1,2,3); (5,6,x,4,1,2,3)]$.
Exc $\mathcal{E}_{29}$: $+(2,1,1,1,1)$ $[\{4,6\}; (4,3,1,2,x,5,6); (6,2,1,3,x,5,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{30}$: $+(2,1,1,1,1)$ $[\{4,6\}; (4,3,x,1,6,2,5); (6,4,3,5,x,2,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_{31}$: $+(2,2,2)$ $[\{3,4\}; \mathcal{E}_{46}; (1,2,3,4,5,6,7)]$.
Exc $\mathcal{E}_{32}$: $+(2,2,1,1)$ $[\{5,6\}; (5,3,6,x,4,2,1); (6,4,5,x,1,3,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{33}$: $+(2,1,1,1,1,1)$. Le tournoi de Paley est arête transitif (i.e. toute arête peut être envoyée sur tout autre par un isomorphisme); ainsi sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\{1,2\} \subseteq N^+(x)$. Prouvons que 2 est une origine de $+(2,1,1,1,1,1)$. Si $x \to 5$ alors $P = (2,4,5,x,1,6,7,3)$, donc on peut désormais supposer $5 \to x$. Si $6 \to x$ alors $P = (2,3,4,7,1,6,x,5)$, et inversement si $x \to 6$ alors $P = (2,4,1,x,6,5,7,3)$. Ainsi 2 est origine de P dans tous les cas. Déterminons maintenant quand 1 n'est pas origine de P: si $x \to 4$, nous avons $(1,3,4,x,2,5,7,6)$, donc $4 \to x$. Si $5 \to x$, nous avons $(1,2,3,6,7,5,x,4)$, donc $x \to 5$. Si $x \to 6$, nous avons $(1,2,6,x,5,3,4,7)$, donc $6 \to x$. Si $3 \to x$, nous avons $(1,2,4,3,x,6,7,5)$, donc $x \to 3$. Si $x \to 7$, nous avons

$(1,2,3,x,7,5,6,4)$, donc $7 \to x$. Finalement pour cette extension précise où x n'est pas origine de P, $(T;P)$ est l'exception $\mathcal{E}_{50}$ avec l'isomorphisme $(2,3,4,5,6,7,8,1)$.
Exc $\mathcal{E}_{34}$: $+(2,1,2,1,1)$ $[\{1,2,3\}; (1,7,x,4,5,3,6,2); (2,7,x,4,5,1,6,3); (3,7,x,4,5,1,6,2)]$ $[\{1,2\}; (1,7,x,4,5,3,6,2); (2,7,x,4,5,1,6,3)]$ $[\{1,3\}; (1,7,x,4,5,3,6,2); (3,7,x,4,5,1,6,2)]$ $[\{2,3\}; (2,7,x,4,5,1,6,3); (3,7,x,4,5,1,6,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{35}$: $+(3,1,3)$ $[\{1,2,3\}; (1,7,5,x,6,4,3,2); (2,7,5,x,6,4,3,1); (3,7,5,x,6,4,1,2)]$ $[\{1,2\}; (1,7,5,x,6,4,3,2); (2,7,5,x,6,4,3,1)]$ $[\{1,3\}; (1,7,5,x,6,4,3,2); (3,7,5,x,6,4,1,2)]$ $[\{2,3\}; (2,7,5,x,6,4,3,1); (3,7,5,x,6,4,1,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{36}$: $+(3,3,1)$ $[\{1,2\}; (1,7,4,2,3,6,5,x); (2,7,4,1,3,6,5,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_{37}$: $+(2,1,1,1,1,1)$ $[\{4,5,6\}; (4,5,1,6,3,2,x,7); (5,6,1,4,3,2,x,7); (6,4,1,5,3,2,x,7)]$ $[\{4,5\}; (4,5,1,6,3,2,x,7); (5,6,1,4,3,2,x,7)]$.
Exc $\mathcal{E}_{38}$: $+(2,1,2,1,1)$ $[\{1,2,3\}; (1,7,x,4,5,3,6,2); (2,7,x,4,5,1,6,3); (3,7,x,4,5,1,6,2)]$ $[\{1,2\}; (1,7,x,4,5,3,6,2); (2,7,x,4,5,1,6,3)]$ $[\{1,3\}; (1,7,x,4,5,3,6,2); (3,7,x,4,5,1,6,2)]$ $[\{2,3\}; (2,7,x,4,5,1,6,3); (3,7,x,4,5,1,6,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{39}$: $+(3,1,3)$ $[\{1,2,3\}; (1,7,5,x,6,4,2,3); (2,7,5,x,6,4,3,1); (3,7,5,x,6,4,1,2)]$ $[\{1,2\}; (1,7,5,x,6,4,2,3); (2,7,5,x,6,4,3,1)]$ $[\{1,3\}; (1,7,5,x,6,4,2,3); (3,7,5,x,6,4,1,2)]$ $[\{2,3\}; (2,7,5,x,6,4,3,1); (3,7,5,x,6,4,1,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{40}$: $+(2,1,1,2,1)$ $[\{1,2\}; (1,3,x,4,5,2,6,7); (2,3,x,4,5,1,6,7)]$.
Exc $\mathcal{E}_{41}$: $+(2,1,1,3)$ $[\{6,7\}; (6,1,x,3,4,2,7,5); (7,1,x,3,4,2,6,5)]$.
Exc $\mathcal{E}_{42}$: $(+3,2,1,1)$ $[\{6,7\}; (6,1,3,7,5,4,x,2); (7,1,3,6,5,4,x,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{43}$: $+(2,1,2,1,1)$ $[\{2,7\}; (2,6,x,1,3,7,4,5); (7,1,x,3,4,6,5,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{44}$: $+(2,1,1,3)$ $[\{6,7\}; (6,4,1,2,7,x,3,5); (7,4,1,2,6,x,3,5)]$.
Exc $\mathcal{E}_{45}$: $+(3,1,2,1)$ $[\{1,7\}; (1,6,5,x,2,3,7,4); (7,6,5,x,2,3,1,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{46}$: $+(3,2,2)$ $[\{4,7\}; (4,3,1,2,6,5,x,7); (7,3,1,2,6,5,x,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{47}$: $+(2,1,2,1,1)$ $[\{4,5,7\}; (4,6,x,3,2,5,1,7); (5,6,x,3,2,4,1,7); (7,6,x,3,2,4,1,5)]$ $[\{4,5\}; (4,6,x,3,2,5,1,7); (5,6,x,3,2,4,1,7)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{48}$: $+(2,1,2,1,1)$ $[\{1,2\}; \mathcal{E}_{51}; (1,2,3,4,5,6,7,8)]$.
Exc $\mathcal{E}_{49}$: $+(2,1,1,1,1,1,1)$ $[\{1,2\}; (1,3,4,2,6,5,x,7,8); (2,3,4,1,6,5,x,7,8)]$.
Exc $\mathcal{E}_{50}$: $+(3,1,1,1,1,1)$ $[\{1,2\}; (1,3,4,5,8,2,7,x,6); (2,3,4,5,8,1,7,x,6)]$.
Exc $\mathcal{E}_{51}$: $+(3,1,2,1,1)$ $[\{2,8\}; (2,1,x,8,3,4,7,5,6); (8,1,x,2,3,4,7,5,6)]$. □

Lemme 2.3 *Soient T un tournoi d'ordre n, x un sommet de T et P un chemin entrant d'ordre n tels que $(T-x;^*P)$ soit une petite exception et $^*P$ un chemin sortant. Si $d^-(x) \geq 2$ et x n'est pas origine de P dans T alors une (et une seule) des deux assertions suivantes est vraie :*
i) $(T;P)$ est une petite exception.
ii) Tout voisin interne de x est origine de P.

Preuve. Nous énumérons toutes les petites exceptions et nous les étendons de toutes les manières possibles par un sommet x de degré interne au moins deux. Les notations sont

essentiellement les mêmes que pour la preuve précédente; cependant lorsque nous faisons référence à une exception, nous le faisons implicitement à sa duale.
Exc $\mathcal{E}_0$: $-(1,1,1)$ $[\{1,2,3\};\ (1,3,x,2);\ (2,1,x,3);\ (3,2,x,1)]$ $[\{1,2\};\ \mathcal{E}_1;\ (3,2,4,1)]$ Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_1$: $-(1,1,1,1)$ $[\{1,2\}; \mathcal{E}_9; (2,1,4,3,5)]$ $[\{1,3\}; \mathcal{E}_8; (2,1,4,3,5)]$ $[\{2,3\}; \mathcal{E}_4; (1,5,4,2,3)]$ $[\{1,2,3\};\ \mathcal{E}_9;\ (2,1,5,3,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_2$: $-(1,1,2)$ $[\{3,4\}; \mathcal{E}_{12}; (5,4,3,2,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_3$: $-(1,2,1)$ $[\{1,2\};\ (1,4,2,3,x);\ (2,4,1,3,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_4$: $-(1,1,1,1,1)$ $[\{1,2\};\ (1,4,5,x,3,2);\ (2,1,3,x,5,4)]$ $[\{1,3\};\ (1,5,2,x,4,3);\ (3,1,2,x,5,4)]$ $[\{1,2,3\};\ \mathcal{E}_{20};\ (4,3,2,6,5,1)]$ $[\{1,2,4\};\ \mathcal{E}_{23};\ (1,2,3,4,5,6)]$ $[\{1,2,3,4\};\ (1,4,5,3,x,2); (2,5,1,4,x,3); (3,2,x,4,1,5); (4,3,x,1,2,5)]$ $[\{1,2,3,4,5\}; (1,4,5,3,x,2); (2,5,1,4,x,3);\ (3,1,2,5,x,4);\ (4,2,3,1,x,5);\ (5,3,4,2,x,1)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_5$: $-(1,2,1,1)$ $[\{1,2,3\};\ (1,5,3,4,2,x);\ (2,5,3,4,1,x);\ (3,5,2,4,1,x)]$ $[\{1,2\};\ (1,5,3,4,2,x); (2,5,3,4,1,x)]$ $[\{1,3\}; (1,5,2,4,3,x); (3,5,2,4,1,x)]$ $[\{2,3\}; (2,5,1,4,3,x);\ (3,5,1,4,2,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_6$: $-(1,1,1,2)$ $[\{4,5\};\ \mathcal{E}_{25};\ (1,3,2,6,4,5)]$.
Exc $\mathcal{E}_7$: $-(1,2,1,1)$ $[\{1,2,3,4\}; \mathcal{E}_{16}; (1,3,2,5,6,4)]$ $[\{1,2,4\}; (1,5,3,4,2,x); (2,5,3,4,1,x); (4,1,2,3,x,5)]$ $[\{1,4\}; (1,3,4,5,x,2); (4,1,2,3,x,5)]$ $[\{1,2\}; (1,5,3,4,2,x); (2,5,3,4,1,x)]$ $[\{1,2,3\};\ (1,5,3,4,2,x);\ (2,5,3,4,1,x);\ (3,5,2,4,1,x)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_8$: $-(1,1,1,1,1)$ $[\{2,5\}; \mathcal{E}_{22}; (1,6,4,5,3,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_9$: $-(1,1,1,1,1)$ $[\{2,4,5\};\ \mathcal{E}_{24};\ (1,3,6,4,5,2)]$ $[\{4,5\};\ \mathcal{E}_{30};\ (1,2,3,4,5,6)]$ $[\{2,4\};\ \mathcal{E}_{29};\ (1,2,3,4,5,6)]$ $[\{2,5\};\ (2,5,1,x,4,3);\ (5,4,2,1,3,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_{10}$: $-(1,1,2,1)$ $[\{3,5\};\ \mathcal{E}_{15};\ (5,4,6,1,3,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{11}$: $-(1,2,2)$ $[\{1,2\};\ \mathcal{E}_{18};\ (2,1,5,4,3,6)]$.
Exc $\mathcal{E}_{12}$: $-(1,1,1,2)$ $[\{1,2\};\ \mathcal{E}_{19};\ (2,1,5,4,3,6)]$.
Exc $\mathcal{E}_{13}$: $-(1,3,1,1)$ $[\{3,4\};\ (3,6,1,2,5,4,x);\ (4,6,1,2,5,3,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_{14}$: $-(1,2,1,1,1)$ $[\{3,4\};\ (3,6,2,4,1,5,x);\ (4,3,x,5,1,2,6)]$.
Exc $\mathcal{E}_{15}$: $-(1,1,1,2,1)$ $[\{1,2,3,6\};\ \mathcal{E}_{40};\ (3,5,4,7,6,2,1)]$ $[\{1,2,6\};\ (1,4,5,x,3,6,2);\ (2,4,5,x,3,6,1); (6,2,3,x,4,1,5)]$ $[\{1,2,3\}; (1,4,3,5,2,6,x); (2,4,3,5,1,6,x); (3,4,2,5,1,6,x)]$ $[\{1,2\}; (1,4,3,5,2,6,x); (2,4,3,5,1,6,x)]$ $[\{1,6\}; (1,4,5,x,3,6,2); (6,2,3,x,4,1,5)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{16}$: $-(1,1,2,1,1)$ $[\{4,5,6\};\ \mathcal{E}_{34};\ (6,5,4,2,1,7,3)]$ $[\{4,5\};\ \mathcal{E}_{43};\ (5,4,3,7,6,1,2)]$ $[\{4,6\}; \mathcal{E}_{34};\ (6,5,4,2,3,7,1)]$ $[\{5,6\};\ \mathcal{E}_{38};\ (6,5,4,3,2,7,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_{17}$: $-(1,2,1,1,1)$ $[\{2,4,6\};\ (2,6,1,4,3,5,x);\ (4,2,3,6,5,1,x);\ (6,4,5,2,1,3,x)]$ $[\{2,4\};\ (2,6,1,4,3,5,x);\ (4,2,3,6,5,1,x)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{18}$: $-(1,1,2,2)$ $[\{2,4,6\}; (2,1,3,x,4,5,6); (4,3,5,x,6,1,2); (6,5,1,x,2,3,4)]$ $[\{2,4\}; (2,1,3,x,4,5,6); (4,1,2,6,x,3,5)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{19}$: $-(1,1,1,1,2)$ $[\{2,4,6\};\ (2,1,4,3,6,5,x);\ (4,3,6,5,2,1,x);\ (6,5,2,1,4,3,x)]$

$[\{2,4\};\ (2,1,4,3,6,5,x);\ (4,3,6,5,2,1,x)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{20}$: $-(1,1,1,1,1,1)$ $[\{1,2\}; (1,5,6,x,4,2,3); (2,5,6,x,4,1,3)]$.
Exc $\mathcal{E}_{21}$: $-(1,2,1,1,1)$ $[\{1,2\}; (1,6,2,3,x,5,4); (2,6,1,3,x,5,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{22}$: $-(1,1,1,1,1,1)$ $[\{1,2,3\}; \mathcal{E}_{33}; (1,7,3,2,4,5,6)]$ $[\{1,2\}; (1,4,2,5,3,x,6); (2,5,4,x,3,6,1)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{23}$: $-(1,1,1,1,1,1)$ $[\{4,6\}; (4,5,6,3,2,x,1); (6,5,3,4,2,x,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_{24}$: $-(1,1,1,1,1,1)$ $[\{1,2,4\}; (1,3,4,2,5,x,6); (2,1,4,3,5,x,6); (4,1,5,2,3,x,6)]$
$[\{1,4\}; (1,3,4,2,5,x,6); (4,1,5,2,3,x,6)]$ $[\{1,2\}; (1,3,4,2,5,x,6); (2,1,4,3,5,x,6)]$
$[\{1,2,3\}; (1,3,4,2,5,x,6); (2,1,4,3,5,x,6); (3,2,4,1,5,x,6)]$
$[\{1,2,3,4\}; \mathcal{E}_{37}; (1,3,2,4,5,7,6)]$.
Exc $\mathcal{E}_{25}$: $-(1,1,1,1,2)$ $[\{4,5\}; (4,3,5,1,2,6,x); (5,3,4,1,2,6,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_{26}$: $-(1,1,1,3)$ $[\{4,5,6\}; \mathcal{E}_{41}; (5,4,3,1,2,7,6)]$ $[\{4,6\}; \mathcal{E}_{44}; (1,2,3,4,5,6,7)]$
$[\{4,5\}; (4,1,2,x,3,5,6); (5,1,2,x,3,4,6)]$ $[\{5,6\}; (5,1,2,x,3,4,6); (6,5,4,x,1,2,3)]$.
Exc $\mathcal{E}_{27}$: $-(1,1,3,1)$ $[\{4,6\}; (4,3,5,2,1,6,x); (6,5,4,3,2,x,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_{28}$: $-(1,2,1,2)$ $[\{4,5\}; (4,1,5,6,x,2,3); (5,1,4,6,x,2,3)]$.
Exc $\mathcal{E}_{29}$: $-(1,1,1,1,1,1)$ $[\{4,6\}; (4,5,6,3,2,x,1); (6,3,1,x,5,2,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{30}$: $-(1,1,1,1,1,1)$ $[\{4,6\}; (4,5,3,x,1,2,6); (6,2,1,x,3,5,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{31}$: $-(1,1,2,2)$ $[\{3,4\}; (3,5,4,2,x,6,1); (4,6,3,5,x,1,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{32}$: $-(1,1,2,1,1)$ $[\{5,6\}; \mathcal{E}_{47}; (1,2,3,4,5,6,7)]$.
Exc $\mathcal{E}_{33}$: $-(1,1,1,1,1,1,1)$. Le tournoi de Paley est arête transitif; ainsi sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\{1,2\} \subseteq N^-(x)$. Prouvons que 1 est origine de $-(1,1,1,1,1,1,1) = P$ dans T. Si $3 \to x$ alors $P = (1,4,6,5,7,3,x,2)$, donc nous pouvons supposer que $x \to 3$. Si $6 \to x$ alors $P = (1,4,5,3,7,6,x,2)$, et inversement si $x \to 6$ alors $P = (1,7,4,2,3,x,6,5)$. Donc 1 est origine de P dans tous les cas. Déterminons maintenant quand 2 n'est pas origine de P: si $3 \to x$, nous avons $P = (2,1,x,3,7,5,6,4)$, donc $x \to 3$. Si $x \to 7$, nous avons $P = (2,1,3,x,7,5,6,4)$, donc $7 \to x$. Si $x \to 5$ nous avons $P = (2,7,1,6,3,x,5,4)$, donc $5 \to x$. Si $4 \to x$ nous avons $P = (2,1,3,6,75,x,4)$, donc $x \to 4$. Si $6 \to x$ nous avons $P = (2,7,4,3,5,1,x,6)$, donc $x \to 6$. Finalement pour cette extension précise où x n'est pas origine de P, $(T;P)$ est l'exception $\mathcal{E}_{49}$ avec l'isomorphisme $(3,2,8,7,6,5,4,1)$.
Exc $\mathcal{E}_{34}$: $-(1,1,1,2,1,1)$ $[\{1,2\}; (1,3,7,x,6,2,4,5); (2,3,7,x,6,1,4,5)]$
$[\{1,3\}; (1,3,7,x,6,2,4,5); (3,6,2,1,x,5,7,4)]$ $[\{2,3\}; (2,3,7,x,6,1,4,5); (3,6,1,x,7,5,4,2)]$ $[\{1,2,3\}; (1,3,7,x,6,2,4,5); (2,3,7,x,6,1,4,5); (3,6,2,1,x,5,7,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{35}$: $-(1,2,1,3)$ $[\{1,2,3\}; (1,4,3,7,x,5,6,2); (2,4,1,7,x,5,6,3); (3,4,1,7,x,5,6,2)]$
$[\{1,2\}; (1,4,3,7,x,5,6,2); (2,4,1,7,x,5,6,3)]$ $[\{1,3\}; (1,4,3,7,x,5,6,2); (3,4,1,7,x,5,6,2)]$ $[\{2,3\}; (2,4,1,7,x,5,6,3); (3,4,1,7,x,5,6,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{36}$: $-(1,2,3,1)$ $[\{1,2\}; (1,4,3,7,x,2,5,6); (2,4,3,7,x,1,5,6)]$.
Exc $\mathcal{E}_{37}$: $-(1,1,1,1,1,1,1)$ $[\{4,5,6\}; (4,6,1,5,3,x,7,2); (5,4,1,6,3,x,7,2); (6,5,1,4,3,x,7,2)]$ $[\{4,5\}; (4,6,1,5,3,x,7,2); (5,4,1,6,3,x,7,2)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.

Exc $\mathcal{E}_{38}$: $-(1,1,1,2,1,1)$ $[\{1,2,3\};$ $(1,3,7,x,6,2,4,5)$; $(2,1,7,x,6,3,4,5)$; $(3,2,7,x,6,1,4,5)]$ $[\{1,2\};$ $(1,3,7,x,6,2,4,5)$; $(2,1,7,x,6,3,4,5)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{39}$: $-(1,2,1,3)$ $[\{1,2,3\};$ $(1,4,3,7,x,5,6,2)$; $(2,4,1,7,x,5,6,3)$; $(3,4,1,7,x,5,6,2)]$ $[\{1,2\};$ $(1,4,3,7,x,5,6,2)$; $(2,4,1,7,x,5,6,3)]$ $[\{1,3\};$ $(1,4,3,7,x,5,6,2)$; $(3,4,1,7,x,5,6,2)]$ $[\{2,3\};$ $(2,4,1,7,x,5,6,3)$; $(3,4,1,7,x,5,6,2)]$.
Exc $\mathcal{E}_{40}$: $-(1,1,1,1,2,1)$ $[\{1,2\};$ $(1,6,7,x,4,3,2,5)$; $(2,6,7,x,4,3,1,5)]$.
Exc $\mathcal{E}_{41}$: $-(1,1,1,1,3)$ $[\{6,7\};$ $(6,3,7,4,5,2,1,x)$; $(7,3,6,4,5,2,1,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_{42}$: $-(1,2,2,1,1)$ $[\{6,7\};$ $(6,4,5,7,3,1,2,x)$; $(7,4,5,6,3,1,2,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_{43}$: $-(1,1,1,2,1,1)$ $[\{2,7\};$ $(2,4,5,x,3,7,6,1)$; $(7,6,1,x,3,2,4,5)]$.
Exc $\mathcal{E}_{44}$: $-(1,1,1,1,3)$ $[\{6,7\};$ $(6,1,7,3,2,54,x)$; $(7,1,6,3,2,5,4,x)]$.
Exc $\mathcal{E}_{45}$: $-(1,2,1,2,1)$ $[\{1,7\};$ $(1,4,2,6,x,5,7,3)$; $(7,4,2,6,x,5,1,3)]$.
Exc $\mathcal{E}_{46}$: $-(1,2,2,2)$ $[\{4,7\};$ $(4,5,6,2,x,7,3,1)$; $(7,5,6,2,x,4,3,1)]$.
Exc $\mathcal{E}_{47}$: $-(1,1,1,2,1,1)$ $[\{4,5\};$ $(4,2,5,7,6,3,x,1)$; $(5,2,7,4,6,3,x,1)]$ $[\{4,5,7\};$ $(4,2,5,7,6,3,x,1)$; $(5,2,7,4,6,3,x,1)$; $(7,2,4,5,6,3,x,1)]$. Les autres voisinages possibles de x sont équivalents.
Exc $\mathcal{E}_{48}$: $-(1,1,1,2,1,1)$ $[\{1,2\};$ $(1,4,7,x,3,2,5,6)$; $(2,3,4,x,5,1,6,7)]$.
Exc $\mathcal{E}_{49}$: $-(1,1,1,1,1,1,1,1)$ $[\{1,2\};$ $(1,8,5,3,4,2,6,x,7)$; $(2,8,5,3,4,1,6,x,7)]$.
Exc $\mathcal{E}_{50}$: $-(1,2,1,1,1,1,1)$ $[\{1,2\};$ $(1,8,2,3,6,7,x,5,4)$; $(2,8,1,3,6,7,x,5,4)]$.
Exc $\mathcal{E}_{51}$: $-(1,2,1,2,1,1)$ $[\{2,8\};$ $(2,7,3,8,4,5,1,x,6)$; $(8,7,3,2,4,5,1,x,6)]$.
□

2.3 Les familles infinies d'exceptions.

Définition 4 - Nous introduisons maintenant les *familles infinies d'exceptions*, $\mathcal{F}_i(n) = (F_i(n), P_i(n))$, où $F_i(n)$ est le tournoi sur n sommets dessiné figure 2.3 et $P_i(n)$ un chemin d'ordre n. Pour chacune de ces exceptions, nous donnons S, l'ensemble des sommets de $F_i(n)$ qui ne sont pas origine de $P_i(n)$. De plus, nous donnons des conditions sur le tournoi $F_i(n)$. Enfin, nous donnons les chemins $P_i(n)$ d'origine x, pour $x \notin S$.

Exception $\mathcal{F}_1(n) = (F_1(n), +(1, n-2))$; $S = \{1,2,3\}$. Conditions: $|X| \geq 1$. Chemins: Pour tout $u \in X$, $P = (u, 1, 3, 2, I_{X-u})$.

Exception $\mathcal{F}_2(n) = (F_2(n), +(2, n-3))$; $S = \{3,4\}$. Conditions: $|X| \geq 1$. Chemins: $P = (1,2,3,4,I_X)$, $P = (2,3,1,4,I_X)$ et pour tout $u \in X$, $P = (u,4,3,2,1,I_{X-u})$.

Exception $\mathcal{F}_3(n) = (F_3(n), +(1, n-2))$; $S = \{1,3\}$. Conditions: $N^+(3) \neq \{2\}$ et 3 est un ingénérateur de $T(X)$ (en particulier, il y a un chemin hamiltonien descendant $(u, 3, R_1)$ de $T(X)$ et un autre $(3, v, R_2)$). Chemins: $P = (2,1,u,3,R_1)$, et pour tout $y \in X - 3$, $P = (y, 1, 2, I_{X-y})$.

Exception $\mathcal{F}_4(n) = (F_4(n), +(2, n-3))$; $S = \{1,4\}$. Conditions: $N^+(3) \neq \{2\}$ et 3 est un ingénérateur de $T(X)$ (en particulier, il y a un chemin hamiltonien descendant $(u, 3, R_1)$ de $T(X)$ et un autre $(3, v, R_2)$). Chemins: $P = (2,1,4,u,3,R_1)$, $P = (3,2,4,1,v,R_2)$ et

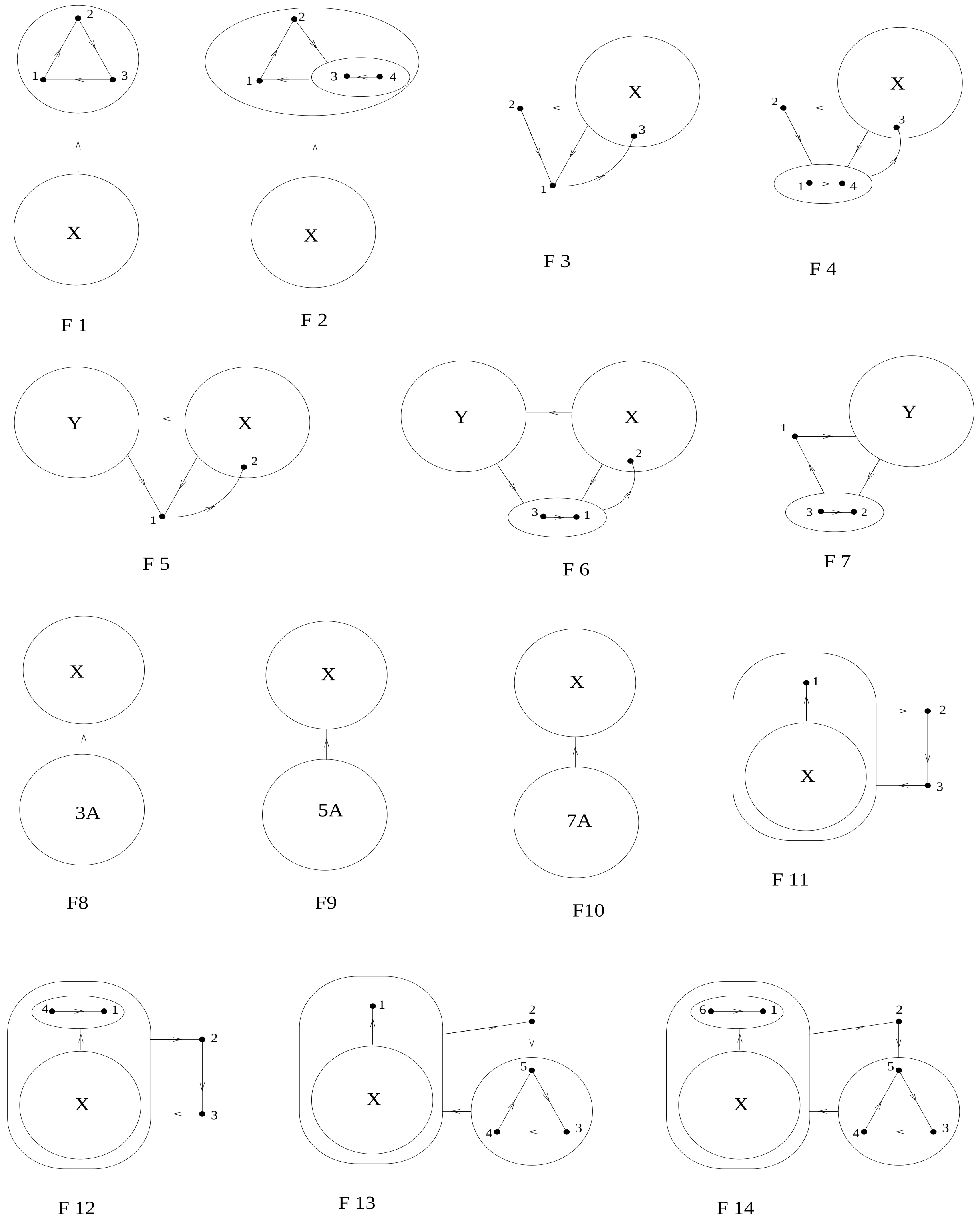

Figure 2.3: Les familles infinies d'exceptions.

pour tout $y \in X - 3$, $P = (y, 1, 4, 2, I_{X-y})$.

Exception $\mathcal{F}_5(n) = (F_5(n), +(1, n-2))$; $S = \{1, 2\}$. Conditions: $n \geq 5$, $|Y| \geq 2$ et 2 est un ingénérateur de $T(X)$. Chemins: pour tout $x \in X - 2$, $P = (x, 1, I_Y, I_{X-x})$ et pour tout $y \in Y$, $P = (y, 1, I_{Y-y}, I_X)$.

Exception $\mathcal{F}_6(n) = (F_6(n), +(2, n-3))$; $S = \{1, 3\}$. Conditions: $|Y| \geq 2$ et 2 est un ingénérateur de $T(X)$. Chemins: pour tout $x \in X$, $P = (x, z, 1, 3, I_{Y-z}, I_{X-x})$ (pour un $z \in Y$ fixé) et pour tout $y \in Y$, $P = (y, 3, 1, I_{Y-y}, I_X)$.

Exception $\mathcal{F}_7(n) = (F_7(n), +(1, 1, n-3))$, $S = \{2, 3\}$. Conditions: $T(Y)$ n'est pas un 3-cycle (i.e. $T(Y)$ n'est pas isomorphe à 3A) et $|Y| \geq 3$. Chemins: comme $T(Y)$ n'est pas un 3-cycle, il y a un chemin $Q = -(1, n-5)$ dans $T(Y)$ (c'est clair si $T(Y)$ est réductible; si $T(Y)$ est fortement connexe avec au moins 4 sommets, on peut trouver un sommet $w \in Y$ tel que $T(Y) - w$ est fortement connexe: un tel sommet w est alors une origine de Q), on a donc $P = (1, Q, 3, 2)$. Pour tout $y \in Y$, $P = (y, 2, 3, 1, O_{Y-y})$.

Exception $\mathcal{F}_8 = (F_8(n), +(n-4, 1, 1, 1))$; $S = X$. Conditions: 3A est le 3-cycle (cf figure 2.1), et $|X| \geq 2$. Chemins: $P = (1, O_{X-u}, 2, u, 3)$, $P = (2, O_{X-u}, 1, u, 3)$ et $P = (3, O_{X-u}, 2, u, 1)$ pour $u \in X$.

Exception $\mathcal{F}'_8(n) = (F_8(n), +(n-4, 2, 1))$; $S = X$. Conditions: 3A est le 3-cycle (cf figure 2.1), et $|X| \geq 2$. Chemins: $P = (1, O_{X-u}, 3, 2, u)$, $P = (2, O_{X-u}, 1, 3, u)$ et $P = (3, O_{X-u}, 2, 1, u)$ pour $u \in X$.

Exception $\mathcal{F}_9(n) = (F_9(n), +(n-6, 1, 1, 1, 1, 1))$; $S = X$. Conditions: 5A est le tournoi 2-régulier (cf figure 2.1), et $|X| \geq 2$. Chemins: $P = (1, O_{X-u}, 2, u, 4, 5, 3)$, $P = (2, O_{X-u}, 3, u, 5, 1, 4)$, $P = (3, O_{X-u}, 4, u, 1, 2, 5)$, $P = (4, O_{X-u}, 5, u, 2, 3, 1)$ et $P = (5, O_{X-u}, 1, u, 3, 4, 2)$ pour $u \in X$.

Exception $\mathcal{F}'_9(n) = (F_9(n), +(n-6, 2, 1, 1, 1))$; $S = X$. Conditions: 5A est le tournoi 2-régulier (cf figure 2.1), et $|X| \geq 2$. Chemins: $P = (1, O_{X-u}, 3, 2, u, 4, 5)$, $P = (2, O_{X-u}, 4, 3, u, 5, 1)$, $P = (3, O_{X-u}, 5, 4, u, 1, 2)$, $P = (4, O_{X-u}, 1, 5, u, 2, 3)$ et $P = (5, O_{X-u}, 2, 1, u, 3, 4)$ pour $u \in X$.

Exception $\mathcal{F}_{10}(n) = (F_{10}(n), +(n-8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1))$;$S = X$. Conditions: 7A est le tournoi de Paley à sept sommets, (cf figure 2.2), et $|X| \geq 2$. Chemins: $P = (1, O_{X-\{u\}}, 2, u, 4, 5, 3, 7, 6)$, $P = (2, O_{X-u}, 3, u, 5, 6, 4, 1, 7)$, $P = (3, O_{X-u}, 4, u, 6, 7, 5, 2, 1)$, $P = (4, O_{X-u}, 5, u, 7, 1, 6, 3, 2)$, $P = 5(O_{X-u}, 6, u, 1, 2, 7, 4, 3)$, $P = (6, O_{X-u}, 7, u, 2, 3, 1, 5, 4)$ et $P = (7, O_{X-u}, 1, u, 3, 4, 2, 6, 5)$ pour $u \in X$.

Exception $\mathcal{F}'_{10}(n) = ((F_{10}(n), +(n-8, 2, 1, 1, 1, 1, 1))$; $S = X$. Conditions: 7A est le tournoi de Paley à sept sommets, (cf figure 2.2), et $|X| \geq 2$. Chemins: $P = (1, O_{X-u}, 3, 2, u, 4, 6, 5, 7)$, $P = (2, O_{X-u}, 4, 3, u, 5, 7, 6, 1)$, $P = (3, O_{X-u}, 5, 4, u, 6, 1, 7, 2)$, $P = (4, O_{X-u}, 6, 5, u, 7, 2, 1, 3)$, $P = (5, O_{X-u}, 7, 6, u, 1, 3, 2, 4)$, $P = (6, O_{X-u}, 1, 7, u, 2, 4, 3, 5)$ et $P = (7, O_{X-u}, 2, 1, u, 3, 5, 4, 6)$ pour $u \in X$.

Exception $\mathcal{F}_{11}(n) = (F_{11}(n), +(1, 1, n-3))$; $S = \{1, 2\}$. Conditions: $|X| \geq 2$. Chemins: $P = (3, 1, O_X, 2)$ et pour tout $u \in X$, $P = (u, 1, O_{X-u}, 2, 3)$.

Exception $\mathcal{F}_{12} = (F_{12}(n), +(2, 1, n-4))$; $S = \{1, 4\}$. Conditions: $|X| \geq 2$. Chemins: $P = (2, 3, 1, O_X, 4)$ et pour tout $u \in X$, $P = (u, 4, 1, O_{X-u}, 2, 3)$.

Exception $\mathcal{F}_{13} = (F_{13}(n), (1, 1, n-3))$; $S = \{1, 2\}$. Conditions: $|X| \geq 2$. Chemins: $P = (3, 4, 2, 5, O_X, 1)$, $P = (4, 5, 2, 3, O_X, 1)$, $P = (5, 3, 2, 4, O_X, 1)$ et pour tout u, v in X, $P = (u, 1, v, 2, 3, 4, 5, O_{X-(u,v)})$.

Exception $\mathcal{F}_{14} = (F_{14}(n), (2, 1, n-4))$; $S = \{1, 6\}$. Conditions: $|X| \geq 2$. Chemins: Pour tout sommet u de X, $P = (2, 4, u, 5, 3, O_{X-u}, 6, 1)$, $P = (3, u, 1, 6, 2, 4, 5, O_{X-u})$, $P = (4, u, 1, 6, 2, 5, 3, O_{X-u})$, $P = (5, u, 1, 6, 2, 3, 4, O_{X-u})$ et $P = (u, 6, 1, 3, 4, 5, O_{X-u}, 2)$.

Lemme 2.4 *Soient T un tournoi d'ordre n, x un sommet de T et P un chemin sortant d'ordre n tels que ${}^*P$ soit sortant et $(T-x; {}^*P)$ soit une exception $\mathcal{F}_i(n-1)$. Si $d^+(x) \geq 2$ et x n'est pas origine de P dans T alors une (et une seule) des deux assertions suivantes est vraie :*

i) $(T; P)$ est une exception $\mathcal{F}_j(n)$.

ii) Tout voisin externe de x est origine de P.

Preuve. Les notations sont essentiellement les mêmes que pour les petites exceptions.

Exc $\mathcal{F}_1(n-1)$: $P = +(2, n-3)$. $[\{1, 2, 3\}; (1, 2, 3, x, I_X); (2, 3, 1, x, I_X); (3, 1, 2, x, I_X)]$ et $[\{1, 2\}; \mathcal{F}_2(n)]$. Les autres voisinages possibles sont équivalents.

Exc $\mathcal{F}_2(n-1)$: $P = +(3, n-4)$. $[\{3, 4\}; (3, 1, 2, 4, x, I_X); (4, 1, 2, 3, x, I_X)]$.

Exc $\mathcal{F}_3(n-1)$: $P = +(2, n-3)$. $[\{1, 3\}; \mathcal{F}_4(n)]$.

Exc $\mathcal{F}_4(n-1)$: $P = +(3, n-4)$. $[\{1, 4\}; (1, 3, x, 4, 2, v, R_2); (4, 3, x, 1, 2, v, R_2)]$.

Exc $\mathcal{F}_5(n-1)$: $P = +(2, n-3)$. $[\{1, 2\}; \mathcal{F}_6(n)]$.

Exc $\mathcal{F}_6(n-1)$: $P = +(3, n-4)$. $[\{1, 3\}; (1, 2, x, 3, I_Y, I_{X-2}); (3, 2, x, 1, I_Y, I_{X-2})]$.

Exc $\mathcal{F}_7(n-1)$: $P = +(2, 1, n-4)$. $[\{2, 3\}; (2, 1, x, O_Y, 3); (3, 1, x, O_Y, 2)]$.

Exc $\mathcal{F}_8(n-1)$: $P = +(n-4, 1, 1, 1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^+(x) \subseteq X$. Ainsi $x \leftarrow 3A$ et nous sommes dans l'exception $\mathcal{F}_8(n)$.

Exc $\mathcal{F}'_8(n-1)$: $P = +(n-4, 2, 1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^+(x) \subseteq X$. Ainsi $x \leftarrow 3A$ et nous sommes dans l'exception $\mathcal{F}'_8(n)$.

Exc $\mathcal{F}_9(n-1)$: $P = +(n-6, 1, 1, 1, 1, 1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^+(x) \subseteq X$. Ainsi $x \leftarrow 5A$ et nous sommes dans l'exception $\mathcal{F}_9(n)$.

Exc $\mathcal{F}'_9(n-1)$: $P = +(n-6, 2, 1, 1, 1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^+(x) \subseteq X$. Ainsi $x \leftarrow 5A$ et nous sommes dans l'exception $\mathcal{F}'_9(n)$.

Exc $\mathcal{F}_{10}(n-1)$: $P = +(n-8, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^+(x) \subseteq X$. Ainsi $x \leftarrow 5A$ et nous sommes dans l'exception $\mathcal{F}_{10}(n)$.

Exc $\mathcal{F}'_{10}(n-1)$: $P = +(n-8, 2, 1, 1, 1, 1, 1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^+(x) \subseteq X$. Ainsi $x \leftarrow 5A$ et nous sommes dans l'exception $\mathcal{F}'_{10}(n)$.

Exc $\mathcal{F}_{11}(n-1)$: $P = +(2, 1, n-4)$. $[\{1, 2\}; \mathcal{F}_{12}(n)]$.

Exc $\mathcal{F}_{12}(n-1)$: $P = +(3, 1, n-5)$. $[\{1, 4\}; (1, 2, x, 4, 3, O_X); (4, 2, x, 1, 3, O_X)]$.

Exc $\mathcal{F}_{13}(n-1)$: $P = +(2, 1, n-4)$. $[\{1, 2\}; \mathcal{F}_{14}(n)]$.

Exc $\mathcal{F}_{14}(n-1)$: $P = +(3, 1, n-5)$. $[\{1, 6\}; (1, 2, x, 6, 3, 4, 5, O_X); (6, 2, x, 1, 3, 4, 5, O_X)]$.

□

Lemme 2.5 *Soient T un tournoi d'ordre n, x un sommet de T et P un chemin entrant d'ordre n tels que $(T-x, {}^*P)$ soit une exception $\mathcal{F}_i(n-1)$ et ${}^*P$ un chemin sortant. Si $d^-(x) \geq 2$ et x n'est pas origine de P dans T, alors une (et une seule) des deux assertions suivantes est vraie:*

i) $(T;P)$ est le dual d'une exception $\mathcal{F}_j(n)$ ou $\mathcal{E}_k$.

ii) Tout voisin interne de x est origine de P.

Preuve. Exc $\mathcal{F}_1(n-1)$: $P=-(1,1,n-3)$. $[\{1,2,3\}$; $(1,3,x,2,I_X)$; $(2,1,x,3,I_X)$; $(3,2,x,1,I_X)]$, $[\{1,2\}$; $(1,u,3,x,2,I_{X-u})$; $(2,u,3,x,1,I_{X-u})]$ pour $u\in X$.

Exc $\mathcal{F}_2(n-1)$: $P=-(1,2,n-4)$. $[\{3,4\}$; $(3,2,4,1,I_X,x)$; $(4,2,3,1,I_X,x)]$.

Exc $\mathcal{F}_3(n-1)$: $P=-(1,1,n-3)$. $[\{1,3\}$; $(1,u,2,x,3,R_1)$; $(3,v,1,2,R_2,x)]$.

Exc $\mathcal{F}_4(n-1)$: $P=-(1,2,n-4)$. $[\{1,4\}$; $(1,v,3,2,x,4,R_2)$; $(4,v,3,2,x,1,R_2)]$.

Exc $\mathcal{F}_5(n-1)$: $P=-(1,1,n-3)$. Nous devons distinguer trois cas:
i) Si $X=\{2\}$ et $T(Y)$ n'est pas un 3-cycle, on est dans le dual de l'exception $\mathcal{F}_7(n)$.
ii) Si $X=\{2\}$ et $T(Y)$ est un 3-cycle, on est dans le dual de l'exception $\mathcal{E}_{26}$.
iii) Si $|X|\geq 2$, comme 2 est un ingénérateur de $T(X)$, il y a un chemin descendant $(2,Q)$ de $T(X)$ de fin v et u un sommet tel que $u\to 2$ et nous avons $[\{1,2\}$; $(1,v,I_Y,x,2,Q^*)$; $(2,u,I_Y,x,1,I_{X-(u,2)})]$.

Exc $\mathcal{F}_6(n-1)$: $P=-(1,2,n-4)$. Nous devons distinguer trois cas:
i) Si $X=\{2\}$ et $|Y|\geq 3$, soient $u\to v\to w$ trois sommets de Y, nous avons $[\{1,3\}$; $(1,u,v,w,2,x,3,I_{Y-(u,v,w)})$; $(3,u,v,w,2,x,1,I_{Y-(u,v,w)})]$.
ii) Si $|X|=\{2\}$ et $|Y|=2$, nous sommes dans le dual de l'exception $\mathcal{E}_{18}$.
iii) Si $|X|\geq 2$, comme 2 est un ingénérateur de $T(X)$, il existe une arête $u\to 2$ dans $T(X)$ et nous avons $[\{1,3\}$; $(1,u,2,I_Y,x,3,I_{X-(2,u)})$; $(3,u,2,I_Y,x,1,I_{X-(2,u)})]$.

Exc $\mathcal{F}_7(n-1)$: $P=-(1,1,1,n-4)$. Soit $u\to v$ une arête de $T(Y)$ (notons que $Y-(u,v)$ n'est pas vide), $[\{2,3\}$; $(2,u,v,x,O_{Y-(u,v)},3,1)$; $(3,u,v,x,O_{Y-(u,v)},2,1)]$.

Exc $\mathcal{F}_8(n-1)$: $P=-(1,n-5,1,1,1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^-(x)\subseteq X$. Soit $u\in X$ un voisin interne de x, alors $P=(u,1,O_{X-u},2,3,x)$.

Exc $\mathcal{F}'_8(n-1)$: $P=-(1,n-5,2,1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^-(x)\subseteq X$. Soit $u\in X$ un voisin interne de x, alors $P=(u,1,O_{X-u},2,x,3)$.

Exc $\mathcal{F}_9(n-1)$: $P=-(1,n-7,1,1,1,1,1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^-(x)\subseteq X$. Soit $u\in X$ un voisin interne de x, alors $P=(u,1,O_{X-u},2,4,3,5,x)$.

Exc $\mathcal{F}'_9(n-1)$: $P=-(1,n-7,2,1,1,1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^-(x)\subseteq X$. Soit $u\in X$ un voisin interne de x, alors $P=(u,1,O_{X-u},2,x,4,3,5)$.

Exc $\mathcal{F}_{10}(n-1)$: $P=-(1,n-9,1,1,1,1,1,1,1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^-(x)\subseteq X$. Soit $u\in X$ un voisin interne de x, alors $P=(u,1,O_{X-u},2,4,3,7,5,6,x)$.

Exc $\mathcal{F}'_{10}(n-1)$: $P=-(1,n-9,2,1,1,1,1,1)$. Si x n'est pas origine de P, alors $N^-(x)\subseteq X$. Soit $u\in X$ un voisin interne de x, alors $P=(u,1,O_{X-u},2,x,4,3,7,5,6)$.

Exc $\mathcal{F}_{11}(n-1)$: $P=-(1,1,1,n-4)$. Soit $u\to v$ une arête de $T(X)$, $[\{1,2\}$; $(1,3,v,u,2,x,O_{X-(u,v)})$; $(2,u,v,x,3,O_{X-(u,v)},1)]$. (Notons que $O_{X-(u,v)}$ peut être le chemin vide.)

Exc $\mathcal{F}_{12}(n-1)$: $P = -(1,2,1,n-5)$. $[\{1,4\}; (1,u,2,3,x,O_{X-u},4); (4,u,2,3,x,O_{X-u},1)]$ avec $u \in X$.

Exc $\mathcal{F}_{13}(n-1)$: $P = -(1,1,1,n-4)$. Soit $u \rightarrow v$ une arête de $T(X)$, $[\{1,2\}; (1,3,4,2,x,5,O_X); (2,u,v,x,3,4,5,O_{X-(u,v)},1)]$. (Notons que $O_{X-(u,v)}$ peut être le chemin vide.)

Exc $\mathcal{F}_{14}(n-1)$: $P = -(1,2,1,n-5)$. $[\{1,6\}; (1,3,4,5,x,O_X,6,2); (6,3,4,5,x,O_X,1,2)]$. $\square$

Désormais et jusqu'à la fin de cette partie, nous désignerons par *exceptions* , les exceptions $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j(n)$ ou $\mathcal{F}'_l(n)$ et leurs duales. Nous formulons maintenant quelques remarques sur ces exceptions.

Remarque 2.1 Les seules exceptions $(T;P)$ où P n'est pas contenu dans T sont celles de Grünbaum.

Remarque 2.2 Soit $(T;P)$ une exception telle que P soit un chemin sortant et T possède un sommet maximal. Alors $(T;P)$ est une des exceptions $\mathcal{F}_8(n)$, $\mathcal{F}'_8(n)$, $\mathcal{F}_9(n)$, $\mathcal{F}'_9(n)$, $\mathcal{F}_{10}(n)$ ou $\mathcal{F}'_{10}(n)$.

Remarque 2.3 Soit $(T;P)$ une exception telle que P soit un chemin sortant et T soit réductible. Si X est minimal dans T (i.e. $T = T(X) \rightarrow T(Y)$ et Y non vide), alors un sommet de X est origine de P.

Remarque 2.4 Soit $(T;P)$ une exception telle que P un chemin sortant et T ait un élément minimal. Alors $(T;P)$ est une des exceptions $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$ ou $\mathcal{F}_6$.

Remarque 2.5 Les seules exceptions pour lesquelles au moins quatre sommets ne sont pas origines d'un chemin sortant donné dont le premier bloc est de taille au moins deux sont les exceptions $\mathcal{E}_7$, $\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}'_8$, $\mathcal{F}_9$, $\mathcal{F}'_9$, $\mathcal{F}_{10}$ et $\mathcal{F}'_{10}$.

Remarque 2.6 Soit $(T;P)$ une exception d'ordre $n \geq 9$. Notons que T n'est pas 2-fortement connexe, et que si T est fortement connexe alors $(T;P)$ est une des exceptions $\mathcal{F}_i(n)$ avec $i \in \{3,4,5,6,7,11,12,13,14\}$.

Les quatre lemmes précédents garantissent que notre récurrence va fonctionner, même si l'on se ramène à une exception. Nous appellerons ces quatre lemmes, les *lemmes d'extension.*

2.4 Chemins hamiltoniens dans les tournois.

Théorème 2.2 (Havet et Thomassé [17]) *Soient T un tournoi d'ordre n, P un chemin sortant d'ordre n et x,y deux sommets distincts de T tels que $s^+(x,y) \geq b_1(P)+1$. Alors une des deux assertions suivantes est vérifiée :*

i) Un des sommets x,y est origine de P dans T.

ii) $(T;P)$ est une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j(n)$ ou $\mathcal{F}'_l(n)$.

Preuve.

Nous procédons par récurrence sur n, le résultat étant trivialement vrai pour $n = 1$. Nous supposons que le théorème (et donc son dual) sont vérifiés pour $|T| = n-1$. Soient T un tournoi d'ordre n et P un chemin sortant d'ordre n tels que $(T;P)$ n'est pas une exception. Soient x et y deux sommets de T tels que $x \to y$ et $s^+(x,y) \geq b_1(P)+1$. Nous distinguons deux cas:

<u>Cas 1</u> : $b_1(P) \geq 2$.

Supposons que $d^+(x) \geq 2$. Si $(T-x;^* P)$ est une exception, d'après les lemmes d'extension, x ou y est origine de P dans T. Si $(T-x;^* P)$ n'est pas une exception, soit $z \in N^+(x)$ un outgénérateur de $S^+(x) - x$ et $t \in N^+(x)$, t distinct de z. Par définition de z, on a $s^+_{T-x}(t,z) = s^+(x) - 1 \geq b_1(P)$. Par hypothèse de récurrence, z ou t est une origine de $^*P$ dans $T-x$, ainsi x est origine de P dans T.

Supposons maintenant que $d^+(x) = 1$. En particulier, y est l'unique voisin externe de x. Soit z un outgénérateur de $S^+(x,y) - y$ tel que $y \to z$ (un tel sommet existe puisque $s^+(x,y) \geq b_1(P) + 1 \geq 3$). Notons que $x \leftarrow z$ et $s^+_{T-y}(x,z) = s^+(x,y) - 1 \geq b_1(^*P) + 1$. Si $(T-y;^* P)$ n'est pas une exception, par hypothèse de récurrence, x ou z est origine de $^*P$ dans $T-y$. Comme $d^+_{T-y}(x) = 0$, cette origine est forcément z. Par conséquent, y est origine de P dans T. Si $(T-y;^* P)$ est une exception, comme x est maximal dans $T-y$, d'après la remarque 2.2, $(T-y,^* P)$ est une des exceptions $\mathcal{F}_8(n-1)$, $\mathcal{F}'_8(n-1)$, $\mathcal{F}_9(n-1)$, $\mathcal{F}'_9(n-1)$, $\mathcal{F}_{10}(n-1)$ ou $\mathcal{F}'_{10}(n-1)$. Si y a un voisin externe qui est origine de $^*P$ dans $T-y$ alors y est une origine de P. Sinon, on peut supposer que $v \to y$ pour tout v origine de $^*P$ dans $T-y$. Alors $(T;P)$ est une des exceptions $\mathcal{F}_8(n)$, $\mathcal{F}'_8(n)$, $\mathcal{F}_9(n)$, $\mathcal{F}'_9(n)$, $\mathcal{F}_{10}(n)$ et $\mathcal{F}'_{10}(n)$.

<u>Cas 2</u> : $b_1(P) = 1$. Posons X le sous-tournoi engendré par l'ensemble $S^-_{T-x}(N^+(x))$. Considérons la partition $(X, Y, \{x\})$ de T où $Y = T - (X,x)$. Nous avons $Y \to x$, $X \to Y$ et $y \in X$.

a) Supposons que $d^+(x) \geq 2$ et $|X| \geq b_2(P)+1$: si $(T-x;^* P)$ est une exception, d'après les lemmes d'extension, x ou y est origine de P dans T. Sinon, soient $z \in N^+(x)$ un ingénérateur de X et $u \in N^+(x)$, u distinct de z. Par hypothèse de récurrence, z ou u est origine de $^*P$ dans $T-x$. Ainsi x est origine de P dans T.

b) Supposons que $d^+(x) \geq 2$ et $|X| \leq b_2(P)$. Ces deux conditions impliquent que $b_2(P) \geq 2$. Définissons A^- et A^+ par respectivement $X \cap N^-(x)$ et $(X-y) \cap N^+(x)$. Remarquons que $A^+ \neq \emptyset$.

   - Si $P = (1, n-2)$, alors $|X| \leq n-2$ et $|Y| \geq 1$. Dans $T-y$, puisque $d^+_{T-y}(x) > 0$, Y appartient à la composante maximale de $T-y$. Donc il existe un chemin hamiltonien descendant P' de $T-y$ dont l'origine est un sommet de Y, et y est origine de $P = (y, P')$ dans T.

- Si $P = (1, n-3, 1)$, alors $|X| \leq n-3$ et $|Y| \geq 2$. Si A^- est non vide, prenons v un sommet de Y. Alors y est origine de $P = (y, I_{Y-v}, I_{A^+}, x, I_{A^-}, v)$. Si A^- est vide et $|A^+| \geq 2$, prenons $z \in A^+$. Alors y est origine de $P = (y, I_Y, I_{X-(y,z)}, x, z)$. On peut donc supposer que A^- est vide et A^+ est l'arête $z \to y$. Si $|Y| = 2$, $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{E}_{10}$. On a donc $|Y| > 2$. D'après le théorème 2.1, on peut trouver un chemin $P' = -(|Y-3|, 1)$ dans Y (avec $-(0,1) = +(1)$ si $|Y| = 3$). Essentiellement, il existe $v \in Y$ tel que $Y - v$ contient le chemin P'. Donc y est une origine de $P = (y, v, z, x, P')$.

- Si $P = (1, n-4, 2)$, alors $|X| \leq n-4$ et $|Y| \geq 3$. Soit $v \in Y$. Alors y est origine de $P = (y, I_{Y-v}, I_{X-y}, v, x)$.

- Si $P = (1, n-4, 1, 1)$, alors $|X| \leq n-4$ et $|Y| \geq 3$. Si A^- est non vide, prenons $v \to w$ une arête de Y. Alors y est origne de $P = (y, I_{Y-(w,v)}, I_{A^+}, x, I_{A^-}, w, v)$. Si A^- est vide et $|Y| \geq 4$, d'après le théorème 2.1, on peut trouver un chemin $P' = -(|Y-4|, 1, 1)$ dans Y (avec $-(0,1,1) = +(1,1)$ si $|Y| = 4$). Essentiellement, il existe $v \in Y$ tel que $Y - v$ contient le chemin P'. Alors y est origine de $P = (y, v, I_{X-y}, x, P')$. Supposons que A^- soit vide et $|Y| = 3$, notons $V(Y) = \{u, v, w\}$ avec $u \to v$. Si $|X| \geq 3$, prenons z un sommet de X distinct de y, alors y est origine de $P = (y, w, I_{X-(y,z)}, x, u, v, z)$. Si $|X| = 2$, $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{E}_{16}$ ou $\mathcal{E}_{32}$.

Si P est un chemin différent des quatre chemins ci-dessus, nous avons $|X| \leq b_2(P) \leq n-5$ donc $|Y| \geq 4$ (rappelons que $b_2(P) \geq 2$). Dans $T - y$, si un sommet de Y est origne de ${}^*P$ alors y est origine de P. C'est le cas si $(T - y; {}^* P)$ n'est pas une exception, car $S^-_{T-y}(Y) = T - y$. Donc on peut supposer que $(T - y; {}^* P)$ est une exception, et qu'aucun des sommets de Y n'est origine de ${}^*P$. D'où par la remarque 2.5, $(T - y; {}^* P)$ est le dual d'une des exceptions $\mathcal{E}_7$, $\mathcal{F}_8$, $\mathcal{F}'_8$, $\mathcal{F}_9$, $\mathcal{F}'_9$, $\mathcal{F}_{10}$ ou $\mathcal{F}'_{10}$. Comme pour tous les tournois de ces exceptions, le degré interne d'un sommet de la composante maximale n'excède pas trois, ceci est impossible. En effet, le sommet x appartient à la composante maximale de $T - y$ et son degré interne est au moins 4.

c) Supposons que $d^+(x) = 1$ et $|X| \geq b_2(P) + 1$.

- Si $d^+(y) = 0$, deux cas peuvent se produire: soit le chemin ${}^{**}P$ est contenu dans $T - (x, y)$ et x est une origine de P, soit il n'est pas contenu dans $T - (x, y)$ et par hypothèse de récurrence et la remarque 2.1, $(T - (x, y); {}^{**} P)$ est une des exceptions de Grünbaum. Ainsi $(T; P)$ est une des exceptions $\mathcal{F}_8(5)$, $\mathcal{F}'_8(5)$, $\mathcal{F}_9(7)$, $\mathcal{F}'_9(7)$, $\mathcal{F}_{10}(9)$ et $\mathcal{F}'_{10}(9)$.
- Si $d^+(y) = 1$, notons z l'unique voisin externe de y. Si T possède seulement trois sommets, $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{E}_0$. Sinon T possède au moins quatre sommets. Nous distinguons deux cas :

  i) Supposons que $(T - (x, y); {}^{**} P)$ n'est pas une exception. Si dans $T - (x, y)$,

on peut trouver deux origines de ${}^{**}P$, une est distincte de z, donc x, par y, est origine de P. Si $b_1({}^{**}P) < n-3$, par hypothèse de récurrence, il y au moins deux origines de ${}^{**}P$ dans $T-(x,y)$. On peut donc se restreindre au cas où $b_1({}^{**}P) = n-3$. Si $P = +(1, n-2)$, soit z est maximal dans $T-(x,y)$ et $(T;P)$ est l'exception $\mathcal{F}_1(n)$, soit il existe $I_{T-(x,y)}$ d'origine distincte de z et alors x est origine de $P = (x, y, I_{T-(x,y)})$. Si $P = +(1,1,n-3)$, nous devons distinguer deux sous-cas: si $N^-(z) = \{y\}$, alors $(T;P)$ est l'exception $\mathcal{F}_{11}(n)$ quand $|X| > 1$ et l'exception $\mathcal{E}_1$ quand $|X| = 1$; si $N^-(z) \neq \{y\}$, on peut trouver un chemin $O_{T-(x,y)}$ dont l'origine est distincte de z, donc x est origine de $P = (x, y, O_{T-(x,y)})$.
ii) Supposons maintenant que $(T-(x,y);^{**}P)$ est une exception. Si dans $T-(x,y)$ on peut trouver deux origines de ${}^{**}P$, une d'elles est distincte de z, et donc x est origine de P. Les exceptions avec au plus une origine sont $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_7$ et $\mathcal{E}_{33}$ et leurs duales. Comme il y a une seule manière d'étendre ces exceptions avec x et y, nous précisons simplement le chemin trouvé ou l'exception dans laquelle on se trouve: $[Exc\ \mathcal{E}_0; P = +(1,1,1,1); z := 3; (y, z, 2, x, 1)]$
$[Dual\ \mathcal{E}_0; P = +(1,2,1); z := 3; (y, z, 1, 2, x)]$
$[Exc\ \mathcal{E}_1; P = +(1,1,1,1,1); z := 4; (y, z, 3, x, 1, 2)]$
$[Dual\ \mathcal{E}_1; P = +(1,2,1,1); z := 4; (y, z, 1, 2, x, 3)]$
$[Exc\ \mathcal{E}_4; P = +(1,1,1,1,1,1); z := 1; (y, z, 5, x, 2, 4, 3)]$
$[Dual\ \mathcal{E}_4; P = +(1,2,1,1,1); z := 1; (y, z, 2, 3, x, 5, 4)]$
$[Exc\ \mathcal{E}_7; P = +(1,1,2,1,1); z := 5; \mathcal{E}_{48}]$
$[Dual\ \mathcal{E}_7; P = +(1,3,1,1); z := 5; (y, z, 1, 2, 3, x, 4)]$
$[Exc\ \mathcal{E}_{33}; P = +(1,1,1,1,1,1,1,1); z := 1; (y, z, 7, 2, 5, 6, 4, x, 3)]$
$[Dual\ \mathcal{E}_{33}; P = +(1,2,1,1,1,1,1); z := 1; (y, z, 5, 6, 2, 4, 3, 7, x)]$.

- Supposons que $d^+(y) \geq 2$. Appelons Z le tournoi engendré par $S^-_{T-y}(N^+(y))$ et considérons la partition $(Z, W, \{y\}, \{x\})$ de T avec $W = T - (Z, y, x)$. Par définition, $W \to \{x, y\}$, $Z \to W \cup \{x\}$. Suposons que $|Z| \geq b_2(P) + 1$.
  Si $(T-y;^{*}P)$ n'est pas une exception, on a le résultat par hypothèse de récurrence, puisqu'on peut trouver $\{z,t\} \subseteq Z$ tel que $s^-_{T-y}(z,t) \geq b_1({}^{*}P) + 1$.
  Si $(T-y;^{*}P)$ est une exception, d'après la remarque 2.4, $(T-y;^{*}P)$ est le dual d'une des exceptions $\mathcal{F}_1(n-1)$, $\mathcal{F}_2(n-1)$, $\mathcal{F}_3(n-1)$, $\mathcal{F}_4(n-1)$, $\mathcal{F}_5(n-1)$ ou $\mathcal{F}_6(n-1)$. Pour traiter ces exceptions, nous noterons X' et Y' les tournois correspondant à X et Y sur la figure 2.3; les sommets seront notés de la même manière que sur la figure.

  Supposons que $T-y$ soit le dual de $F_1(n-1)$, alors $P = +(1,1,n-3)$. Si y a un voisin interne dans le 3-cycle minimal de $T-y$ alors x est origine de P. Si y a un voisin externe dans X' alors y est origine de P. Donc $N^+(y)$ est exactement 3-cycle minimal de $T-y$ et $(T;P)$ est l'exception $\mathcal{F}_{13}(n)$ si $n \geq 7$ et l'exception $\mathcal{E}_{26}$ si $n = 6$.

Supposons que $T-y$ soit le dual de $F_2(n-1)$, alors $P=+(1,2,n-4)$. Le seul voisinage externe de y possible sans contenir d'origine de P est $\{3,4\}$. Si $X'-x$ est non vide (i.e. contient un sommet u), alors x est origine de $P=(x,y,u,2,1,3,4,O_{X'-(x,u)})$. Si $W=\{x\}$, $(T;P)$ est l'exception $\mathcal{E}_{31}$.

Supposons que $T-y$ soit le dual de $F_3(n-1)$, alors $P=+(1,1,n-3)$. Le seul voisinage externe de y possible sans contenir d'origine de P est $\{1,3\}$. D'où x est origine de $P=(x,y,2,3,1,O_{X'-(x,3)})$.

Supposons que $T-y$ soit le dual de $F_4(n-1)$, alors $P=+(1,2,n-4)$. Le seul voisinage externe de y possible sans contenir d'origine de P est $\{1,4\}$. Comme $|X'|\geq 3$, il existe un sommet u de X' distinct de x et 3. Ainsi x est origine de $P=(x,y,u,2,3,4,1,O_{X'-(x,u,3)})$.

Supposons que $T-y$ soit le dual de $F_5(n-1)$, alors $P=+(1,1,n-3)$. Le seul voisinage externe de y possible sans contenir d'origine de P est $\{1,2\}$. D'où x est origine de $P=(x,y,O_{Y'},2,1,O_{X'-(x,2)})$.

Supposons que $T-y$ soit le dual de $F_6(n-1)$, alors $P=+(1,2,n-4)$. Le seul voisinage externe de y possible sans contenir d'origine de P est $\{1,3\}$. Soit $v\rightarrow u$ une arête de Y' (elle existe car $|Y'|\geq 2$) alors x est origine de $P=(x,y,u,v,2,1,3,O_{Y'-(u,v)},O_{X'-(x,2)})$. (Remarquons que ce chemin est valide même si $O_{Y'-(u,v)}$ est vide.)

Nous pouvons donc supposer que $|Z|\leq b_2(P)$. En particulier, $b_2(P)\geq d^+(y)\geq 2$, donc ${}^{**}P$ est entrant.

Si $|W|\geq 2$ et $(T-(x,y);^{**}P)$ n'est pas une exception, prenons u un ingénérateur de W et v un sommet de W distinct de u. Nous avons $s^-_{T-(x,y)}(u,v)=n-2\geq b_1(^{**}P)$ donc par hypothèse de récurrence, u ou v est origine de ${}^{**}P$. Par conséquent, x, via y, est une origine de P.

Si $|W|\geq 2$ et $(T-(x,y);^{**}P)$ est une exception, d'après la remarque 2.3, x, via y, est origine de P. Si $|W|=\{u\}$ et $(T-(x,y);^{**}P)$ est une exception, on utilise l'argument précédent. Nous pouvons donc supposer que $(T-(x,y);^{**}P)$ n'est pas une exception.

Maintenant si y a un voisin interne v dans Z, alors puisque ${}^{**}P$ est entrant, on sait que u ou v est origine de ${}^{**}P$ dans $T-(x,y)$, d'où x est origine de P. On peut donc supposer $y\rightarrow Z$. Comme $u\leftarrow Z$, si x n'est pas origine de P alors ${}^{***}P$ n'est pas contenu dans $T(Z)$. Or $b_2(P)=n-2$ ou $n-3$. Si $P=+(1,n-2)$, x est origine de $P=(x,y,u,I_Z)$. Si $P=+(1,n-3,1)$, ${}^{***}P$ a au moins deux blocs. Le seul cas pour lequel ${}^{***}P$ n'est pas contenu dans $T(Z)$ est lorsque $P=+(1,1)$ et $T(Z)$ est le 3-cycle. On est alors dans l'exception $\mathcal{E}_{27}$.

Si W est vide, $|Z|=n-2$ alors $b_2(P)=n-2$. Comme $|X|\geq b_2(P)+1$, $|X|=n-1$ et y est un ingénérateur de $T-x$, y est origine d'un chemin ascendant hamiltonien de $T-x$. Ainsi x est origine de P.

d) Supposons que $d^+(x) = 1$ et $|X| \leq b_2(P)$. Comme $b_2(P) \leq n-2$, Y est non vide. Si $|Y| = 1$, $b_2(P) = n-2$ et $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{F}_1(n)$ si $d^+(y) = 1$ et $\mathcal{F}_3(n)$ si $d^+(y) > 1$. On peut donc supposer $|Y| \geq 2$. Si $b_2(P) = n-2$, $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{F}_5(n)$ si $n \geq 5$ et l'exception $\mathcal{E}_2$ si $n = 4$. Sinon, si $b_2(P) < n-2$, soit v un ingénérateur de Y et $w \in Y - v$. Dans $T - y$, $s^-_{T-y}(v, w) = n-2 \geq b_2(P) + 1$. Si $(T - y;^* P)$ n'est pas une exception, par hypothèse de récurrence, v ou w est origine de ${}^*P$ dans $T - y$ et donc y est origine de P dans T. Si $(T - y;^* P)$ est une exception, comme x est maximal dans $T - y$ et ${}^*P$ est un chemin entrant, d'après la remarque 2.4 $(T - y;^* P)$ est le dual d'une des exceptions $\mathcal{F}_1(n-1)$, $\mathcal{F}_2(n-1)$, $\mathcal{F}_3(n-1)$, $\mathcal{F}_4(n-1)$, $\mathcal{F}_5(n-1)$ ou $\mathcal{F}_6(n-1)$. Pour toutes ces exceptions, le premier bloc du chemin est de longueur inférieure ou égale à deux. Donc $b_2(P) \leq 2$ et $|X| \leq 2$. Si $|X| = 2$ alors $T - y$ a un sommet minimal, ce qui est impossible pour les tournois des exceptions duales de $\mathcal{F}_i$, $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Donc $|X| = 1$, c'est à dire $X = \{y\}$. Si $(T - y;^* P)$ est une exception $\mathcal{F}_i$, $i \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$, alors $|T - y| \geq 4$ et en particulier $|Y| \geq 3$. Comme seulement deux sommets ne sont pas origine de${}^*P$ dans ces exceptions, il y a un sommet de Y qui est origine de ${}^*P$ dans $T - y$. Alors y est origine de P. Supposons maintenant que $(T - y;^* P)$ soit l'exception $\mathcal{F}_1$, si $T - y$ a quatre sommets, c'est le dual de $F_1(4)$, donc $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{E}_6$. Si $T - y$ possède au moins cinq sommets alors $|Y| \geq 4$. Or seulement trois sommets ne sont pas origine de ${}^*P$ dans F_1. Donc il y a un sommet de Y qui est origine de ${}^*P$ dans $T - y$. Ainsi y est origine de P. $\square$

Ce théorème a pour principal corollaire la réponse à la conjecture de Rosenfeld:

Théorème 2.3 (Havet et Thomassé, [17]) *Soient T un tournoi d'ordre n et P un chemin d'ordre n. Alors T contient P si et seulement si $(T; P)$ n'est pas une exception de Grünbaum.*

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que P est un chemin sortant. Si $(T; P)$ est une exception, la conclusion vient de la remarque 2.1. Si $(T; P)$ n'est pas une exception, prenons deux sommets x, y de T, avec x outgénérateur de T. Par le théorème 2.2, un de ces deux sommets est origine de P. $\square$

Corollaire 2.3.1 *Soit T un tournoi 3-fortement connexe d'ordre $n \geq 9$ et P un chemin d'ordre n. Tout sommet de T est origine de P dans T.*

Preuve. Sans perte de généralité, on peut supposer que P est un chemin sortant. Soit x un sommet de T. Comme T est (≥ 3)-fortement connnexe, $d^+(x) \geq 3$ et $T - x$ est 2-fortement connexe. Si $(T - x;^* P)$ est une exception, c'est l'exception $\mathcal{E}_{49}$ ou $\mathcal{E}_{50}$. Pour ces deux exceptions, seulement deux sommets ne sont pas origine de ${}^*P$ et par conséquent, x est origine de P puisque $d^+(x) \geq 3$. Si $(T - x;^* P)$ n'est pas une exception, d'après le théorème 2.2, il y a un sommet de $N^+(x)$ qui est origine de ${}^*P$ dans $T - x$ et donc x est origine P dans T. $\square$

Comme le tournoi $8A$ est 3-fortement connexe, la borne 9 de ce corollaire est la meilleure possible. De plus, soit $G(n)$ un tournoi tel qu'il existe un sommet x tel que $G(n) - x = F_6(n-1)$ et $\{1,3\} \to x$, $x \to X$ et $x \to Y$. Alors, $G(n)$ est 2-fortement connexe et x n'est pas origine du chemin $-(1,2,n-4)$.

Cependant, nous avons le résultat plus faible suivant pour les tournois 2-fortement connexes:

Corollaire 2.3.2 *Soit T un tournoi 2-fortement connexe d'ordre $n \geq 9$ et P un chemin sortant d'ordre n. Tout sommet de T est origine de P ou $-P$ dans T.*

Preuve. Soit x un sommet de T. Comme T est 2-fortement connexe, $T-x$ est fortement connexe. Donc tout sommet de $T-x$ est un ingénérateur et un outgénérateur de $T-x$. Prouvons d'abord que si $d^+(x) \geq 3$, x est origine de P. C'est clair lorsque $(T-x;^* P)$ n'est pas une exception. Si $(T-x;^* P)$ est une exception, puisque $T-x$ est fortement connexe, c'est une des exceptions $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$, $\mathcal{F}_6$, $\mathcal{F}_7$, $\mathcal{F}_{11}$, $\mathcal{F}_{12}$, $\mathcal{F}_{13}$, $\mathcal{F}_{14}$, $\mathcal{E}_{49}$, $\mathcal{E}_{50}$ et $\mathcal{E}_{51}$. Mais dans tous ces cas, seulement deux sommets de $T-x$ ne sont pas origine de $^*P$ dans $T-x$. Comme $d^+(x) \geq 3$, il y a un sommet de $N^+(x)$ qui est origine de $^*P$ dans $T-x$, et x est origine de P dans T. De même, si $d^-(x) \geq 3$, x est origine de $-P$. Comme $n \geq 9$, $d^-(x) \geq 3$ ou $d^+(x) \geq 3$, donc d'après les deux assertions ci-dessus, x est origine de P ou $-P$. $\square$

La borne 9 de ce corollaire est la meilleure posssible. En effet, le tournoi $8A$ est 2-fortement connexe et ses sommets 1 et 2 ne sont pas origines des chemins hamiltoniens alternés. De plus, soit $H(2n+1)$ le tournoi tel que pour un sommet x, $H(2n+1) - x$ est un tournoi transitif $(c_1 \to c_2 \to \dots c_{2n})$, $x \to \{c_1, \dots, c_n\}$ et $x \leftarrow \{c_{n+1}, \dots, c_{2n}\}$. Clairement $H(2n+1)$ est fortement connexe. Mais pour tout chemin P tel que $b_1(P) = 1$ et $b_2(P) > n$, le sommet x n'est origine ni de P ni de $-P$.

Nous donnons maintenant une preuve d'un énoncé que Thomason in [35] p. 170 pensait démontrable. C'est une sorte d'analogue du corollaire 2.1.1 pour les chemins hamiltoniens.

Corollaire 2.3.3 *Soient P un chemin d'ordre $n \geq 8$ avec $b_1(P) = k$, T un tournoi d'ordre n et K un ensemble de $k+2$ sommets de T. Il y a une origine de P dans K sauf si $(T;P)$ est l' exception $\mathcal{F}_1(n)$.*

Preuve. Si $(T;P)$ est une exception différente de $\mathcal{F}_1(n)$, le corrollaire est vrai. Si $(T;P)$ n'est pas une exception, et P un chemin entrant (resp. sortant), prenons u un ingénérateur (resp. outgénérateur) de $T(K)$ et v un sommet de K distinct de u. D'après le théorème 2.2, u ou v est une origine de P. $\square$

Nous prouvons maintenant un résultat plus général que celui de Rosenfeld [28]:

Corollaire 2.3.4 *Soient T un tournoi d'ordre $n \geq 9$ et P chemin d'ordre n tel que $b_1(P) = 1$ et $b_2(P) \leq \lceil \frac{n-5}{2} \rceil$. Tout sommet de T est origine de P ou $-P$ dans T.*

Preuve. Soit x un sommet T. On a $d^+(x) + d^-(x) = n - 1$, donc $d^+(x) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ ou $d^-(x) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. Si $d^+(x) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ alors d'après le corollaire précédent, dans $N^+(x)$ il y a un sommet qui est origine de $^*P$ dans $T - x$. Ainsi x est origine de P dans T. De la même manière, on montre que x est origine de $-P$ dans T si $d^-(x) \geq \lceil \frac{n-1}{2} \rceil$. $\square$

Dans [4], Bampis et al, ont prouvé que dans un tournoi d'ordre au moins 19 tout sommet de degré externe 2 est origine d'un chemin hamiltonien alterné sortant. Nous prouvons ici un résultat un peu plus fort:

Corollaire 2.3.5 *Soient T un tournoi d'ordre $n \geq 11$ et P chemin alterné sortant d'ordre n. Tout sommet de degré externe au moins deux dans T est origine de P.*

Soit x un sommet de degré au moins deux dans T et y et z deux voisins externes de x. Comme $n \geq 11$, $(T - x, ^*P)$ n'est pas une exception donc y ou z est origine de $^*P$ dans $T - x$. Ainsi x est origine de P dans T. $\square$

La borne 11 de ce lemme est la meilleure possible. En effet, soit T le tournoi tel que $T - x$ est le dual de $F_{10}(9)$ avec $N^+(x) = X$. Le sommet x est de degré externe 2 mais n'est pas origine d'un chemin alterné sortant hamiltonien de T.

Chapitre 3

Cycles dans les tournois.

Le théorème de Camion affirme qu'un tournoi contient un cycle hamiltonien direct si et seulement si il est fortement connexe. Plus généralement, on peut se pencher sur l'existence de cycles hamiltoniens quelconques dans un tournoi. En 1974, Rosenfeld [29] conjectura (conjecture 2) qu'il existe un entier N tel que tout tournoi d'ordre $n \geq N$ contient tout cycle hamiltonien non direct. Elle a été vérifiée pour les cycles avec un bloc de taille $n-1$ par Grünbaum, pour les cycles *alternés* (deux arêtes consécutives sont de sens opposé) par Thomassen [36] ($n \geq 50$), Rosenfeld [29] ($n \geq 28$) et Petrović [26] ($n \geq 16$), et pour les cycles ayant deux blocs par Benhocine et Wojda [6]. Elle a enfin été prouvée en 1986 par Thomason [35] pour $n \geq 2^{128}$. Bien qu'il n'ait pas essayé de minimiser cette borne, il a supposé que cette conjecture est vraie pour $N = 9$.

Essentiellement, un cycle est un chemin dont les extrémités sont reliées par une arête. Il est donc intéressant d'avoir des lemmes qui nous donnent des renseignements sur la localisation dans le tournoi des deux extrémités d'un chemin. C'est ce que nous faisons pour les tournois réductibles dans la première partie. Nous utilisons ensuite ces lemmes et les théorèmes du chapitre précédent pour prouver les résultats suivants:

1) Tout tournoi réductible d'ordre $n \geq 9$ contient tout cycle hamiltonien non direct (théorème 3.1).

2) Tout tournoi $(= k)$-fortement connexe d'ordre $n \geq 6$ contient tout cycle hamiltonien ayant un bloc de taille au moins $k + 2$ (théorèmes 3.2 et 3.3).

3) Tout tournoi (=1)-fortement connexe d'ordre $n \geq 9$ contient tout cycle hamiltonien (théorème 3.4).

De plus, pour chacun de ces résultats nous caractérisons entièrement toutes les exceptions de petits ordres.

3.1 Les outils: chemins dans les tournois réductibles.

Définition 5 Soit $P = (x_1, \ldots, x_n)$ un chemin, $A^+(P) := |\{i, x_i \to x_{i+1}\}|$ est le nombre des arêtes *positives* et $A^-(P) := |\{i, x_i \leftarrow x_{i+1}\}|$ est le nombre des arêtes *négatives* .

Si C est un cycle non direct, les *blocs* de C sont les sous-chemins directs maximaux de C. Remarquons qu'un cycle non direct a un nombre pair de blocs. Un cycle non direct est entièrement déterminé par la suite des longueurs de ses blocs $(l_1, l_2, \ldots, l_{2p})$ avec le premier bloc considéré comme sortant.

L'exception $\mathcal{P}_1(n)$ est le couple $(E_1(n); Q_1(n))$ où $E_1(n)$ est un tournoi dessiné figure 3.1 d'ordre n où T_1 est un tournoi quelconque d'ordre $n-3$ et $Q_1(n) = (n-2, 1)$.

L'exception $\mathcal{P}_2$ est le couple $(E_1(4); Q_2)$ où $E_1(4)$ est le tournoi dessiné figure 3.1 d'ordre 4 et $Q_2 = (1, 1, 1)$.

L'exception $\mathcal{P}_3$ est le couple $(E_2; Q_3)$ où E_2 est le tournoi dessiné figure 3.1 et $Q_3 = (2, 1, 1, 1)$.

L'exception $\mathcal{P}_4$ est le couple $(E_2; Q_4)$ où E_2 est le tournoi dessiné figure 3.1 et $Q_3 = (1, 1, 1, 1, 1)$.

L'exception $\mathcal{P}_5$ est le couple $(E_3; Q_5)$ où E_3 est le tournoi dessiné figure 3.1 et $Q_5 = (2, 1, 1, 1, 1, 1)$.

L'exception $\mathcal{P}_6$ est le couple $(E_3; Q_6)$ où E_3 est le tournoi dessiné figure 3.1 et $Q_6 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

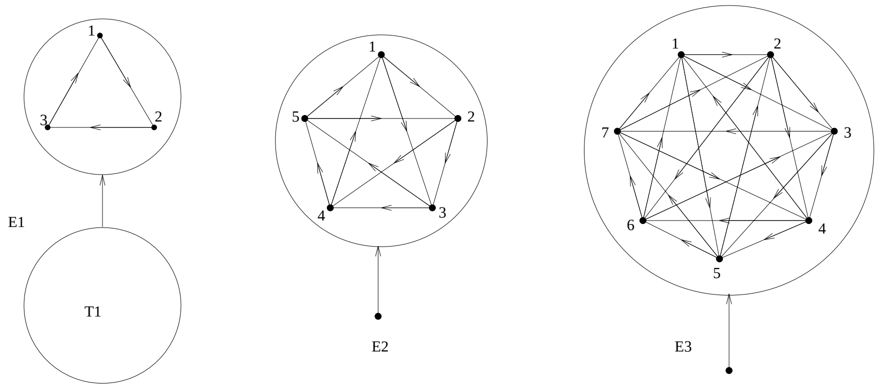

Figure 3.1: Les tournois $E_1(n)$, E_2 et E_3.

Lemme 3.1 *Soient T un tournoi réductible d'ordre n de décomposition $T_1 \to T_2$ et P un chemin sortant d'ordre n tels que :*

1) $A^+(P) \geq |T_1|$;

2) $(T; P)$ n'est pas une exception $\mathcal{P}_i$.

Alors il existe $y \in T_2$ tel que pour tout outgénérateur x de T_1, il existe un chemin P dans T d'origine x et de fin y.

Preuve.

Soient Q le plus petit sous-chemin initial de P contenant $|T_1|$ arêtes positives et R le sous-chemin $P-Q$. Alors R est non vide car $A^+(P) \geq |T_1|$. Soit $(i_1, j_1, i_2 - i_1, j_2 - j_1, \dots, i_r - \sum_{k=1}^{r-1} i_k)$ le type de Q. Soit a_1 un outgénérateur de T_1. Il est origine d'un chemin ascendant hamiltonien de T_1 : $Q_1 = (a_1, \dots, a_{i_r})$.

Si $(T_2; R)$ n'est pas une exception de Grünbaum, T_2 contient $R = (c_1, \dots c_m)$. $T_2 - R$ possède un chemin descendant hamiltonien $Q_2 = (b_1, \dots, b_l)$. On a alors $(a_1, \dots, a_{i_1}, b_1, \dots, b_{j_1}, a_{i_1+1}, \dots a_{i_2}, b_{j_1+1}, \dots b_{j_2}, \ \dots, a_{i_r}, c_1, c_2, \dots, c_m) = P$. On obtient le résultat avec $y = c_m$.

Si $(T_2; R)$ est une exception de Grünbaum:

> Si $T_2 = 3A$: Si $R = +(1,1)$, c'est l'exception $\mathcal{P}_1$. Si $R = -(1,1)$, si $|T_1| = 1$, c'est l'exception $\mathcal{P}_2$. Sinon Q_1^* existe dans T_1 et $P = (Q_1^*, 1, 2, a_k, 3)$.
>
> Si $T_2 = 5A$: Si $R = +(1,1,1,1)$, si $|T_1| = 1$, c'est l'exception $\mathcal{P}_3$. Sinon Q_1^* existe dans T_1 et $P = (Q_1^*, 1, 2, 3, a_k, 5, 4)$. Si $R = -(1,1,1,1)$, si $|T_1| = 1$, c'est l'exception $\mathcal{P}_4$. Sinon Q_1^* existe dans T_1 et $P = (Q_1^*, 1, 2, a_k, 5, 3, 4)$.
>
> Si $T_2 = 7A$: Si $R = +(1,1,1,1,1,1)$, si $|T_1| = 1$, c'est l'exception $\mathcal{P}_5$. Sinon Q_1^* existe dans T_1 et $P = (Q_1^*, 1, 2, 3, a_k, 7, 5, 6, 4)$. Si $R = -(1,1,1,1)$, si $|T_1| = 1$, c'est l'exception $\mathcal{P}_6$. Sinon Q_1^* existe dans T_1 et $P = (Q_1^*, 1, 2, a_k, 7, 3, 5, 4, 6)$. □

Lemme 3.2 *Soient T un tournoi réductible d'ordre n de décomposition $T_1 \to T_2$, P un chemin sortant d'ordre n et x un sommet de T_1 tels que:*
1) $A^+(P) \geq |T_1|$;
2) $(T; P)$ n'est pas une des exceptions $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_4$ ou $\mathcal{P}_6$;
3) $s^+_{T_1}(x) \geq b_1(P)$.
Alors x est origine d'un chemin P dans T avec fin dans T_2.

Preuve. On utilise le même principe que pour le lemme 3.1.

Soient Q le plus petit sous-chemin initial de P contenant $|T_1|$ arêtes positives et R le sous-chemin $P - Q$. Soit $(i_1, j_1, i_2 - i_1, j_2 - j_1, \dots, i_r - \sum_{k=1}^{r-1} i_k)$ le type de Q. Comme $s^+_{T_1}(x) \geq b_1(P)$, le sommet x est origine d'un chemin ascendant $Q_1 = (a_1, \dots, a_{i_1})$ dans T_1. Prenons $(a_{i_1+1}, \dots, a_{i_r})$ un chemin ascendant de $T_1 - Q_1$.

Si $(T_2; R)$ n'est pas une exception de Grünbaum, T_2 contient $R = (c_1, \dots c_m)$. De plus, $T_2 - R$ possède un chemin descendant hamiltonien $Q_2 = (b_1, \dots, b_l)$. On a alors $(a_1, \dots, a_{i_1}, b_1, \dots, b_{j_1}, a_{i_1+1}, \dots a_{i_2}, b_{j_1+1}, \dots b_{j_2}, \ \dots, a_{i_r}, c_1, c_2, \dots, c_m) = P$. On a donc le résultat.

Si $(T_2; R)$ est une exception de Grünbaum, on procède comme pour le lemme 3.1. Mais comme $s^+_{T_1}(x) \geq b_1(P)$, on a forcément R entrant. On retrouve les exceptions $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_4$ ou $\mathcal{P}_6$. □

Lemme 3.3 *Soit T un tournoi réductible d'ordre n de décomposition $T_1 \to T_2$, P un chemin sortant d'ordre n et $U \subset V(T_2)$ tel que:*

1) $A^+(P) \geq |T_1| \geq 2$;

2) $b_1(P) < |T_1|$;

3) P^{-1} est sortant;

4) $|U| \geq 2$ et $s^+_{T_2}(U) \geq b_1(P^{-1}) + 1$.

Alors il existe $u \in U$ tel que tout outgénérateur de T_1 est origine d'un chemin P dans T terminant en u.

Preuve. Ce lemme se prouve de manière analogue aux deux précédents.

Soient Q le plus petit sous-chemin initial de P contenant $|T_1|$ arêtes positives et R le sous-chemin $P - Q$. Alors R est non vide car $A^+(P) \geq |T_1|$ et $|R| < |T_2|$ car $b_1(P) < |T_1|$. Soit $(i_1, j_1, i_2 - i_1, j_2 - j_1, \ldots, i_r - \sum_{k=1}^{r-1} i_k)$ le type de Q. Soit a_1 un outgénérateur de T_1. Il est origine d'un chemin ascendant hamiltonien de T_1: $Q_1 = (a_1, \ldots, a_{i_r})$.

Comme $|R| < |T_2|$, $(T_2; R^{-1})$ n'est pas une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}'_l$. Donc d'après le théorème 2.2, il existe $u \in U$ qui est origine de R^{-1} dans T_2. Autrement dit u est la fin de $R = (c_1, \ldots c_{m-1}, u)$. De plus, $T_2 - R$ possède un chemin descendant hamiltonien $Q_2 = (b_1, \ldots, b_l)$. On a alors $(a_1, \ldots, a_{i_1}, b_1, \ldots, b_{j_1}, a_{i_1+1}, \ldots a_{i_2}, b_{j_1+1}, \ldots b_{j_2}, \ldots, a_{i_r}, c_1, c_2, \ldots, c_{m-1}, u) = P$. □

3.2 Cycles dans les tournois.

L'existence des exceptions de Grünbaum (théorème 2.3) conduit à l'existence de tournois ne contenant pas un certain cycle hamiltonien. En effet, les tournois de Grünbaum ne contiennent pas le cycle composé d'un chemin hamiltonien alterné dont les deux extrémités sont reliées par une arête (exception $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$). De plus, les tournois dont une restriction d'ordre $n-1$ est un tournoi de Grünbaum ne contiennent pas de cycle alterné hamiltonien (exception $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$ et $\mathcal{C}_6$). En effet, pour cela il faudrait que les tournois de Grünbaum contiennent un chemin hamiltonien alterné.

Dans cette partie, nous donnons des conditions suffisantes sur un tournoi T et un cycle C de même ordre que T, pour que T contienne C. Dans chacune des preuves ci-dessous, nous utilisons les résultats de la partie précédente. Comme ceux-ci possèdent des exceptions, cela nous oblige à regarder d'une manière spéciale ce qui se passe pour celles-ci. Pour que les preuves restent lisibles, nous traitons les cas générés par ces exceptions par des propositions à la suite de chacune des preuves.

3.2.1 Tournois réductibles.

Théorème 3.1 *Soient T un tournoi réductible d'ordre n et C un cycle non direct d'ordre n. Alors T contient C si et seulement si (T, C) n'est ni une des cinq exceptions $\mathcal{C}_4 =$*

$(E_1(4);(1,1,1,1))$, $\mathcal{C}_5 = (E_2;(1,1,1,1,1,1))$, $\mathcal{C}_6 = (E_3;(1,1,1,1,1,1,1,1))$, $\mathcal{C}_7 = (E_1(4);(2,2))$ *ou* $\mathcal{C}_8 = (3A \to 3A;(4,2))$, *ni une de leurs duales.*

Preuve.

T est réductible, donc il existe une décomposition $T_1 \to T_2$ de T. Il suffit de prouver le théorème pour $|T_1| \leq |T_2|$, la démonstration est duale dans le cas inverse. Notons + le sens dans lequel C a le plus d'arêtes et – le sens inverse. Soit $B_1 = (x_1, \ldots x_k)$ un plus petit bloc de C dans le sens +. Posons $C = (x_1, \ldots, x_n, x_1)$. On a $x_1 \to x_n$. Soit P le chemin sortant $(x_1, \ldots, x_n)$. Comme $A^+(P) \geq \frac{n}{2} \geq |T_1|$, par le lemme 3.1, soit il existe $a \in T_1$ et $b \in T_2$ tel que a est l'origine et b la fin de P dans T et en rajoutant l'arête $a \to b$, on obtient C, soit $(T;P)$ est une exception $\mathcal{P}_i$. Comme B_1 est un plus petit bloc dans le sens + alors $(T;P)$ ne peut être qu'une des exceptions $\mathcal{P}_1(n)$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_4$ ou $\mathcal{P}_6$. Si $(T;P) = \mathcal{P}_1(n)$, $T = E_1(n)$ et $C = (n-2,2)$. Si $|T_1| = 1$, alors $(T;C)$ est l'exception $\mathcal{C}_7$. Si $|T_1| \geq 2$ et T_1 n'est pas un 3-cycle alors d'après le théorème 2.3, T_1 contient le chemin $Q = -(1, n-5)$ ainsi T contient $C = (3, Q, 1, 2, 3)$. Si T_1 est le 3-cycle c'est l'exception $\mathcal{C}_8$. Si $(T;P)$ est une des exceptions $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_4$ ou $\mathcal{P}_6$ alors $(T;C)$ est respectivement l'exception $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$ ou $\mathcal{C}_6$. $\square$

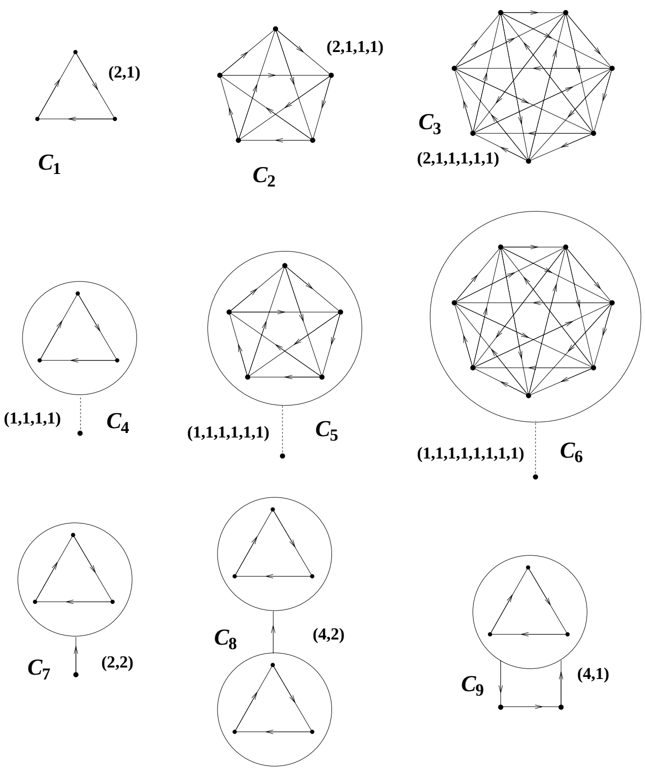

Figure 3.2: Premières exceptions $\mathcal{C}_i$.

Corollaire 3.1.1 *Soit T un tournoi réductible d'ordre $n \geq 9$, alors T est sommet-pancyclique, i.e. pour tout sommet x de T et tout cycle non direct d'ordre $k \leq n$, le tournoi T contient un cycle C passant par x.*

Preuve. Soit C un cycle d'ordre $k \leq n$. Il est facile de voir que tout sommet x appartient à un sous-tournoi T' de T réductible d'ordre k tel que $(T'; C)$ n'est pas une exception C_i pour $4 \leq i \leq 8$. □

3.2.2 Cycles ayant un long bloc.

Théorème 3.2 *Soient T un tournoi $(= k)$-fortement connexe $(k \geq 1)$ d'ordre n et C un cycle orienté d'ordre n qui contient un bloc de longueur au moins $k+3$. Alors T contient C si et seulement si $(T; C)$ n'est pas l'exception $\mathcal{C}_9$.*

Preuve.

Le théorème de Camion affirme que tout tournoi fortement connexe contient un cycle hamiltonien direct. On supposera donc désormais que C est non direct. Si T est $(= k)$-fortement connexe, il existe un sous-tournoi X de T tel que $|X| = k$ et $T - X$ soit réductible. Prenons $T_1 \to T_2$ une décomposition de $T - X$ et $(x_1, \ldots, x_k)$ un chemin hamiltonien ascendant de X. Comme $T - (X \setminus \{x_1\})$ est fortement connexe, il existe un ingénérateur u de T_2 tel que $u \to x_1$. De même, il existe un outgénérateur v de T_1 tel que $x_k \to v$.

Soit $B = (a_0, \ldots, a_l)$ un bloc de C de longueur $l \geq k+3$. On définit + le sens des arêtes de B et – le sens opposé, et on numérote les sommets de C à partir de a_0: $C = (a_0, \ldots, a_{n-1}, a_0)$. On peut supposer $|T_1| \leq |T_2|$ (la démonstration est duale si l'inégalité est inverse).

1) Si $|T_1| \geq 2$ (et donc $|T_2| \geq 2$). Il existe $t \in T_1$ distinct de v tel que v soit un outgénérateur de $T_1' = T_1 - t$. Posons $T_2' = T_2 - u$.

   Soit P le chemin $(a_{k+2}, \ldots, a_{n-1}, a_0)$. On a $|A^+(P)| + |A^-(P)| = n - k - 2 = |T_1| + |T_2| - 2$. Donc $|T_1| - 1 \leq |A^+(P)|$ ou $|T_1| - 1 \leq |A^-(P)|$.

   - Si $|T_1| - 1 \leq |A^+(P)|$.
     Par le lemme 3.1, soit $(T_1' \to T_2'; P^*)$ est une exception $\mathcal{P}_i$ et T contient C d'après la proposition 3.2.1 cas 1), 2) et 3), soit v est origine d'un chemin P^* dans $T_1' \to T_2'$ de fin dans T_2' et $(P^*, t, u, x_1, \ldots x_k, v)$ est le cycle C.
   - Si $|T_1| - 1 \leq |A^-(P)|$.
     Soit b un outgénérateur de $T_1 - v$. Par le lemme 3.1, soit $(T_1' \to T_2'; (P^{-1})^*)$ est une exception $\mathcal{P}_i$ et T contient C d'après la proposition 3.2.1 cas 2), 3) et 4), soit b est origine de $(P^{-1})^*$ avec une fin c dans T_2'. Ceci veut dire qu'il existe $c \in T_2'$ origine d'un chemin ${}^*P$ finissant en b. Ainsi $(v, {}^*P, u, x_1, \ldots x_k, v)$ est le cycle C.

2) Si $|T_1| = 1$. Posons $T_1 = \{t\}$. Soit U l'ensemble des sommets y de T_2 pour lesquels il existe un outgénérateur x de X tel que $y \to x$. L'ensemble U est non vide et contient un ingénérateur de T_2 car T est fortement connexe.

Si $|U| \geq 2$. Soit Q le chemin $(a_1, a_0, a_{n-1}, \dots a_{k+3})$. Le chemin Q est entrant et $b_1(Q) = 1$. Donc d'après le théorème 2.2, soit $(T_2; Q)$ est une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}'_l$ avec U inclus dans l'ensemble des sommets non origine de Q dans T_2 et on a le résultat par la proposition 3.2.2, soit dans U il y a une origine u de Q. Soit $x \in X$ un outgénérateur de X tel que $u \to x$. x est origine d'un chemin ascendant hamiltonien de X: O_X. On a ainsi $(O_X, t, Q^{-1}, x) = C$.

Si $|U| = 1$. Posons $U = \{u\}$. Le tournoi $T - u$ est réductible car $Out(X) \to T - (Out(X), u)$. Donc T est (=1)-fortement connexe donc $|X| = 1$, disons $X = \{x\}$. Si $|T_2| \geq 3$ en prenant $X = \{u\}$ et la décomposition $T(x, t) \to T_2 - u$, on a le résultat en appliquant le 1). Si $|T_2| = 2$, le tournoi T est d'ordre 4 et C un cycle direct d'ordre 4. Impossible par hypothèse. □

Définition 6

$A_1(k, n)$ est l'ensemble des tournois T $(= k)$-fortement connexes d'ordre $n \geq k + 6$ qui possèdent un sous-tournoi sur k sommets X tel que $T - X$ soit réductible de décomposition $T_1 \to T_2$, dessinés figure 3.3.

$A_2(k)$ est l'ensemble des tournois $(= k)$-fortement connexes d'ordre $k + 8$ dessinés figure 3.3.

$A_3(k)$ est l'ensemble des tournois $(= k)$-fortement connexes d'ordre $k + 10$ dessinés figure 3.3.

Pour tous ces tournois, x est un outgénérateur de X origine d'un chemin hamiltonien ascendant O_X de X de fin y et v est un outgénérateur de T_1, origine d'un chemin hamiltonien ascendant Q de T_1 de fin t.

Le cycle $CA_1(n)$ est le cycle $(n - 2, 2)$.
Le cycle $CA'_1(n)$ est le cycle $(n - 3, 1, 1, 1)$.
Le cycle $CA_2(k)$ est le cycle $(k + 4, 1, 1, 2)$.
Le cycle $CA'_2(k)$ est le cycle $(k + 3, 1, 1, 1, 1, 1)$.
Le cycle $CA_3(k)$ est le cycle $(k + 4, 1, 1, 1, 1, 2)$.
Le cycle $CA'_3(k)$ est le cycle $(k + 3, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.
Le cycle $CB_1(k, n)$ est le cycle $(k + 4, n - k - 4)$.
Le cycle $CB'_1(k, n)$ est le cycle $(k + 3, 1, 1, n - k - 5)$.

Proposition 3.2.1 *Soit T un tournoi (=k)-fortement connexe.*
1) Si $T \in A_1(k, n)$ alors T contient les cycles $CA_1(n)$ et $CA'_1(n)$.
2) Si $T \in A_2(k)$ alors T contient les cycles $CA_2(k)$ et $CA'_2(k)$.
3) Si $T \in A_3(k)$ alors T contient les cycles $CA_3(k)$ et $CA'_3(k)$.
4) Si $T \in A_1(k, n)$ alors T contient les cycles $CB_1(k, n)$ et $CB'_1(k, n)$.

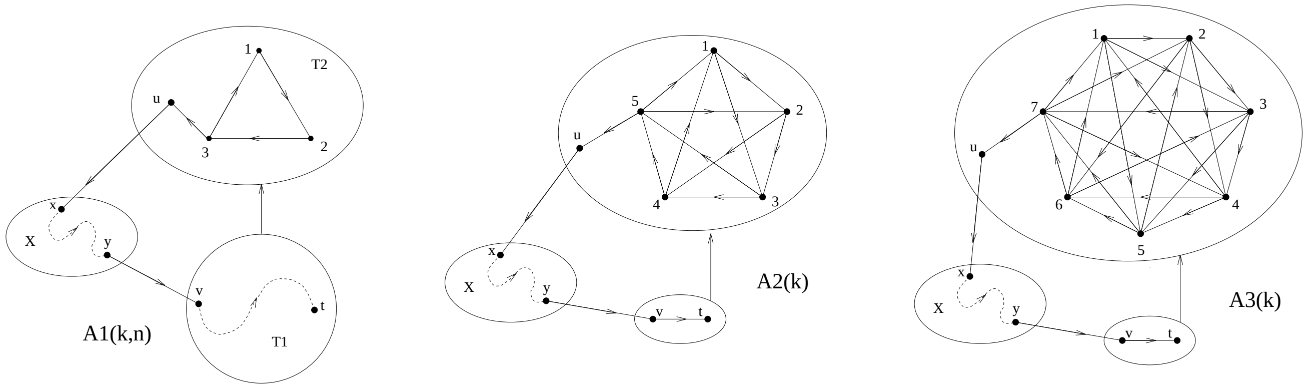

Figure 3.3: Les tournois $A_1(k,n)$, $A_2(k)$ et $A_3(k)$.

Preuve. 1) Soit T un tournoi de $A_1(k,n)$. On a $CA'_1(n) = (3, u, O_X, Q^*, 2, t, 1, 3)$ et $CA_1(n) = (u, O_X, Q, 2, 3, u)$.

2) Soit T un tournoi de $A_2(k)$. On a $CA_2(k) = (5, u, O_X, v, 3, 4, t, 2, 1, 5)$ et $CA'_2(k) = (5, u, O_X, v, 4, t, 3, 1, 2, 5)$.

3) Soit T un tournoi de $A_3(k)$. On a $CA_3(k) = (7, u, O_X, v, 3, 4, t, 6, 5, 2, 1, 7)$ et $CA'_3(k) = (7, u, O_X, v, 6, 2, 3, t, 5, 4, 1, 7)$.

4) Soit T un tournoi de $A_1(k,n)$. Soit R un chemin hamiltonien descendant de $T_1 - v$. Ainsi $CB_1(k,n) = (3, u, O_X, v, 2, 1, R, 3)$.
Si $y \to 3$, on a $CB'_1(k,n) = (u, O_X, 3, 1, t, 2, Q^*, u)$. De même, on a le résultat si $y \to 2$ ou $y \to 1$.
Si $y \leftarrow \{1,2,3\}$, si T_1 n'est pas un 3-cycle, T_1 contient $S = -(1, |T_1| - 2)$ ainsi $CB'_1(k,n) = (3, u, O_X, 1, 2, S^{-1}, 3)$. Si T_1 est le 3-cycle (v, w, t) alors $CB'_1(k,n) = (3, u, O_X, y, v, t, 2, 1, w, u)$.
□

Définition 7 Soient T un tournoi $(=k)$-fortement connexe d'ordre n et $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ un cycle. On dit que $(T;C)$ est un *cas particulier* si :

1) il existe un sous-tournoi X sur k sommets de T tel que $T - X$ est réductible de décomposition $T_1 \to T_2$ où $V(T) = \{t\}$.

2) $B = (a_0, a_1, \ldots, a_{k+3})$ est un chemin ascendant et $Q = (a_1, a_0, \ldots, a_{k+3})$ un chemin entrant tel que $b_1(Q) = 1$.

3) $(T_2; Q)$ est le dual d'une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}'_l$.

4) U, l'ensemble des sommets $u \in T_2$ qui dominent vers un outgénérateur de X, est de cardinal supérieur ou égal à deux, contient un ingénérateur de T_2, et est inclus dans S, l'ensemble des sommets non origine de Q dans T_2.

Proposition 3.2.2 *Soient T un tournoi $(=k)$-fortement connexe d'ordre n et C un cycle tels que $(T;C)$ soit un cas particulier. Alors T contient C si et seulement si $(T;C)$ n'est pas l'exception $\mathcal{C}_9$.*

Preuve.

Comme $b_1(Q) = 1$ pour un cas particulier, nous n'avons qu'à considérer les exceptions $\mathcal{E}_i$, pour $i \in \{0, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 19, 20, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 37, 38, 40, 41, 43, 44, 47, 48, 49\}$, $\mathcal{F}_3(n-k-1)$, $\mathcal{F}_5(n-k-1)$, $\mathcal{F}_7(n-k-1)$, $\mathcal{F}_{11}(n-k-1)$ et $\mathcal{F}_{13}(n-k-1)$.

Si $(T_2; Q)$ est le dual de l'exception $\mathcal{E}_9$, soit x un outgénérateur de X. Comme U est inclus dans l'ensemble des sommets non origine de Q dans T_2, on a $x \rightarrow 3$ et x est origine d'un chemin hamiltonien ascendant O_X de X ainsi $C = (O_X, t, 2, 1, 4, 5, 3, x)$.

Si $(T_2; Q)$ est le dual de l'exception $\mathcal{E}_0$, soit x un outgénérateur de X. Le sommet x est origine d'un chemin hamiltonien ascendant O_X de X. Si $x \rightarrow 1$, alors $C = (O_X, t, 2, 3, 1, x)$. Comme 1, 2 et 3 sont équivalents, on peut supposer que $x \leftarrow T_2$. Si $|X| \geq 2$, soit x' un outgénérateur de $X' = X \setminus \{x\}$. Alors x' est origine d'un chemin hamiltonien ascendant $O_{X'}$ de X'. Comme T est exactement $|X|$-fortement connexe, il existe un sommet de T_2, par exemple 1, tel que $x' \leftarrow 1$. Alors $C = (O_{X'}, t, 2, 3, x, 1, x')$. Si $|X| = 1$, $(T; C)$ est l'exception $\mathcal{C}_9$.

Si $(T_2; Q)$ est le dual de l'exception $\mathcal{E}_4$,soit x un outgénérateur de X. Le sommet x est origine d'un chemin hamiltonien ascendant O_X de X. Si $x \rightarrow 1$, $C = (O_X, t, 2, 3, 5, 4, 1, x)$. Comme les sommets de T_2 sont équivalents, on peut supposer que $x \leftarrow T_2$. Si $|X| \geq 2$, soit x' un outgénérateur de $X' = X \setminus \{x\}$. Alors x' est origine d'un chemin hamiltonien ascendant $O_{X'}$ de X'. Comme T est exactement $|X|$-fortement connexe, il existe un sommet de T_2, par exemple 5, tel que $x' \leftarrow 5$, et $C = (O_{X'}, t, 1, 2, 4, 3, x, 5, x')$. Si $|X| = 1$, posons $X = \{x\}$. On a $C = (1, 2, 3, x, 4, 5, t, 1)$.

Si $(T_2; Q)$ est le dual de l'exception $\mathcal{E}_{33}$, soit x un outgénérateur de X. Le sommet x est origine d'un chemin hamiltonien ascendant O_X de X. Si $x \rightarrow 1$, $C = (O_X, t, 5, 2, 4, 3, 7, 6, 1, x)$. Comme les sommets de T_2 sont équivalents, on peut supposer que $x \leftarrow T_2$. Si $|X| \geq 2$, soit x' un outgénérateur de $X' = X \setminus \{x\}$. Alors x' est origine d'un chemin hamiltonien ascendant $O_{X'}$ de X'. Comme T est exactement $|X|$-fortement connexe, il existe un sommet de T_2, par exemple 7, tel que $x' \leftarrow 7$, et $C = (O_{X'}, t, 4, 5, 2, 1, 3, 6, x, 7, x')$. Si $|X| = 1$, posons $X = \{x\}$. On a $C = (6, 3, 4, 5, 2, t, 1, 7, x, 6)$.

Si $(T_2; Q)$ est le dual d'une des autres exceptions, le chemin $(a_2, a_3, \ldots, a_{k+4})$ est ascendant et parmi deux sommets de U, il y a un sommet u origine de $Q' = (a_0, a_{n-1}, \ldots, a_{k+2})$ dans T_2. Soit x un outgénérateur de X tel que $u \rightarrow x$ et O_X un chemin ascendant hamiltonien de X d'origine x. On a $C = (O_X, t, Q'^{-1}, x)$. □

Théorème 3.3 *Soient T un tournoi $(= k)$-fortement connexe $(k \geq 1)$ d'ordre n et C un cycle d'ordre n dont un bloc est de longueur $k+2$. Alors T contient C.*

Preuve. Soit $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ un cycle de longueur n avec $(a_0, a_1, \ldots, a_{k+2})$ un bloc de longueur $k+2$. Comme T est k-fortement connexe il existe un sous-tournoi X de T tel que $T' = T - X$ soit réductible. Sans perte de généralité, on peut supposer que $|Out(T')| \leq |In(T')|$. Posons $T_1 = Out(T')$ et $T_2 = T' - Out(T')$, on a $T_1 \rightarrow T_2$. Soit O

un chemin hamiltonien ascendant de X d'origine x et de fin y. Comme T est k-fortement connexe, il existe un outgénérateur t de T_1 tel que $y \to t$ et un ingénérateur u de T_2 tel que $u \to x$. Soient $U = \{v \in T_2, v \to x\}$, $V = \{v \in T_2, v \leftarrow x\}$. Notons que (U, V) est une partition de $V(T_2)$. Soient P le chemin $(a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ et Q le chemin $(a_k, \ldots, a_{n-1})$. Remarquons que P, P^{-1} et Q sont sortants, que $b_1(P) = 1$ et $b_1(Q) = 2$.

1) Si $|T_1| > 1$, comme T_1 est fortement connexe, T_1 possède un cycle hamiltonien direct $C_1 = (t, t_2, \ldots, t_k, t)$. De plus, $A^+(P)+A^-(P) = n-k-1 = |T_1|+|T_2|-1 \geq 2|T_1|-1$, donc $A^+(P) \geq |T_1|$ ou $A^-(P) \geq |T_1|$.

   a) Si $A^+(P) \geq |T_1|$, alors $b_1(P^{-1}) < |T_2|$.
   Supposons que $|U| \geq 2$. Si $s^+_{T_2}(U) \geq b_1(P^{-1}) + 1$ (C'est en particulier le cas si U contient un outgénérateur de T_2 distinct de u ou si $b_1(P^{-1}) = 1$.), comme $b_1(P) = 1 < |T_1|$, on peut appliquer le lemme 3.3. Ainsi dans T', t est origine de P avec une fin dans U et $C = (O, P, x)$.
   On peut donc supposer que $Out(T_2) \subset \{v \in T_2, s^+_{T_2}(v) \geq b_1(P^{-1}) + 1\} \subset V$ et $b_1(P^{-1}) \geq 2$, autrement dit Q^{-1} est sortant. Si $|V| \geq 2$, comme $A^+(Q) = A^+(P) + 1 > |T_1|$, alors $b_1(P) = 1 < |T_1|$ et $s^+_{T_2}(V) = |T_2| \geq b_1(Q^{-1}) + 1$, on peut appliquer le lemme 3.3. Ainsi dans T', t est origine de Q avec fin dans V et $C = (O, Q, x)$. Si $|V| = 1$, posons $V = \{v\}$, on a $Out(T_2) = \{v\}$ donc $v \to T_2 - v$. De plus, $b_1(P^{-1}) = |T_2| - 1 \geq 2$. Comme $b_1(Q) = 2$ et $|T_1| \geq 3$, $(T' - v; Q^*)$ n'est pas une exception $\mathcal{P}_i$. Donc d'après le lemme 3.1, dans $T' - v$, t est origine de Q^* avec fin dans $T_2 - v$ et $C = (O, Q^*, v, x)$.
   Si $|U| = 1$, posons $U = \{u\}$, alors $|V| \geq 2$. Si $b_1(P^{-1}) \geq 2$, on a le résultat de manière identique à ce qui précède. On peut donc supposer que $b_1(P^{-1}) = 1$. Soit $B = (a_{k+2}, \ldots, a_l)$ le bloc de C qui contient l'arête $a_{k+2} \leftarrow a_{k+3}$. Puisque $A^+(P) \geq |T_1| \geq 3$, nous avons $a_l \neq a_0$, et $|B| < |T_2|$. Ainsi u est origine de B^* dans T_2 et $T_2 - B^*$ est non vide. Posons $S = (a_l, \ldots, a_{n-1})$. Par le lemme 3.1, soit $(T' - (B^*, t, t_2); S)$ est une exception $\mathcal{P}_i$, $i \in \{2, 4, 6\}$ et on a le résultat par la proposition 3.3.1, soit dans $T' - (B^*, t, t_2)$, t_3 est origine de S avec fin dans $T_2 - B^*$ et $C = (O, t, t_2, B^*, S, x)$.

   b) Supposons que $A^+(P) < |T_1|$. On a donc $A^-(P) \geq |T_1|$.
   Si $x \leftarrow t_2$, comme ${}^*P$ est entrant et $|T_1| \geq 3$, alors $(T' - t; ({}^*P)^{-1})$ n'est pas une exception $\mathcal{P}_i$, alors d'après le lemme 3.1, t_2 est origine de $({}^*P)^{-1}$ avec fin dans T_2 et $C = (t_2, O, t, {}^* P)$.
   Désormais, on peut donc supposer que $x \to t_2$. Si $b_1(P^{-1}) \geq 2$, alors $(P^*)^{-1}$ est un chemin sortant. Ainsi d'après le lemme 3.1, soit $(T' - t; (P^*)^{-1})$ est l'exception $\mathcal{P}_1(2)$ et on a le résultat par la proposition 3.3.2, soit t_2 est origine de $(P^*)^{-1}$ avec fin dans T_2 et $C = (O, t, P^*, x)$.
   On peut donc supposer que $b_1(P^{-1}) = 1$. Soit $(a_l, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1})$ le bloc de C contenant l'arête $a_{n-2} \to a_{n-1}$, R le chemin $(a_{l+1}, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ et S le chemin

$(a_{k+2},\dots,a_l)$. Comme $A^+(P) < |T_1|$ et $|T_1| \geq |T_2|$, on a $|R| < |T_2|$. Si $|U| = 2$ alors d'après le théorème 2.2, dans T_2, il y a un chemin R^{-1} d'origine $u' \in U$. Comme S est entrant et $|T_1| \geq 3$, $(T' - (R,t); S^{-1})$ n'est pas une exception $\mathcal{P}_i$; ainsi par le lemme 3.1, dans $T' - (R,t)$, t_2 est origine de S^{-1} avec fin dans $T_2 - R$ et $C = (u', O, t, S, R)$.

Supposons que $U = \{u\}$. Dans $T(V)$, on peut trouver R, d'après le théorème 2.3. D'après le lemme 3.1, soit $(T' - (R,t,t_2); S^{-1})$ est une exception $\mathcal{P}_i$, pour $i \in \{2,4,6\}$ et on a le résultat par la proposition 3.3.3, soit dans $T-(X,R,t,t_2)$, t_3 est origine de S^{-1} avec fin dans $T_2 - R$ et $C = (O,t,t_2,S,R,x)$.

2) Si $|T_1| = 1$ alors $T_1 = \{t\}$.

Si $k \geq 2$. On a $d^-_X(x) \leq k-2$ donc comme T est $(=k)$-fortement connexe, $|U| \geq 2$. Si $k = 1$, et $|U| = 1$, i.e. $U = \{u\}$, alors $T - u$ est réductible de décomposition $x \to (T_2 - u) \cup \{t\}$. Et $u \leftarrow t$ et $d^-_{T_2}(u) \geq 1$ car u est un ingénérateur de T_2. On peut donc se ramener au cas où $|U| = 2$.

Si $s^+_{T_2}(U) \geq b_1(P^{-1})$, d'après le théorème 2.2, soit $(T_2; ({}^*P)^{-1})$ est une exception $\mathcal{E}_i$ ou $\mathcal{F}_j(n-k-1)$ et on a le résultat par la proposition 3.3.4, soit, dans U, il y a un sommet z origine de $({}^*P)^{-1}$ et $C = (z, O, t, {}^*P)$. On peut donc désormais supposer que $s^+_{T_2}(U) < b_1(P^{-1})$. On a en particulier $b_1(P^{-1}) \geq 2$, T_2 réductible et $Out(T_2) \subset V$. Si $|V| \geq 2$, $(T_2; (P^*)^{-1})$ ne peut alors pas être une exception $\mathcal{E}_i$ ou $\mathcal{F}_j(n-k-1)$ avec V inclus dans l'ensemble des sommets non origines de $(P^*)^{-1}$. Par conséquent, d'après le théorème 2.2, dans U, il y a un sommet origine de $(P^*)^{-1}$ et $C = (O,t,P^*,x)$. Si $|V| = 1$ alors $|Out(T_2)| = 1$, disons $Out(T_2) = V = \{v\}$. Posons $Q' = (a_{k+1},\dots,a_{n-2})$. D'après le théorème 2.3, soit $(T_2(U); Q')$ est une exception de Grünbaum et on a le résultat par la proposition 3.3.5, soit $T_2(U)$ contient Q' et $C = (O,t,Q',v,x)$. □

Proposition 3.3.1 *Soient T un tournoi $(=k)$-fortement connexe d'ordre n et un cycle $C = (a_0,a_1,\dots,a_{n-1},a_0)$ d'ordre n dont un plus long bloc est $(a_0,a_1,\dots,a_{k+2})$. On suppose qu'il existe X un sous-tournoi d'ordre k tel que $T' = T - X$ soitt réductible de décomposition $T_1 \to T_2$ avec T_1 le 3-cycle (t,t_2,t_3,t), O un chemin hamiltonien ascendant de X d'origine x et de fin y tel que $y \to t$, u un ingénérateur de T_2 tels que $u \to x$ et $T_2 - u \leftarrow x$. Soient $B = (a_{k+2},\dots,a_l)$ le bloc de C qui contient l'arête $a_{k+2} \leftarrow a_{k+3}$ et S le chemin $(a_l,\dots a_{n-1})$. On sait que u est origine de B^*.*

Si $(T' - (B^*,t,t_2); S)$ est une exception $\mathcal{P}_i$, $i \in \{2,4,6\}$, alors T contient C.

Preuve. Soit w un sommet de $T_2 - B^*$. Si $w \to u$ alors d'après le lemme 3.1, t_2 est origine de S dans $T' - (B^*,t,w)$ et $C = (O,t,w,B^*,S,x)$. On peut donc supposer que $T_2 - B \leftarrow u$. Posons z la fin de B^* et $T_2' = T_2 - B^{**}$. Il est clair qu'il existe w tel que $T_2' - w$ n'est ni 3A, ni 5A, ni 7A. Par le lemme 3.1, t_3 est origine de S dans $T_2' - w$ et $C = (O,t,t_2,w,B^{**},S,x)$. □

Proposition 3.3.2 *Soit T un tournoi $(=k)$-fortement connexe d'ordre n. On suppose qu'il existe X un sous-tournoi d'ordre k tel que $T' = T - X$ soit réductible de décomposition $T_1 \to T_2$ avec T_1 le 3-cycle (t, t_2, t_3, t), T_2 le 3-cycle (v_1, v_2, v_3, v_1), O un chemin hamiltonien ascendant de X d'origine x et de fin y tel que $y \to t$ et $x \to t_2$. Soit $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ un cycle à deux blocs d'ordre n, l'un des deux étant $(a_0, a_1, \ldots, a_{k+2})$.*

Alors T contient C.

Preuve. Si $x \to t_3$ alors $C = (O, t, t_2, v_3, v_2, v_1, t_3, x)$. Si $y \to t_3$ alors $C = (O, t_3, t, v_3, v_2, v_1, t_2, x)$. On peut donc supposer que $t_3 \to \{x, y\}$. On a alors $d_T^-(t_3) \leq k-1$, ce qui est impossible car T est $(=k)$-fortement connexe. □

Proposition 3.3.3 *Soit T un tournoi $(=k)$-fortement connexe d'ordre n, tel qu'il existe X un sous-tournoi d'ordre k tel que $T' = T - X$ est réductible de décomposition $T_1 \to T_2$ avec T_1 le 3-cycle (t, t_2, t_3, t). Soit O un chemin hamiltonien ascendant de X d'origine x et de fin y tel que $y \to t$ et $x \to t_2$ et u un ingénérateur de T_2 tels que $u \to x$ et $T_2 - u \leftarrow x$. Soit $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ un cycle d'ordre n tel que $(a_0, a_1, \ldots, a_{k+2})$ est un bloc et $a_{n-2} \to a_{n-1}$. Soit $(a_l, \ldots, a_{n-2}, a_{n-1})$ le bloc de C contenant l'arête $a_{n-2} \to a_{n-1}$, R le chemin $(a_{l+1}, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ et S le chemin $(a_{k+2}, \ldots, a_l)$. Dans $T_2 - u$, on peut trouver R.*

Si $(T' - (R, t, t_2))$ est une exception $\mathcal{P}_i$, $i \in \{2, 4, 6\}$, alors T contient C.

Preuve. Si c'est $\mathcal{P}_2$ (resp. $\mathcal{P}_4$, $\mathcal{P}_6$), on peut trouver un sous-tournoi T'' de $T_2 - v$ contenant u d'ordre 3 qui n'est pas 3A (resp. 5A, 7A). Soit R un chemin hamiltonien descendant de $T_2 - T''$, par le lemme 3.1, t_3 est origine de S^{-1} avec fin dans $T_2 - R$ et $C = (O, t, t_2, S, R, x)$. □

Proposition 3.3.4 *Soit T un tournoi $(=k)$-fortement connexe d'ordre n, tel qu'il existe X un sous-tournoi d'ordre k tel que $T' = T - X$ soit réductible de décomposition $T_1 \to T_2$ avec $T_1 = \{t\}$. Soit O un chemin hamiltonien ascendant de X d'origine x et de fin y tel que $U = \{v \in T_2, u \to x\}$ est de cardinal au moins deux. Soit $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$ un cycle à deux blocs d'ordre n dont un bloc est $(a_0, a_1, \ldots, a_{k+2})$ et $P = (a_{k+1}, \ldots, a_0)$.*
Si $s_{T_2}^+(U) \geq b_1(P^{-1})$ et $(T_2; (^*P)^{-1})$ est une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j(n-k-1)$ ou $\mathcal{F}_l'(n-k-1)$ avec U inclus dans l'ensemble des sommets de T_2 non origine de $(^*P)^{-1}$ dans T_2 alors T contient C.

Preuve. Comme $(^*P)^{-1}$ est un chemin sortant et $^*P$ un chemin entrant, $(T_2; (^*P)^{-1})$ ne peut être qu'une des exceptions $\mathcal{E}_i$, $i \in \{1, 5, 6, 7, 10, 12, 13, 18, 20, 22, 23, 24, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 34, 35, 36, 38, 39, 40, 43, 46, 47, 48, 49, 51\}$, $\mathcal{F}_j(n-k-1)$, $j \in \{7, 11, 12, 13, 14\}$ ou $\mathcal{F}_l'(n-k-1)$, $l \in \{8, 9, 10\}$.

Si $(T_2; (^*P)^{-1})$ est l'exception $\mathcal{E}_1$, alors $T_2 = 4A$ avec $U \subset \{1, 2, 3\}$ et $C = (k+2, 1, 1, 1)$. Comme tous les sommets sauf 3 sont origines de $(P^*)^{-1}$, alors si $3 \notin U$, on a le résultat par l'argument ci-dessus. On peut donc supposer que $3 \to x$. Si $y \leftarrow 4$, alors $C =$

$(t,2,3,O,4,1,t)$. Si $y \to 4$, notons a un sommet de $\{1,2\} \cap U$, et b l'autre sommet de $\{1,2\}$. On a alors $C = (a,O,4,b,t,3,a)$.

Si $(T_2; (^*P)^{-1})$ est l'exception $\mathcal{E}_7$, alors $T_2 = 5C$ avec $U \subset \{1,2,3,4\}$ et $C = (k+2,2,1,1)$. Comme tous les sommets sauf 5 sont origines de $(P^*)^{-1}$, si $V \neq \{5\}$, on a le résultat par l'argument ci-dessus. On peut donc supposer que $V = \{5\}$. Si $y \to 1$ alors $C = (2,4,O,1,5,t,3,2)$. Si $y \leftarrow 1$ alors $C = (t,3,4,O,1,5,2,t)$.

Si $(T_2; (^*P)^{-1})$ est l'exception $\mathcal{E}_{22}$ alors $T_2 = 6F$ avec $U \subset \{1,2,3\}$ et $C = (k+2,1,1,1,1,1)$. Comme les sommets sauf 1, 2 et 3 sont les seules origines de $(P^*)^{-1}$ dans T_2, si $V \neq \{4,5,6\}$, on a le résultat par l'argument ci-dessus. On peut donc supposer que $V = \{4,5,6\}$ et donc $U = \{1,2,3\}$. Si $y \to 3$ alors $C = (t,1,O,3,4,5,2,t)$. Si $y \leftarrow 3$ alors $C = (t,6,1,O,3,4,5,2,t)$.

Si $(T_2; (^*P)^{-1})$ est une des autres exceptions alors dans $T_2 - U$, il y a un sommet origine de $(P^*)^{-1}$. Ainsi $C = (O,t,P^*,x)$. □

Proposition 3.3.5 *Soit T un tournoi $(=k)$-fortement connexe d'ordre n, tel qu'il existe X un sous-tournoi d'ordre k tel que $T' = T - X$ soit réductible de décomposition $T_1 \to T_2$ avec $T_1 = \{t\}$ et $T_2 = v \to U$, O un chemin hamiltonien ascendant de X d'origine x tel que $x \to v$ et $U \to x$.*

Si $T_2(U) = 3A$ alors T contient le cycle $(k+2,3)$.

Si $T_2(U) = 5A$ alors T contient le cycle $(k+2,1,1,3)$.

Si $T_2(U) = 7A$ alors T contient le cycle $(k+2,1,1,1,1,3)$.

Preuve. $T_2(U) = 3A$: Si $y \to 3$ alors $(t,1,O,3,2,v,t) = (k+2,3)$. Si $y \leftarrow 3$ alors $(t,1,2,O,3,v,t) = (k+2,3)$.

$T_2(U) = 5A$: Si $y \to 1$ alors $(t,2,O,1,4,5,3,v,t) = (k+2,1,1,3)$. Si $y \leftarrow 1$ alors $(t,3,4,O,1,2,5,v,t) = (k+2,1,1,3)$.

$T_2(U) = 7A$: Si $y \to 1$ alors $(t,2,O,1,6,7,3,5,4,v,t) = (k+2,1,1,1,1,3)$. Si $y \leftarrow 1$ alors $(t,7,4,O,1,3,2,6,5,v,t) = (k+2,1,1,1,1,3)$. □

Comme tout tournoi d'ordre n est au plus $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$-fortement connexe, les deux théorèmes ci-dessus et le théorème 3.1 admettent le corollaire immédiat suivant:

Corollaire 3.3.1 *Soient T un tournoi d'ordre $n \geq 6$ et C un cycle orienté d'ordre n non direct qui contient un bloc de longueur au moins $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor + 2$. Alors T contient C.*

Corollaire 3.3.2 (Benhocine & Wojda [6]) *Soient T un tournoi d'ordre n et C un cycle à deux blocs d'ordre n. Alors T contient C, sauf si $(T;C)$ est une des exceptions $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_7$, $\mathcal{C}_8$ et $\mathcal{C}_9$, ou l'exception duale de $\mathcal{C}_8$.*

Preuve. Si T est réductible, on a le résultat par le théorème 3.1. On peut donc supposer que T est $(=k)$-fortement connexe $(k \geq 1)$. Alors $|T| \geq 2k+1$ et C possède un bloc de longueur au moins $k+1$. S'il a un bloc de longueur au moins $k+3$, on a le résultat par le théorème 3.2. Si son bloc maximal est de longueur $k+2$, on a le résultat par le théorème 3.3. Si son bloc maximal est de longueur $k+1$, alors $C=(k+1,k)$ ou $C=(k+1,k+1)$. Si $C=(k+1,k)$, par le théorème 2.3, soit T contient le chemin $+(k,k)$ et en ajoutant l'arête qui joint les deux extrémités de ce chemin on obtient C, (quel que soit le sens de cette arête), soit T est le 3-cycle et $(T;C)$ est l'exception $\mathcal{C}_1$. Si $C=(k+1,k+1)$, prenons $(x_1,x_2,x_3,\dots,x_{2k+2},x_1)$ un cycle hamiltonien direct de T. Supposons que $x_1 \to x_{k+2}$. Si $x_2 \leftarrow x_{k+3}$ alors $(x_{k+3},x_2,x_3,\dots,x_{k+2},x_1,x_{2k+2},\dots,x_{k+3})=C$. On peut donc supposer que $x_2 \to x_{k+3}$ et ainsi de suite que $x_i \to x_{k+i+1}$. On obtient alors $x_{k+2} \to x_1$ ce qui est une contradiction. De le même manière, si nous supposons que $x_1 \leftarrow x_{k+2}$, on en déduit que $x_i \leftarrow x_{k+i+1}$ et on arrive à la contradiciton $x_{k+2} \leftarrow x_1$. □

3.2.3 Tournois exactement 1-fortement connexes.

Théorème 3.4 *Si T est un tournoi (=1)-fortement connexe d'ordre $n \geq 9$ et C un cycle d'ordre n, alors T contient C.*

Preuve. Si C contient un bloc de taille supérieure à 4, le théorème 3.2 donne le résultat. Si le plus grand bloc de C est de taille 3, le théorème 3.3 donne le résultat. Si le plus grand bloc de C est de taille 2 ou 1, on a le résultat par les théorèmes 3.5 et 3.6 respectivement. □

Corollaire 3.4.1 *Soit T un tournoi $(=k)$-fortement connexe d'ordre $n \geq k+8$, C un cycle d'ordre au plus $m \leq n-k+1$ et x un sommet de T. Alors T contient un cycle C passant par x.*

Preuve. Il est facile de voir que x appartient à un tournoi (=1)-fortement connexe d'ordre m qui n'est pas une exception $\mathcal{C}_i$. □

Théorème 3.5 *Soient T un tournoi (=1)-fortement connexe d'ordre n et C un cycle d'ordre n dont le plus grand bloc est de taille 2. Alors T contient C si et seulement si $(T;C)$ n'est ni une des exceptions $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_{10}$ ou $\mathcal{C}_{11}$, ni une de leur duales.*

Preuve. Posons $C=(a_0,a_1,\dots a_{n-1},a_0)$ avec (a_0,a_1,a_2) un chemin ascendant de taille 2 dans le sens + (celui de la majorité des arêtes). Comme T est $(=1)$-fortement connexe, il existe un sommet x tel que $T'=T-x$ soit réductible. Supposons que $|Out(T')| \geq |In(T')|$. La démonstation est duale quand l'inégalité est inverse. Posons $T_2=In(T')$ et $T_1=T'-T_2$. Clairement, $T_1 \to T_2$ est une décomposition de T'. Comme T est fortement connexe, il existe $u \in T_2$ tel que $x \leftarrow u$ et $v \in T_1$ tel que $x \to v$. De plus, T_2 est fortement connexe donc possède un cycle hamiltonien direct $C_2=(u,u_1,\dots u_k)$ ou est restreint à un sommet.

1) Si $|T_2| > 1$ alors $|T_2| \geq 3$.

On peut supposer qu'il existe un sommet $w \neq u$ de T_2 tel que $x \leftarrow w$ sinon $T - u$ est réductible de décomposition $T_1 \cup \{x\} \to T_2 - u$ et on applique le procédé à $T - u$ dont l'ensemble des ingénérateurs est de cardinal inférieur à T_2.

Si $a_3 \leftarrow a_4$. Par le lemme 3.2, u est origine de $P = (a_1, a_0, a_{n-1} \dots, a_4)$ avec une fin dans T_1 dans le tournoi $T_1 \to T_2 - w$. On a alors $C = (u, x, w, P^{-1})$. (Remarque: $(T_1 \to T_2 - w; P)$ n'est pas l'exception $\mathcal{P}_2$ ou $\mathcal{P}_4$ car $|T_2 - w| \geq 2$.)

Si $a_3 \to a_4$ et $a_4 \leftarrow a_5$. Quitte à renommer u et w, w a un voisin externe t dans $T_2 - u$. Posons $Q = (a_1, a_0, a_{n-1} \dots, a_5)$. Par le lemme 3.2, soit $(T' - (w,t); Q)$ est une des exceptions $\mathcal{P}_4$ et $\mathcal{P}_6$ et on a le résultat par la proposition 3.5.1, soit u est origine de Q avec une fin dans T_1 dans le tournoi $T' - (w,t)$. On a alors $C = (u, x, w, t, Q^{-1})$.

Si $a_3 \to a_4$ et $a_4 \to a_5$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $C = (2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1)$ sinon on se ramène aux cas précédents. Si $|T_2| = 3$, T_2 est le 3-cycle (u, u_1, u_2). S'il existe $v \in T_1$ tel que $v \to x$ alors par le théorème 2.3, $T_1 - v$ contient $P = (a_6, \dots, a_0)$ et $C = (u, x, v, u_1, u_2, P, u)$. Si $x \to T_1$, alors T_1 contient $R = (a_6, \dots, a_{n-1})$. Posant $\{v_1, v_2\} = T - R$, on a $C = (x, v_1, u_1, v_2, u_2, u, R, x)$. Si $|T_2| \geq 4$, quitte à renommer u et w, w est origine d'un chemin ascendant (w, t_1, t_2) dans $T_2 - u$. Posons $Q = (a_1, a_0, a_{n-1} \dots, a_6)$. Alors $(T - (w, t_1, t_2); Q)$ n'est pas une des exceptions $\mathcal{P}_i$, et donc par le lemme 3.2, u est origine de Q avec une fin dans T_1 dans le tournoi $T - (w, t_1, t_2)$. On a alors $C = (u, x, w, t_1, t_2, Q^{-1})$.

2) Si $T_2 = \{u\}$.

Posons $W = \{w \in T_1, w \to x\}$, $V = \{v \in T_1, v \leftarrow x\}$ et $P = (a_3, \dots a_{n-1}, a_0)$. Notons que soit P est un chemin sortant $b_1(P) \leq 2$ ou un chemin entrant avec $b_1(P) = 1$.

a) Si $|W| \geq 2$.
Si $b_1(P) = 1$, par le théorème 2.2, soit $(T_1; P)$ est une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}'_l$ et on a le résultat par la proposition 3.5.2, soit il existe un sommet $w \in W$ origine de P dans T_1 et $C = (u, x, P, u)$. Supposons que $b_1(P) = 2$ et donc P est sortant. Si $s^+_{T_1}(W) \geq 3$, par le théorème 2.2, soit $(T_1; P)$ est une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}'_l$ et on a le résultat par la proposition 3.5.3, soit il existe un sommet $w \in W$ origine de P dans T_1 et $C = (u, x, P, u)$. On peut donc supposer que $W = \{w_1, w_2\}$, que $V \to W$ et que $a_3 \to a_4 \to a_5$. En appliquant le raisonnement ci-dessus à tous les blocs de taille 2 dans le sens $+$, on peut supposer que $C = (2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1)$. D'après le théorème 2.3, $T(V)$ contient $Q = (a_5, a_6, \dots, a_0)$ et $C = (w_1, u, w_2, x, Q, w_1)$.

b) Si $W = \{w\}$.

Si $a_{n-2} \to a_{n-1}$, posons $P = (a_2, \ldots, a_{n-2})$. Par le théorème 2.3, soit $(T(V); P)$ est une exception de Grünbaum et on a le résultat par la proposition 3.5.4, soit $T(V)$ contient P et on a $C = (u, w, x, P, u)$.

Si $a_{n-2} \leftarrow a_{n-1}$. S'il existe $v \in V$ tel que $w \to v$, (Ceci imlique $|V| \geq 2$ car T est fortement connexe.) posons $Q = (a_2, \ldots, a_{n-3})$. Par le théorème 2.3, soit $(T(V) - v; Q)$ est une exception de Grünbaum et on a le résultat par la proposition 3.5.5, soit $T(V) - v$ contient Q et on a $C = (w, x, Q, u, v, w)$. On peut donc supposer que $V \to w$. Si $a_4 \to a_3$, par le théorème 2.3, $T(V)$ contient $R = (a_4, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ (car $b_1(R^{-1}) = 2$) et $C = (w, x, u, R, w)$. On peut donc supposer que $a_3 \to a_4$. Si $|V| = 3$, alors $C = (2, 1, 1, 2)$ et $(T; C)$ est une exception $\mathcal{C}_{11}$. Si $|V| \geq 4$, par le théorème 2.3, $T(V)$ contient $S = (a_4, \ldots, a_{n-3})$. Soit (v_0, v_1, v_2) un chemin hamiltonien ascendant de $T(V) - S$, on a $C = (v_0, v_1, v_2, x, Q, u, w, v_0)$.

c) Si $W = \emptyset$.

On a alors $x \to T_1$. Si $|T_1| = 1$, $(T; C)$ est l'exception $\mathcal{C}_1$. Si $|T_1| \geq 2$, T_1 contient $P = (a_3, \ldots, a_{n-1})$ et posant $w = T_1 - P$, on a $C = (x, w, u, P, x)$. □

Proposition 3.5.1 *Soit T un tournoi (=1)-fortement connexe tel que $T - x = T_1 \to T_2$ avec T_2 le 3-cycle u, w, t tel que $\{u, w\} \to x$.*

a) Si $T_1 = 3A$ alors T contient le cycle $(2, 1, 1, 1, 1, 1)$.

b) Si $T_1 = 5A$ alors T contient le cycle $(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

c) Si $T_1 = 7A$ alors T contient le cycle $(2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Preuve.

Comme les sommets de $3A$, $5A$ et $7A$ sont tous équivalents, on peut supposer $x \to 1$.

a) $(u, x, 1, 3, t, 2, w, u) = (2, 1, 1, 1, 1, 1)$.

b) $(u, x, 1, 4, 5, 3, t, 2, w, u) = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

c) $(u, x, 1, 6, 7, 5, 3, 4, t, 2, w, u) = (2, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)$. □

Proposition 3.5.2 *Soient T un tournoi (=1)-fortement connexe tel que $T - x = T_1 \to u$, et $C = (a_0, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ un cycle dont un plus long bloc est (a_0, a_1, a_2). Si $(T_1; P = (a_3, \ldots, a_0))$ est une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}'_l$, $b_1(P) = 1$ et $W = \{w \in T_1, w \to x\}$ est de cardinal au moins 2 et inclus dans l'ensemble des sommets non origine de P dans T_1 alors T contient C.*

Preuve.

Comme P^{-1} est sortant, $b_1(P) = 1$ et que les blocs sont de taille 2 au plus et que C a plus d'arêtes dans le sens $+$, nous ne devons considérer que les exceptions $\mathcal{E}_i$ pour $i \in \{0, 2, 4, 8, 9, 15, 16, 19, 25, 32, 33, 37\}$, $\mathcal{F}_1(4)$, $\mathcal{F}_8(5)$, $\mathcal{F}_9(7)$ et $\mathcal{F}_{10}(9)$ et les duales des exceptions $\mathcal{E}_i$ pour $i \in \{1, 6, 18, 20, 22, 23, 24, 29, 30, 31, 40, 49\}$. Pour chacune de ces exceptions, nous donnons le cycle C, les valeurs possibles de W et la réalisation de C pour celles-ci.

Exc $\mathcal{E}_0$: (2,1,1,1) [$W = \{1, 2\}$ (1,x,3,2,u,1)].

Exc $\mathcal{E}_2$: (2,1,1,2) [$W = \{3, 4\}$ (3,x,2,1,u,4,3)].

Exc $\mathcal{E}_4$: (2,1,1,1,1,1) [$5 \notin W$ et $1 \in W$ (1,x,5,3,4,2,u,1)]. Les autres cas sont équivalents.

Exc $\mathcal{E}_8$: (2,1,1,1,1,1) [$W = \{2, 5\}$ (2,x,4,3,5,1,u,2)].

Exc $\mathcal{E}_9$: (2,1,1,1,1,1) [$W = \{4, 5\}$ (x,3,5,4,u,1,2,x)] [$2 \in W$ (2,x,1,4,5,3,u,2)].

Exc $\mathcal{E}_{15}$: (2,1,1,1,2,1) [$1 \in W$ (1,x,5,4,3,2,6,u,1)]. Les autres cas sont équivalents.

Exc $\mathcal{E}_{16}$: (2,1,1,2,1,1) [$5 \in W$ (5,x,3,2,6,1,4,u,5)] [$4 \in W$ (4,x,3,2,6,1,5,u,4)].

Exc $\mathcal{E}_{19}$: (2,1,1,1,1,2) [$2 \in W$ (2,x,1,5,6,3,u,4,2)]. Les autres cas sont équivalents.

Exc $\mathcal{E}_{25}$: (2,1,1,1,1,2) [$W = \{4, 5\}$ (4,x,3,2,5,1,u,6,4)].

Exc $\mathcal{E}_{32}$: (2,1,1,2,1,1) [$W = \{5, 6\}$ (5,x,4,6,u,2,3,1,5)].

Exc $\mathcal{E}_{33}$: (2,1,1,1,1,1,1,1) [$7 \notin W$ et $1 \in W$ (1,x,7,5,6,4,u,2,3,1)]. Les autres cas sont équivalents.

Exc $\mathcal{E}_{34}$: (2,1,1,1,1,1,1,1) [$4 \in W$ (4,x,7,1,u,5,2,6,3,4)]. Les autres cas sont équivalents.

Exc $\mathcal{F}_1(4)$: (2,1,1,2) $X = \{4\}$ [$1 \in W$ (4,1,x,2,u,3,4)]. Les autres cas sont équivalents.

Exc $\mathcal{F}_8(5)$: (2,1,1,1,1,1) $X = \{4, 5\}$ [$W = \{4, 5\}$ (4,x,1,3,5,2,u,4)].

Exc $\mathcal{F}_9(7)$: (2,1,1,1,1,1,1,1) $X = \{6, 7\}$ [$W = \{6, 7\}$ (6,x,1,4,5,3,7,2,u,6)].

Exc $\mathcal{F}_{10}(9)$: (2,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$X = \{8, 9\}$ [$W = \{8, 9\}$ (8,x,1,6,7,5,9,2,4,3,u,8)].

Dual $\mathcal{E}_1$: (2,2,1,1) [$1 \in W$ (1x423u1)] [$2 \in W$ (2,x,4,1,3,u,2)]. Les autres cas sont équivalents.

Dual $\mathcal{E}_6$: (2,2,1,2) [$W = \{4, 5\}$ (5,x,1,2,3,u,4,5)].

Dual $\mathcal{E}_{18}$: (2,2,2,2) [$2 \in W$ (2,x,1,4,5,3,u,6,2)]. Les autres cas sont équivalents.

Dual $\mathcal{E}_{20}$: (2,2,1,1,1,1) [$W = \{1, 2\}$ (1,x,6,2,4,3,5,u,1)].

Dual $\mathcal{E}_{22}$: (2,2,1,1,1,1) [$1 \in W$ (1,x,4,6,3,5,2,1)]. Les autres cas sont équivalents.

Dual $\mathcal{E}_{23}$: (2,2,1,1,1,1) [$W = \{4, 6\}$ (6,x,1,2,4,3,5,u,6)].

Dual $\mathcal{E}_{24}$: (2,2,1,1,1,1) [$1 \in W$ (1,x,5,6,3,2,4,u,1)]. Les autres cas sont équivalents.

Dual $\mathcal{E}_{29}$: (2,2,1,1,1,1) [$W = \{4, 6\}$ (6,x,3,1,5,2,4,u,6)].

Dual $\mathcal{E}_{30}$: (2,2,1,1,1,1) [$W = \{4, 6\}$ (4,x,5,3,6,2,1,u,4)].

Dual $\mathcal{E}_{31}$: (2,2,2,2) [$W = \{3, 4\}$ (3,x,6,1,5,2,u,4,3)].

Dual $\mathcal{E}_{40}$: (2,2,1,1,2,1) [$W = \{1, 2\}$ (1,x,7,2,3,5,6,4,u,1)].

Dual $\mathcal{E}_{49}$: (2,2,1,1,1,1,1,1) [$W = \{1, 2\}$ (1,x,3,4,6,5,7,u,2,8,1)]. □

Proposition 3.5.3 *Soient T un tournoi (=1)-fortement connexe tel que $T - x = T_1 \to u$, et $C = (a_0, \ldots, a_{n-1})$ un cycle dont un plus long bloc est (a_0, a_1, a_2). Soient $P = (a_3, \ldots, a_0)$ et $W = \{w \in T_1, w \to x\}$. Si $b_1(P) = 2$, $|W| \geq 2$, $s^+_{T_1}(W) \geq 3$ et $(T_1; P)$ est une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}'_l$ avec W inclus dans l'ensemble des sommets non origine de P dans T_1 alors T contient C.*

Preuve.

Comme P et P^{-1} sont sortants, $b_1(P) = 2$ et les blocs sont de longueur 2 au plus, nous ne devons considérer que les exceptions $\mathcal{E}_i$ pour $i \in \{3, 11, 14, 17, 21, 42, 45, 50\}$,

$\mathcal{F}_2(5)$, $\mathcal{F}_8(6)$, $\mathcal{F}_9(8)$ et $\mathcal{F}_{10}(10)$. Pour chacune de ces exceptions, nous donnons le cycle C, les valeurs possibles de W et la réalisation de C pour celles-ci.

Exc $\mathcal{E}_3$: (2,1,2,1) [$W = \{1,2\}$ (1,2,3,x,4,u,1)].

Exc $\mathcal{E}_{11}$: (2,1,2,2) [$W = \{1,2\}$ (1,x,4,3,5,u,2,1)].

Exc $\mathcal{E}_{14}$: (2,1,2,1,1,1) [$W = \{3,4\}$ (3,x,2,1,5,6,4,u,3)].

Exc $\mathcal{E}_{17}$: (2,1,2,1,1,1) [$2 \in W$ (2,x,3,1,4,6,5,u,2)].

Exc $\mathcal{E}_{21}$: (2,1,2,1,1,1) [$W = \{1,2\}$ (1,x,4,3,5,2,6,u,1)].

Exc $\mathcal{E}_{42}$: (2,1,2,2,1,1) [$W = \{6,7\}$ (7,x,3,2,4,6,5,1,u,7)].

Exc $\mathcal{E}_{45}$: (2,1,2,1,2,1) [$W = \{1,7\}$ (7,x,3,2,6,5,4,1,u,7)].

Exc $\mathcal{E}_{50}$: (2,1,2,1,1,1,1,1) [$W = \{1,2\}$ (1,x,8,7,4,6,5,u,2,3,1)].

Exc $\mathcal{F}_2(5)$:(2,1,2,2) $X = \{5\}$ [W={3,4} (4,x,1,5,2,u,3,4)].

Exc $\mathcal{F}_8(6)$:(2,1,2,1,1,1) $X = \{4,5,6\}$ avec $4 \to 5$ [$4 \in W$ (4,x,1,3,6,u,2,5,4)]. Les autres cas sont équivalents.

Exc $\mathcal{F}_9(8)$:(2,1,2,1,1,1,1,1) $X = \{6,7,8\}$ avec $6 \to 7$ [$6 \in W$ (6,x,1,5,8,u,2,4,3,7,6)]. Les autres cas sont équivalents.

Exc $\mathcal{F}_{10}(10)$:(2,1,2,1,1,1,1,1,1,1) $X = \{8,9,10\}$ avec $8 \to 9$ [$8 \in W$ (8,x,1,7,10,u,2,6,4,5,3,9,8)]. Les autres cas sont équivalents. □

Proposition 3.5.4 *Soit T un tournoi (=1)-fortement connexe tel que $T - x = (V \cup w) \to u$, $x \to V$ et $w \to x$.*

a) Si $V = 3A$ alors T contient $C = (2,1,2,1)$ sauf si $(T;C) = \mathcal{C}_{10}$.

b) Si $V = 5A$ alors T contient $(2,1,1,1,2,1)$.

c) Si $V = 7A$ alors T contient $(2,1,1,1,1,1,2,1)$.

Preuve. a) Si $V \to w$ alors $(T;C) = \mathcal{C}_{10}$. Sinon un sommet de V, par exemple 1, vérifie $w \to 1$. Ainsi $C = (w,1,2,x,3,u,w)$.

b) $(1,3,5,4,u,w,x,2,1) = (2,1,1,1,2,1)$.

c) $(1,3,7,5,6,4,u,w,x,1) = (2,1,1,1,1,1,2,1)$. □

Proposition 3.5.5 *Soit T un tournoi (=1)-fortement connexe tel que $T - x = (V \cup w) \to u$, $x \to V$, $w \to x$ et qu'il existe $v \in V$ tel que $w \to v$.*

a) Si $V - v = 3A$ alors T contient $(2,1,2,2)$.

b) Si $V - v = 5A$ alors T contient $(2,1,1,1,2,2)$.

c) Si $V - v = 7A$ alors T contient $(2,1,1,1,1,1,2,2)$.

Preuve.

a) Si $1 \to v$, alors $(1,v,u,w,x,3,2,1) = (2,1,2,2)$.

Si $1 \leftarrow v$, alors $(2,u,x,w,v,1,3,2) = (2,1,2,2)$.

b) Si $1 \to v$, alors $(5,u,x,w,v,1,2,4,3,5) = (2,1,1,1,2,2)$.

Si $1 \leftarrow v$, alors $(3,4,1,v,u,w,x,2,5,3) = (2,1,1,1,2,2)$.

c) Si $1 \to v$, alors $(5,u,x,w,v,1,3,2,4,7,6,5) = (2,1,1,1,1,1,2,2)$.

Si $1 \leftarrow v$, alors $(2,3,7,6,1,v,u,w,x,5,4,2) = (2,1,1,1,1,1,2,2)$. □

Théorème 3.6 *Soient T un tournoi (=1)-fortement connexe d'ordre n et C le cycle alterné d'ordre n. Alors T contient C si et seulement si $(T;C)$ n'est ni une des exceptions $\mathcal{C}_4$, $\mathcal{C}_5$, $\mathcal{C}_6$, $\mathcal{C}_{12}$, $\mathcal{C}_{13}$ $\mathcal{C}_{14}$ ou $\mathcal{C}_{15}$, ni une de leur duales.*

Preuve. Posons $C = (a_0, a_1, \dots a_{n-1}, a_0)$ avec $a_0 \to a_1$. Comme T est $(= 1)$-fortement connexe, il existe un sommet x tel que $T' = T - x$ soit réductible. Supposons que $|Out(T')| \geq |In(T')|$. La démonstation est duale quand l'inégalité est inverse. Posons $T_2 = In(T')$ et $T_1 = T' - T_2$. Clairement, $T_1 \to T_2$ est une décomposition de T'. Comme T est fortement connexe, il existe $u \in T_2$ tel que $x \leftarrow u$ et $v \in T_1$ tel que $x \to v$. De plus, T_2 est fortement connexe donc possède un cycle hamiltonien direct $C_2 = (u, u_1, \dots u_k)$ ou est restreint à un sommet.

1) Si $|T_2| \geq 4$.

   S'il existe deux sommets w_1 et w_2 de T_2 tel que $\{w_1, w_2\} \leftarrow x$, alors d'après le lemme 3.2, w_1 est origine de $P = (a_1, \dots, a_{n-2})$ dans $T - (x, w_2)$ avec une fin dans T_1 et donc $C = (x, P, w_2, x)$.

   On peut donc supposer qu'il existe au plus un sommet w de T_2 tel que $x \to w$. Soit $y_1 \to y_2$ et $y_3 \to y_4$ deux arêtes de T_2 telles que $w \notin \{y_1, y_3\}$ si w existe. Posons $Q = (a_3, \dots, a_{n-2})$. D'après le lemme 3.2, soit $(T - (x, y_1, y_3, y_4); Q)$ est l'exception $\mathcal{P}_4$ ou $\mathcal{P}_6$ et on a le résultat par la proposition 3.6.1, soit y_2 est origine de Q dans $T - (x, y_1, y_3, y_4)$ avec fin dans T_1 et $C = (y_3, x, y_1, Q, y_4, y_3)$.

2) Si $|T_2| = 3$, i.e. T_2 est le 3-cycle (u, u_1, u_2, u).

   Comme n est pair, $|T_1|$ l'est aussi et comme $|T_1| \geq |T_2|$, on a $|T_1| \geq 4$. S'il existe deux sommets v_1 et v_2 de T_1 tels que $\{v_1, v_2\} \to x$, alors d'après le théorème 2.3, $T_1 - (v_1, v_2)$ contient $P = (a_6, \dots, a_{n-2})$. Ainsi en notant $v_3 = T_1 - (v_1, v_2, P)$, on a $C = (x, v_2, u, v_3, u_1, P, u_2, v_1, x)$. Posons $V = \{v \in T_1, x \to v\}$. On peut supposer que $|V| \geq |T_1| - 1$.

   Si $|T_1| \geq 6$, V contient deux arêtes disjointes $v_2 \to v_1$ et $v_4 \to v_3$. D'après le théorème 2.3, $T_1 - (v_1, v_2, v_3, v_4)$ contient $Q = (a_6, \dots, a_{n-4})$. Ainsi en notant $v_5 = T_1 - (v_1, v_2, v_3, v_4, Q)$, on a $C = (x, v_3, v_4, u, v_5, u_1, Q, u_2, v_2, v_1, x)$.

   Si $|T_1| = 4$.

   - Supposons qu'il existe un sommet v de T_1 tel que $v \to x$. Si $T_1 - v$ n'est pas un 3-cycle, $T_1 - v$ contient $P = +(1,1)$ et $C = (u, x, v, u_2, P, u_1, u)$. Si $V' = T_1 - v$ est le 3-cycle (v_1, v_2, v_3). Si $V' \to v$, $(T;C)$ est l'exception $\mathcal{C}_{13}$. Sinon il existe un sommet de V' disons v_1, tel que $v_1 \leftarrow v$. On a alors $C = (v, v_1, v_3, u_2, v_2, u_1, u, x, v)$.

   - On peut désormais supposer que $x \to T_1$. Si $u_2 \leftarrow x$, soit v_1, v_2, v_3, v_4 les sommets de T_1 avec $v_2 \to v_1$. On a $C = (x, v_1, v_2, u, v_3, u_1, v_4, u_2, x)$. On a le résultat de la même manière si $x \to u_1$. Et si $T_2 \to x$, $(T;C)$ est l'exception $\mathcal{C}_{12}$.

3) Si $T_2 = \{u\}$.

Posons $V = \{v \in T_1, x \to v\}$ et $W = \{w \in T_1, w \to x\}$.

Si W contient trois sommets w_1, w_2 et w_3, posons $P = (a_2, \dots, a_{n-2})$. S'il existe $w \in W$ tel qu'on trouve P dans le tournoi $T_1 - w$ d'origine dans $W - w$, alors $C = (x, P, u, w, x)$. Sinon pour tout w, $(T_1 - w; P)$ est une exception du théorème 2.2 avec $W - w$ inclus dans l'ensemble des sommets de $T_1 - w$ non origine de P. On a alors le résultat par la proposition 3.6.2.

Si $|V| \geq 4$. Posons $Q = (a_1, \dots, a_{n-4})$. Si il existe deux sommets v_1 et v_2 de V tels qu'un sommet de $V \setminus \{v_1, v_2\}$ soit origine de Q dans $(T_1 - (v_1, v_2))$, alors $C = (x, Q, u, v_2, v_1, x)$ si $v_2 \to v_1$ et $C = (x, Q, u, v_1, v_2, x)$ si $v_1 \to v_2$. Sinon pour toute paire de sommets $\{v_1, v_{,2}\} \subset V$, $(T_1 - (v_1, v_2); Q)$ est une exception du théorème 2.2 avec $V \setminus \{v_1, v_2\}$ inclus dans l'ensemble des sommets de $T_1 - (v_1, v_2)$ non origine de Q. On a alors le résultat par la proposition 3.6.3.

On a donc $|W| \leq 2$ et $|V| \leq 3$ donc $|T_1| \leq 5$. Comme n est pair, $|T_1|$ l'est aussi, donc $|T_1| \in \{2, 4\}$.

Si $|T_1| = 2$, c'est une exception $\mathcal{C}_4$.

Si $|T_1| = 4$. Si $W = \{w\}$ et $V = \{v_1, v_2, v_3\}$. Si $w \to v_1$ et $v_2 \to v_3$, on a $C = (x, v_1, w, u, v_2, v_3, x)$. Si $V \to w$, $(T; C)$ est une exception $\mathcal{C}_{14}$. Si $W = \{w_1, w_2\}$ et $V = \{v_1, v_2\}$ avec $v_1 \to v_2$ et $w_1 \to w_2$. Si $w_1 \to v_2$ alors $C = (x, w_1, v_2, v_1, u, w_2, x)$. Si $w_2 \to v_2$ alors $C = (x, w_2, v_2, v_1, u, w_1, x)$. Sinon $(T; C)$ est une exception $\mathcal{C}_{15}$ (Remarque: l'exception $\mathcal{C}_5$ (=1)-fortement connexe et une exception $\mathcal{C}_{15}$). $\square$

Proposition 3.6.1 *Soit T un tournoi (=1)-fortement connexe tel que $T - x = T_1 \to T_2$, $V(T_2) = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$, $y_1 \to y_2$, $y_3 \to y_4$. Si $T_1 = 5A$ ou $T_1 = 7A$, T contient un cycle hamiltonien alterné.*

Preuve.

Si $T_1 = 5A$. Si $1 \to x$ alors $(1, x, y_1, y_2, 3, y_3, 4, y_4, 5, 2, 1)$ est alterné. Si $x \to T_1$, sans perte de généralité, on peut supposer que $y_1 \leftarrow y_3$. Le cycle $(x, 1, 5, y_4, y_3, y_1, y_2, 2, 4, 3, x)$ est alterné hamiltonien.

Si $T_1 = 7A$. Si $1 \to x$ alors $(1, x, y_1, y_2, 6, 7, 5, y_4, 4, y_3, 2, 3, 1)$ est alterné. Si $x \to T_1$. Le cycle $(x, 1, 7, y_1, 2, y_2, 3, y_3, 4, y_4, 5, 6, x)$ est alterné hamiltonien. $\square$

Proposition 3.6.2 *Soient T un tournoi (=1)-fortement connexe d'ordre n (pair) et P le chemin alterné sortant d'ordre $n - 3$. On suppose que $T - x = T_1 \to T_2$, $T_2 = \{u\}$, $W = \{w \in T_1, w \to x\}$ contient au moins trois sommets. Si pour tout $w \in W$, $(T_1 - w; P)$ est une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}'_l$ avec $W - w$ inclus dans l'ensemble des sommets de $T_1 - w$ non origine de P, alors T contient un cycle hamiltonien alterné sauf si $(T; +(1,1,1,1,1,1,1,1))$ est l'exception $\mathcal{C}_6$.*

Preuve.

Comme P est alterné d'ordre impair, nous ne devons considérer que les exceptions $\mathcal{E}_i$ pour $i \in \{0,\ 4,\ 8,\ 9,\ 33,\ 37\}$. Soient w_1 l'origine d'un chemin hamiltonien ascendant de W, w_2 le deuxième sommet du même chemin et w_3 le troisième. Nous allons examiner les cas où $T_1 - w_1$ est le tournoi correspondant à chacune des exceptions ci-dessus.

Exc $\mathcal{E}_0$: Soient v_1, v_2, v_3 et v_4 les sommets de T_1 avec $x \to v_1$. $T(v_1, v_2, v_3)$, $T(v_1, v_4, v_3)$ et $T(v_1, v_2, v_4)$ doivent être des 3-cycles, ce qui est impossible.

Exc $\mathcal{E}_4$: Si $T_1 - w_1$ est le tournoi 5A, avec l'isomorphisme $(w_2; x_3; x_4; x_5; x_6) \longrightarrow (1; 2; 3; 4; 5)$, alors $d^-_{T_1 - w_3}(w_2) = 3$, donc $T_1 - w_3$ n'est pas le tournoi 5A et $|W| \leq 4$. Si $w_3 = x_3$ alors $x_6 \notin W$. Si de plus, $x_4 \notin W$ alors $(w_1, u, x_3, x_4, x, x_6, x_5, w_2, w_1)$ est hamiltonien alterné. On peut donc supposer que $W = \{w_1, w_2, x_3, x_4\}$. Ainsi $T_1 - x_3$ est le tournoi 5E, mais alors x_4 est origine d'un chemin alterné dans 5E contradiction. Si $w_3 = x_4$ (et donc $w_3 \notin W$). Si de plus, $x_5 \notin W$ alors $(w_1, u, x_4, x_5, x, x_3, x_6, w_2, w_1)$ est hamiltonien alterné. On peut donc supposer que $W = \{w_1, w_2, x_4, x_5\}$. Ainsi $T_1 - x_4$ est le tournoi 5E, avec un des deux isomorphismes suivants: $(w_1; w_2; x_3; x_5; x_6) \longrightarrow (4; 2; 3; 5; 1)$ et $(w_1; w_2; x_3; x_5; x_6) \longrightarrow (5; 2; 3; 4; 1)$ donc $x_6 \to x_3$. De même, $T_1 - x_2$ est le tournoi 5E, donc $x_3 \to x_6$ contradiction.

Exc $\mathcal{E}_8$: Si $T_1 - w_1$ est le tournoi 5D avec l'isomorphisme $(w_2; w_3; x_4; x_5; x_6) \longrightarrow (5; 2; 3; 4; 1)$. On a $d^+_{T_1 - w_3}(w_2) = 1$, donc $T_1 - w_3$ n'est pas 5A. $T_1 - w_3$ ne peut pas non plus être le tournoi 5E car le sommet de degré externe 1 est départ du chemin alterné dans 5E. Donc $T_1 - w_3$ est 5D et avec $(w_1; w_2; x_4; x_5; x_6) \longrightarrow (5; 2; 1; 3; 4)$. Si $w_3 \to w_1$ alors $(T; C)$ est une exception $\mathcal{C}_6$. Si $w_1 \to w_3$, $(x, x_5, w_2, u, w_1, w_3, x_6, x_4, x)$ est un cycle hamiltonien alterné.

Exc $\mathcal{E}_9$: Si $T_1 - w_1$ est le tournoi 5E, avec l'isomorphisme $(x_1; x_2; x_3; x_4; x_5) \longrightarrow (1; 2; 3; 4; 5)$. On a $W \setminus \{w_1\} \subseteq \{x_2, x_4, x_5\}$.

Supposons $x_4 \in W$. Si $w_1 \to x_2$ alors $(w_1, x_2, x_1, u, x_3, x_5, x_4, x, w_1)$ est un cycle alterné hamiltonien de T. Si $w_1 \to x_3$ alors $(w_1, x_3, x, x_1, x_4, x_2, x_5, u, w_1)$ est un cycle alterné hamiltonien de T. On peut donc supposer que $w_1 \leftarrow \{x_2, x_3\}$. Si $x_2 \in W$, alors $(x_2, x, x_4, x_1, x_5, u, x_3, w_1, x_2)$ est un cycle alterné hamiltonien de T. Sinon $W = \{w_1, x_4, x_5\}$. On a alors $d^-_{T_1 - x_5}(w_1) \geq 3$ et $T_1 - x_5$ ne peut être ni 5A, ni 5D, ni 5E, ce qui est une contradiction.

On a donc $W = \{w_1, x_5, x_2\}$. Si $T_1 - x_2$ est le tournoi 5D, c'est par l'isomorphisme $(w_1; x_1; x_3; x_4; x_5) \longrightarrow (5; 3; 4; 1; 2)$. Dans $T_1 - x_5$, x_3 est alors un sommet de degré externe 1 qui domine un sommet x_4 de degré externe 3. Donc $T_1 - x_5$ n'est ni 5A, ni 5D, ni 5E, ce qui est une contradiction.

Si $T_1 - x_2$ est le tournoi 5E, alors c'est avec un des deux isomorphismes suivants: $f_1 : (w_1; x_1; x_3; x_4; x_5) \longrightarrow (4; 3; 5; 1; 2)$ et $f_2 : (w_1; x_1; x_3; x_4; x_5) \longrightarrow (5; 3; 4; 1; 2)$. Dans les deux cas, $(x, x_1, x_4, x_5, w_1, u, x_2, x_3, x)$ est un cycle alterné hamiltonien.

Exc $\mathcal{E}_{33}$: Si $T_1 - w_1$ est le tournoi 7A, $d^-_{T_1 - w_3}(w_2) = 4$ donc $T_1 - w_3$ ne peut pas être le tournoi 7A, ni même 7C car tous les sommets de degré interne 4 de 7C sont origines du chemin alterné.

Exc $\mathcal{E}_{37}$: Si $T_1 - w_1$ est le tournoi 7C, alors $d^-_{T_1-w_1}(w_2) = 1$. Donc $d^-_{T_1-w_3}(w_2) = 2$ et $T_1 - w_3$ n'est pas le tournoi 7C. Par conséquent, c'est le tournoi 7A. Si $w_3 \to w_1$ on applique ce qui précède pour l'exception $\mathcal{E}_{33}$. Si $w_1 \to w_3$, alors $d^-_{T_1-w_2}(w_3) = 2$ donc $T_1 - w_2$ est le tournoi 7A. On en déduit donc que $d^-_{T_1-w_1}(w_3) = 3$, ce qui contredit $T_1 - w_1 = 7C$. □

Proposition 3.6.3 *Soit T un tournoi (=1)-fortement connexe d'ordre n (pair) et P le chemin alterné sortant d'ordre $n-4$. On suppose que tel que $T - x = T_1 \to T_2$, $T_2 = \{u\}$ et que $V = \{v \in T_1, v \to x\}$ contient au moins quatre sommets Si pour toute paire de sommets $(v_1; v_2)$ de V, $(T_1 - (v_1, v_2); P)$ est une exception $\mathcal{E}_i$, $\mathcal{F}_j$ ou $\mathcal{F}'_l$ avec $V \setminus \{v_1, v_2\}$ inclus dans l'ensemble des sommets de $T_1 - (v_1, v_2)$ non origine de P, alors T contient un cycle hamiltonien alterné.*

Preuve.

Comme P est un chemin alterné d'ordre pair, nous n'avons qu'à considérer les exceptions $\mathcal{E}_i$ pour $i \in \{1, 20, 22, 23, 24, 29, 30, 49\}$. Si nous sommes dans une des exceptions $\mathcal{E}_i$ pour $i \in \{20, 22, 23, 29, 30, 49\}$ on a alors $|W| \geq 3$ et on a le résultat par ce qui précède.

Si on est dans l'exception $\mathcal{E}_1$, alors $T_1 - (v_1, v_2)$ est le tournoi 4A avec l'isomorphisme $(x_3; x_4; x_5; x_6) \longrightarrow (1; 2; 3; 4)$ et $x_5 \notin V$. Si $v_6 \notin V$, alors $T_1 - (x_3, x_4)$ est le tournoi 4A avec l'isomorphisme $(v_1; v_2; x_5; x_6) \longrightarrow (1; 2; 3; 4)$. On a alors $x_6 \to \{v_1, v_2, x_3, x-4\}$ et $x_5 \leftarrow \{v_1, v_2, x_3, x-4\}$. Par le théorème 2.3, $T(v_1, v_2, x_3, x-4)$ contient P le chemin alterné sortant à 3 arêtes. Ainsi (x, x_6, P, u, x_5) est un cycle hamiltonien alterné. On peut donc supposer que $x_6 \in V$. $T - (v_1, x_6)$ est alors le tournoi 4A et $x_5 \to v_2$. Et notant v un sommet de V parmi $\{x_3, x_4\}$, on a $T - (v_1, v)$ est le tournoi 4A. Ainsi $x_5 \leftarrow v_2$, ce qui est une contradiction.

Si on est dans l'exception $\mathcal{E}_{24}$, alors $|V| \geq 6$ sinon $|W| \geq 3$ et on a le résultat par ce qui précède. Posons $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_6\}$ et $W = \{w_1, w_2\}$. On a $T_1 - (v_1, v_2)$ est 6H avec l'isomorphisme $(v_3; v_4; v_5; v_6; w_1; w_2) \longrightarrow (1; 2; 3; 4; 5)$. Donc (v_3, v_4, v_5) est un 3-cycle. De même, $T_1 - (v_1, v_3)$ est 6H donc (v_2, v_4, v_5) est un 3-cycle. De même, $T_1 - (v_1, v_4)$ est 6H donc (v_2, v_3, v_4) est un 3-cycle ce qui est une contradiction. □

3.3 Pour aller plus loin...

Comme Thomason, nous pensons que la conjecture 2 de Rosenfeld est vraie pour $N = 9$. Dans les théorèmes de ce chapitre, nous n'avons pas d'exception d'ordre supérieur à huit. De plus, les théorèmes 3.1 et 3.4 montrent que la conjecture de Thomason est vraie pour les tournois de petite forte connexité. D'autre part, le corollaire 2.3.1 affirme que tout sommet d'un tournoi 3-fortement connexe est origine de tout chemin orienté. Donc intuitivement, il y a énormément de possibilité de construire un cycle et par conséquent, il y a de très fortes chances que celui-ci soit contenu dans le tournoi.

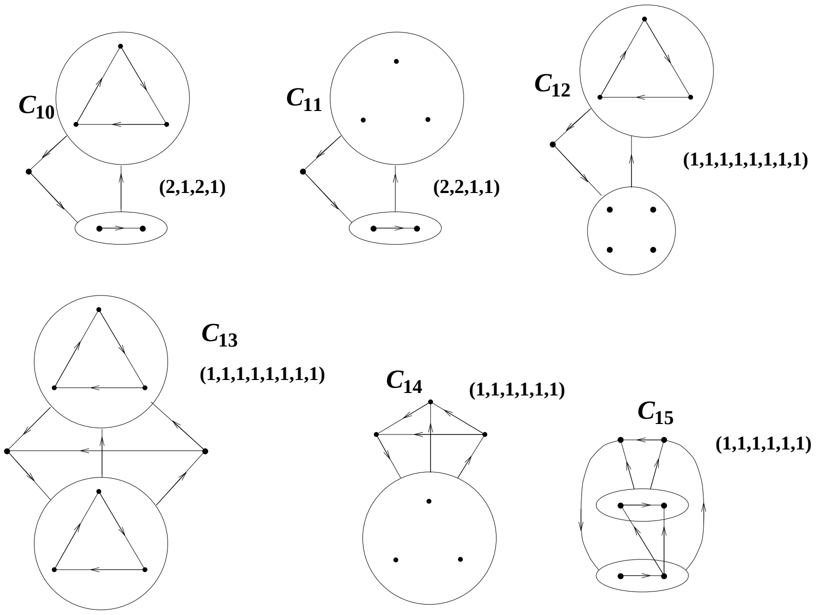

Figure 3.4: Les exceptions (=1)-fortement connexes .

Il serait intéressant de prouver la conjecture de Rosenfeld pour les tournois k-fortement connexe, avec k petit. (Elle est en effet vraie pour les tournois 2^{127}-fortement connexes par le résultat de Thomason [35].) En reprenant la preuve du théorème 3.2, en remplacant le chemin direct hamiltonien de X par un chemin quelconque, on peut montrer que si T est $(= k)$-fortement connexe $(k \geq 10)$ d'ordre n et $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ un cycle tel que $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2$ et $a_{k+1} \rightarrow a_{k+2} \rightarrow a_{k+3}$, alors T contient C.

D'autre part, si la conjecture de Thomason est vraie, il serait intéressant de trouver toutes les exceptions de petits ordres. Nous avons regardé tous les tournois d'ordre ≤ 7. Mis à part, les exceptions déjà citées dans ce chapitre, nous avons trouvé l'exception $\mathcal{C}_{16}$.

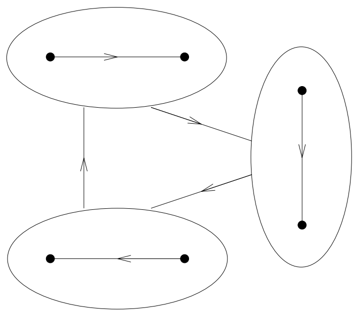

Figure 3.5: L'exception $\mathcal{C}_{16}$.

Chapitre 4

Arbres dans les tournois.

Soit $f(n)$ le plus petit entier tel que tous les arbres d'ordre n soient $f(n)$-inévitables. Sumner a conjecturé que $f(n) = 2n - 2$, en remarquant que cette borne est minimale. En effet, les tournois réguliers à $2n - 3$ sommets ne possèdent pas de sommets de degré extérieur supérieur à $n-2$ et donc ne contiennent pas l'arbre orienté composé d'une racine dominant $n - 1$ feuilles.

Häggkvist et Thomason [16] ont prouvé que $f(n) \leq (4 + o(1))n$ améliorant ainsi la borne supérieure $(1+o(1))n \log_2 n$ obtenue d'abord par Wormald [37]. Ils ont aussi prouvé la borne universelle $f(n) \leq 12n$. Leur méthode s'appuie sur l'existence d'une fonction minimale $g(k) \leq 2^{512k^3}$ telle que tous les arbres d'ordre n ayant k feuilles sont $(n + g(k))$-inévitables.

Avec Stéphan Thomassé, nous conjecturons (conjecture 4) qu'un arbre d'ordre n ayant k feuilles est $(n + k - 1)$-inévitable, i.e. $g(k) = k - 1$. Cette conjecture implique celle de Sumner puisqu'un arbre d'ordre n possède au plus $n - 1$ feuilles. Le corollaire 2.1.1, montre que cette conjecture est vraie pour $n = 2$.

Définition 8 Soient $P_1, P_2, \dots P_k$ des chemins. Le *raccordement* de $P_1, P_2, \dots, P_k$, noté $\bigvee_{i=1}^{k} P_i$, est le graphe $\bigcup_{i=1}^{k} P'_i$ où les P'_i sont des chemins isomorphes aux P_i de même origine x tels que $V(P'_i) \cap V(P'_j) = \{x\}$. On dit que x est l'*origine* de $\bigvee_{i=1}^{k} P_i$.

Soit $R = \bigvee_{i=1}^{k} P_i$. Le digraphe $^*R$ est l'union disjointe des chemins $^*P_i$.

Un arbre à trois feuilles est le raccordement de trois chemins. Dans ce chapitre, nous montrons (théorème 4.2) qu'un raccordement d'ordre n de k chemins est $(n+\frac{3}{2}(k^2-3k)+5)$-inévitable. En particulier, les arbres à trois feuilles sont $(n + 5)$-inévitables. Ensuite, en étudiant l'inévitabilité des arbres ayant peu de feuilles, nous améliorons la preuve de Häggkvist et Thomason pour prouver que $f(n) \leq \frac{38}{5}n - 6$.

4.1 Raccordements de chemins.

Dans cette partie nous étudions l'inévitabilité des raccordements de chemins. Une classe particulière de raccordements, celle des *griffes* a été plus particulièrement étudiée (voir [31], [19], [20], [21] et [22]). Une *griffe de degré d* est le raccordement de d chemins ascendants. Lu, Wang et Wong [22] ont montré que les griffes d'ordre n et de degré au plus $\frac{19}{50}n$ sont n-inévitables et qu'il existe des griffes d'ordre n et de degré $\frac{11}{23}n$ qui ne sont pas n-inévitables.

Le but de cette partie est de montrer le théorème 4.2. Pour cela, nous montrons dans un premier temps le lemme 4.3 qui nous permet de nous restreindre, dans un deuxième temps, à l'étude des raccordements de chemins sortants.

4.1.1 Réduction aux raccordements de chemins sortants.

Lemme 4.1 *Soient P un chemin sortant d'ordre n_1, Q un chemin entrant d'ordre n_2, T un tournoi d'ordre au moins $n_1 + n_2$ et x un sommet de T. Si x est origine de P et de Q dans T, alors x est l'origine du raccordement $P \vee Q$ dans T.*

Preuve.

Soit P un chemin sortant et Q un chemin entrant dans T, tous deux d'origine x. Comme $d^+(x) + d^-(x) = |P| + |Q| - 1$, on a $d^+(x) \geq |P|$ ou $d^-(x) \geq |Q|$. Par dualité, on peut supposer que $d^+(x) \geq |P|$. Clairement $d^-(x) \neq 0$, puisque x est l'origine du chemin entrant Q. Si $d^-(x) = 1$, considérons $T_1 = T - ({}^*Q)$. Notons que x domine $T_1 - x$. Comme $|T_1 - x| = |P|$, en appliquant le théorème 2.1, on a alors une copie de ${}^*P$ dans $T_1 - x$. Ainsi x est origine d'une copie de $P \vee Q$.

On peut donc supposer que $d^-(x) \geq 2$. Si $b_1(Q) \geq 2$, comme x est origine de Q, on sait que $s^-(x) \geq b_1(Q) + 1$. Considérons un ensemble X tel que $X \supseteq N^-(x) \cup \{x\}$, $s^-_X(x) \geq b_1(Q) + 1$ et $|X| = |Q| + 1$. Par le lemme 2.1, x est origine d'une copie Q' de Q dans $T(X)$. Dans $T - Q'$, il y a $|P|$ sommets, donc d'après le corollaire 2.1.1, on peut y trouver deux origines distinctes de ${}^*P$. Comme x domine tous les sommets de $T - Q'$ excepté peut être un, on peut trouver une copie de P d'origine x disjointe de ${}^*Q$. Ainsi x est origine de $P \vee Q$.

Si $b_1(Q) = 1$, considérons un ensemble X tel que $X \supseteq N^-(x) \cup \{x\}$, $s^-_X(N^-(x)) \geq b_2(Q) + 1$ et $|X| = |Q| + 1$. Par le lemme 2.1, x est origine d'une copie Q' de Q dans $T(X)$. Dans $T - Q'$ il y a $|P|$ sommets, donc on peut y trouver deux origines distinctes de ${}^*P$. Comme x domine tous les sommets de $T - Q'$ excepté peut être un, on peut trouver une copie de P d'origine x disjointe de ${}^*Q$. Ainsi x est origine de $P \vee Q$. □

Lemme 4.2 *Soient R_1 un raccordement d'ordre n_1 de chemins sortants, R_2 un raccordement d'ordre n_2 de chemins entrants et T un tournoi d'ordre au moins $n_1 + n_2$. Si x est origine de R_1 et de R_2 dans T, alors x est origine de $R_1 \vee R_2$.*

Preuve. Posons $R_1 = \bigvee_{i=1}^{l} P_i$ et $R_2 = \bigvee_{j=1}^{k} Q_j$. Quitte à considérer le dual, nous pouvons supposer que $d^-(x) \geq |R_2|$.

Nous allons montrer par récurrence sur k, le nombre de chemins de R_2, que tout sommet x origine de $R_1 = \bigvee_{i=1}^{l} P_i$ tels que $d^-(x) \geq |R_2|$ est origine de $R_1 \vee R_2$.

- Si $k = 1$ alors $R_2 = Q$. Montrons le résultat par récurrence sur l, le nombre de chemins de R_1.

  Si $l = 1$, le lemme 4.1 nous donne le résultat.

  Si $l > 1$. Posons $q_i = |N^-(x) \cap P_i|$ et $q = |N^-(x) \cap (T - R_1)|$. Soit $R_1' = \bigvee_{i=1}^{l-1} P_i$. Si $q + q_1 + q_2 + \cdots + q_{l-1} \geq |R_2|$, alors par hypothèse de récurrence, dans $T -^* P_l$, x est origine de $R_1' \vee Q$. Par cons'equent, dans T, x est origine de $R_1 \vee Q$. Sinon, $q_l \neq 0$.

  Si $b_1(Q) \geq 2$, soit Q' un chemin descendant de longueur $q + q_1 + q_2 + \cdots + q_{l-1}$. Clairement x est origine de Q' dans $T -^* P_l$, car son degré interne est $q + q_1 + q_2 + \cdots + q_{l-1}$.Par hypothèse de récurrence, dans $T -^* P_l$, x est origine de $R_1' \vee Q'$. Ainsi dans $T -^* R_1'$, on a $d^-(x) \geq 2$ et $s^-(x) \geq q + q_1 + q_2 + \cdots + q_{l-1} + q_l \geq n_2$. Donc par le lemme 2.1, x est origine de Q dans $T -^* R_1'$. Et comme x est origine de P_l, par le lemme 4.1, x est origine de $P_l \vee Q$. Ainsi, dans T, x est origine de $R_1 \vee Q$.

  Si $b_1(Q) = 1$, soit Q' un chemin entrant tel que $b_1(P) = 1$ et $b_2(P) = q+q_1+q_2+\cdots+q_{l-1} - 1$. Par hypothèse de récurrence, dans $T -^* P_l$, x est origine de $R_1' \vee Q'$. Ainsi dans $T -^* R_1'$, on a $d^-(x) \geq 2$ et $s^+(N^-(x)) \geq q+q_1+q_2+\cdots+q_{l-1}+q_l-1 \geq n_2-1$. Donc par le lemme 2.1, x est origine de Q dans $T -^* R_1'$. Et comme x est origine de P_l, par le lemme 4.1, x est origine de $P_l \vee Q$. Ainsi, dans T, x est origine de $R_1 \vee Q$.

- Si $k \geq 2$. Soit $R_2' = \bigvee_{j=1}^{k-1} Q_j$. D'après ce qui précède, dans T, x est origine de $R_1 \vee Q_k$. Dans $T -^* Q_k$, x est origine de R_1 et $d^-(x) \geq |R_2| - |^*Q_k| = |R_2'|$. Donc par hypothèse de récurrence, x est origine de $R_1 \vee R_2'$ dans $T -^* Q_k$. Par conséquent, x est origine de $R_1 \vee R_2$ dans T. $\square$

Ce lemme nous permet de démontrer le lemme très utile suivant:

Lemme 4.3 *Soient R_1 un raccordement d'ordre n_1 de chemins sortants tel que tout tournoi d'ordre $f_1(n_1)$ contient a_1 origines de R_1, et R_2 un raccordement d'ordre n_2 de chemins entrants tel que tout tournoi d'ordre $f_2(n_2)$ contient a_2 origines de R_2. Alors $R = R_1 \vee R_2$ est m-inévitable avec $m = \max\{f_1(n_1) + f_2(n_2) - a_1 - a_2 + 1; n_1 + n_2\}$.*

En particulier, si R_1 est $n_1 + l_1$-inévitable et R_1 est $n_2 + l_2$-inévitable avec $l_1 + l_2 > 0$, alors R est $(n_1 + n_2 + l_1 + l_2 - 1)$-inévitable.

Preuve.

Soit T un tournoi d'ordre m. Dans T, il y a $m - f_1(n_1) + a_1$ origines de R_1 et $m - f_2(n_2) + a_2$ origines de R_2. Comme $m \geq f_1(n_1) + f_2(n_2) - a_1 - a_2 + 1$, il y a un sommet x qui est origine de R_1 et de R_2. Donc comme $m \geq n_1 + n_2$, par le lemme 4.2, x est origine de $R_1 \vee R_2$ dans T. □

Ce lemme nous permet de nous restreindre à l'étude des raccordements de chemins sortants. En effet, si on prouve que les raccordements d'ordre n_1 de k_1 chemins sortants sont $(n_1 + l(k_1))$-inévitables, pour une fonction l, alors par dualité, les raccordements d'ordre n_2 de k_2 chemins entrants sont $(n_2 + l(k_2))$-inévitables. Ainsi le lemme 4.3, nous dit que le raccordement d'ordre n de k_1 chemins sortants et k_2 chemins entrants est $(n + l(k_1) + l(k_2))$-inévitable.

A partir du lemme 4.3, nous déduisons facilement les corollaires suivants:

Corollaire 4.3.1 *Le raccordement d'ordre n d'un chemin entrant et de deux chemins sortants est $(n+1)$-inévitable.*

Preuve. Le corollaire 2.1.1 affirme que dans tout tournoi d'ordre $n_1 + 1$, il y a deux origines d'un chemin d'ordre n_1. Et le raccordement d'ordre n_2 de deux chemins (sortants) est un chemin donc est $(n_2 + 1)$-inévitable. □

La borne $n + 1$ de ce lemme est la meilleure possible: en effet, le tournoi $F_1(n)$ représenté figure 2.3 ne contient pas le raccordement $P_1 \vee P_2 \vee P_3$, où P_1 et P_2 sont deux chemins ascendants de longueur 1 et P_3 un chemin descendant d'ordre $n - 2$.

Corollaire 4.3.2 *Le raccordement d'ordre $n \geq 16$ de deux chemins sortants et de deux chemins entrants est $(n+1)$-inévitable.*

Preuve. Soit $R = P_1 \vee P_2 \vee Q_1 \vee Q_2$ avec P_1 et P_2 deux chemins sortants, Q_1 et Q_2 deux chemins entrants. Posons $R_1 = P_1 \vee P_2$ et $R_2 = Q_1 \vee Q_2$. Soient n_1 l'ordre de R_1 et n_2 l'ordre de R_2. On a $n_1 + n_2 = n + 1$. Comme $n \geq 16$, quitte à considérer le dual on peut supposer que $n_1 \geq 8$. Ainsi par le théorème 2.3, R_1 est n_1-inévitable. Et d'après le corollaire 2.1.1, R_2 est $(n_2 + 1)$-inévitable. □

La borne $n + 1$ de ce lemme est la meilleure possible: en effet, le tournoi $F_1(n)$ représenté figure 2.3 ne contient pas le raccordement $P_1 \vee P_2 \vee P_3 \vee P_4$ où P_1 et P_2 sont des chemins ascendants de longueur 1 et P_3 et P_4 des chemins descendants d'ordre n_3 et n_4 tels que $n_3 + n_4 = n - 1$.

Définition 9 Une *antigriffe de degré d* est le dual d'une griffe de degré d. C'est donc le raccordement de d chemins descendants.

Corollaire 4.3.3 *Le raccordement d'ordre n d'une griffe d'ordre n_1 et de degré au plus $\frac{19}{50}n_1$ et d'une antigriffe d'ordre n_2 et de degré au plus $\frac{19}{50}n_2$ est $(n+1)$-inévitable.*

Preuve. D'après le théorème de Lu, Wang et Wong [22], une griffe (ou antigriffe) d'ordre n_i et de degré au plus $\frac{19}{50}n_i$ est n_i-inévitable. □

4.1.2 Raccordements de chemins sortants.

Raccordements de chemins sortants de premier bloc de longueur au moins deux.

Définition 10 Une *fourche* $F = [x, y, \{u, v\}]$ est le digraphe défini par $V(F) = \{x, y, u, v\}$ et $E(F) = \{(x, y); (y, u); (y, v)\}$. On dit que x est l'*origine* de F et u et v les *pointes* de F. Le *raccordement* de fourches est défini de manière analogue à celui de chemins.
Un arbre est *quasi-convenable* (resp. *convenable*) s'il est le raccordement de k_1 fourches, de k_2 chemins ascendants de longueur deux et de k_3 chemins ascendants de longueur un (resp. avec $k_1 \leq k_3$).

Dans [21], Lu a montré le lemme suivant. Une preuve élémentaire en a été donnée par Lu, Wang et Wong [22]. Nous donnons ici une preuve encore plus courte due à J. A. Bondy. Pour cela, nous devons définir la notion de k-couplage:

Définition 11 Un *k-couplage* est un digraphe $D = (A \to B)$ vérifiant les propriétés suivantes:
(A, B) est une partition de $V(D)$;
si $(x, y) \in E(D)$ alors $x \in A$ et $y \in B$;
pour tout $b \in B$, $d^-(b) = 1$ et pout tout $a \in A$, $d^+(a) \leq k$.

Lemme 4.4 (Lu, 1996 [21]) *Soit T un tournoi. Tout sommet de degré externe maximal de T est origine d'un arbre convenable couvrant.*

Preuve. (Bondy) Soit x un sommet de plus haut degré externe. Il est clair que l'existence d'un arbre convenable d'origine x est équivalente à l'existence d'un 2-couplage $(N^+(x) \to N^-(x))$ dans T. Or une conséquence immédiate du théorème de Hall est la suivante: soient A et B deux ensembles disjoints de sommets d'un digraphe D. Alors D contient un k-couplage $(A \to B)$ si et seulement si pour toute partie $Y \subseteq B$, on a $k|N^-(Y) \cap A| \geq |Y|$. Nous allons montrer par l'absurde que cette dernière condition est vérifiée pour tout $Y \subset N^-(x)$ avec $k = 2$, ce qui nous donnera le résultat.

Soit $Y \subseteq N^-(x)$. Posons $X = N^-(Y) \cap N^+(x)$ et $Z = N^+(x) \setminus X$. Supposons $|X| < 2|Y|$. Soit y un sommet de degré externe maximal dans $T(Y)$. Alors y domine x, Z et au moins $(|Y| - 1)/2 \geq |X|$ sommets dans Y. Ainsi $d^+(y) > d^+(x)$, ce qui est impossible. □

Lemme 4.5 *Soient $R = \bigvee_{i=1}^{k} P_i$ le raccordement d'ordre n de $k \geq 2$ chemins sortants dont le premier bloc est de taille au moins deux et T un tournoi d'ordre $n + k - 1$. Tout sommet origine d'un arbre convenable couvrant A est origine de R dans T.*
En particulier, tout sommet de degré externe maximal dans T est origine de R dans T.

Preuve.

Nous allons montrer le résultat par récurrence sur k. L'idée de cette preuve est de prendre un sous-arbre A_1 de A contenant x avec $|A_1| = |P_1| + 1$ tel qu'en notant V_1 l'ensemble des sommets de A_1 distincts de x, l'arbre $A_2 = A - V_1$ soit convenable dans $T - V_1$. Ainsi par hypothèse de récurrence, on a x origine de $\bigvee_{i=2}^{k} P_i$ dans $T - V_1$ et par le lemme 2.1, x est origine de P_1 dans $T(A_1)$.

Soit A un arbre convenable d'origine x, soient $F_1, F_2, \ldots, F_{k_1}$ les fourches de A, $R_1, R_2, \ldots, R_{k_2}$ les chemins de longueur 2 de A et $Q_1, Q_2, \ldots, Q_{k_3}$ les chemins de longueur 1 de A.
Soit T_1 le sous-tournoi de T défini comme suit:

Si $3k_1 + 1 \geq |P_1|$, soit i le plus petit entier tel que $3i + 1 \geq |P_1|$.
Si $3i + 1 = |P_1| + 1$, $T_1 = T(F_1, F_2, \ldots, F_i)$.
Si $3i + 1 = |P_1|$, $T_1 = T(F_1, F_2, \ldots, F_i, Q_{k_3})$.
Si $3i + 1 = |P_1| + 2$, $T_1 = T(F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}, Q_{k_3}, y)$ où y est une pointe de F_i.
Sinon $3k_1 + 1 < |P_1|$.
Si $3k_1 + 2k_2 + 1 \geq |P_1|$, soit i le plus petit entier tel que $3k_1 + 2i + 1 \geq |P_1|$.
Si $3k_1 + 2i + 1 = |P_1| + 1$, $T_1 = T(F_1, \ldots, F_{k_3}, R_1, \ldots R_i)$.
Si $3k_1 + 2i + 1 = |P_1|$, $T_1 = T(F_1, F_2, \ldots, F_{k_3}, R_1, \ldots R_i, Q_{k_3})$.
Sinon $3k_1 + 2k_2 + 1 < |P_1|$.
Soit i l'entier tel que $3k_1 + 2k_2 + i = |P_1|$.
$T_1 = T(F_1, F_2, \ldots, F_{k_3}, R_1, \ldots R_{k_2}, Q_1, \ldots, Q_i)$.

Soit A' l'arbre induit par A sur les sommets de $V(T - T_1) \cup \{x\}$. On a $|T_1| = |P_1| + 1$ et $s^+_{T_1}(x) \geq |P_1|$. Si $|P_1| \geq 4$, alors $d^+_{T_1}(x) \geq 2$ et d'après le lemme 2.1, x est origine de P_1 dans T_1. Si $|P_1| = 3$, alors P_1 est le chemin ascendant de longueur 2 et x (qui est un outgénérateur de T_1) est origine de P_1 dans T_1. Il est alors aisé de vérifier que l'arbre A' est convenable d'ordre $|\bigvee_{j=2}^{k} P_j| + k - 2$.

Si $k = 2$, posons $T_2 = T -^* P_1$. On a $|T_2| = |P_2| + 1$ et $s^+_{T_2}(x) \geq |P_2|$. Si $|P_2| \geq 4$, $d^+_{T_2}(x) \geq 2$ et d'après le lemme 2.1, x est origine de P_2 dans T_2. Si $|P_2| = 3$, P_1 est le chemin ascendant de longueur 2 et x est origine de P_2 dans T_2. Ainsi x est origine de $R = P_1 \vee P_2$ dans T.

Si $k \geq 3$, par hypothèse de récurrence, x est origine de $\bigvee_{j=2}^{k} P_j$ dans $T(A')$. Par conséquent x est origine de R dans T. $\square$

Remarque 4.1 En observant que si P_i n'est pas direct, nous n'avons besoin que de $s^+_{T_2}(x) \geq |P_2| - 1$, pour que le lemme 2.1 s'applique, avec la même méthode, on peut montrer que le raccordement d'ordre n de k chemins sortants dont le premier bloc est de longueur au moins 2, parmi lesquels k_1 sont directs, est $\max\{n+1, n+k_1-1\}$-inévitable.

Ce lemme et le lemme 4.3 nous donnent le corollaire suivant:

Corollaire 4.5.1 *Le raccordement d'ordre n de k chemins dont le premier bloc est de longueur au moins deux est $(n+k-1)$-inévitable.*

De la manière analogue à la preuve du lemme 4.5, nous pouvons montrer le lemme suivant:

Lemme 4.6 *Soient $R = \bigvee_{i=1}^{k} P_i$ le raccordement d'ordre n de $k \geq 2$ chemins sortants dont le premier bloc est de taille au moins deux et T un tournoi d'ordre $n+2k-2$. Tout sommet origine d'un arbre quasi-convenable couvrant A est origine de R dans T.*

La différence avec la preuve du lemme 4.5 vient de la non existence possible de chemin de longueur 1. Ainsi on ne peut pas forcément ajuster la taille du tournoi T_1 dans lequel on va construire le chemin P_1 à $|P_1|+1$ mais seulement à $|P_1|+2$.

Raccordements de chemins sortants dont le premier bloc est de longueur un.

Définition 12 Soit $h(k) := \frac{1}{2}(k^2+k+2)$. La fonction h vérifie la relation de récurrence suivante: $h(k) = 2h(k-1) - h(k-2) + 1$ avec $h(0) = 1$, et $h(1) = 2$.

Lemme 4.7 *Soient T un tournoi d'ordre $n+h(k)-1$ et k chemins $P_1, P_2, \ldots, P_k$ d'ordre respectifs $n_1, n_2, \ldots, n_k$ tels que $\sum_{i=1}^{k} n_i = n+k-1$ et $b_1(P_i) = 1$, pour $1 \leq i \leq k$. Soit K un ensemble à $h(k)$ sommets. Dans K il y a un sommet origine de $R = \bigvee_{i=1}^{k} P_i$ tel que $|K \setminus V(R)| \geq h(k-1)-1$.*

Preuve. Par récurrence sur k. Pour $k=1$, le théorème 2.1 nous donne le résultat.

Pour $k \geq 2$, posons $R' = \bigvee_{i=1}^{k-1} P_i$. On a $R = R' \vee P_k$. Soit (A_1, A_2) une partition de $V(T-K)$ telle que $|A_1| = \sum_{i=1}^{k-1}(n_i - 1)$ et $|A_2| = n_k - 1$. Soit K_1 un sous-ensemble de K de cardinal $h(k-1)$. Par hypothèse de récurrence, parmi les sommets de K_1, il existe un sommet x qui est origine de R' dans $T(K_1, A_1)$ avec $K_3 = K_1 \setminus V(R')$ de cardinal au moins $h(k-2)-1$. Soit $K_2 = K_3 \cup (K \setminus K_1)$. Comme $h(k) = 2h(k-1) - h(k-2) + 1$, on a $|K_2| \geq h(k-1)$. Donc par hypothèse de récurrence, parmi les sommets de K_2, il existe un sommet y qui est origine de R' dans $T(K_2, A_1)$ avec $K_4 = K_2 \setminus V(R')$ de cardinal au moins $h(k-2)-1$. Or d'après le théorème 2.1, dans $T(x, y, A_2)$ x ou y est origine de P_k. Sans perte de généralité, on peut supposer que c'est x. Ainsi, dans $T(K_1 \setminus K_3, y, A_1, A_2)$, x est origine de $R' \vee P_k = R$ et $K_2 \setminus \{y\} \subseteq K \setminus V(R)$. Donc $|K \setminus V(R)| \geq h(k-1)-1$. $\square$

Cas général.

Lemme 4.8 *Soit R le raccordement d'ordre n de $k \geq 2$ chemins sortants P_i de premier bloc de longueur 1 et d'un chemin sortant Q de premier bloc de longueur au moins deux. R est $(n+2h(k)-k-1)$-inévitable.*

Preuve. Soit T un tournoi d'ordre $n+2h(k)-k-1$. Soient R_1 le raccordement de $h(k)$ chemins entrants de longueur 1, $R_2 = R_1 \vee^* Q$. Alors R_1 est $2h(k)$-inévitable. Comme $b_1(Q) \geq 2$, le chemin ${}^*Q$ est sortant et d'après le corollaire 2.1.1 dans un tournoi à $|Q|$ sommets, il y a deux origines de ${}^*Q$. Ainsi d'après le lemme 4.3, R_2 est $(|{}^*Q|+2h(k)-1)$-inévitable. Comme $n+2h(k)-k-1 \geq |Q|+2h(k)$, il y a une origine x de R_2 dans T. Soient $T' = T -^* Q$, $R' = \bigvee_{i=1}^{k} P_i$ et $x_1, \ldots, x_{h(k)}$ les sommets de $R_2 -^* Q$. On a $|T'| \geq |R'| + h(k) - 1$ donc d'après le lemme 4.7, un des x_i, disons x_1, est origine de R' dans T'. Ainsi x_1 est origine de $R' \vee (x, {}^* Q) = R$ dans T. □

Proposition 4.1 *Si x est origine d'un arbre quasi-convenable d'ordre n dans T alors quel que soit $y \in V(T) \setminus \{x\}$, x est origine d'un arbre quasi-convenable d'ordre $n-3$ dans $T-y$.*

Lemme 4.9 *Soit R le raccordement d'ordre n de k_1 chemins sortants $P_i, 1 \leq i \leq k_1$ dont le premier bloc est de longueur un et de $k_2 \geq 2$ chemins sortants $Q_j, 1 \leq j \leq k_2$ dont le premier bloc est de longueur au moins deux. Alors R est $(n+3h(k_1)+2k_2-5)$-inévitable.*

Preuve. Soient $R_1 = \bigvee_{i=1}^{k_1} P_i$ et $R_2 = \bigvee_{j=1}^{k_2} Q_j$ d'ordres respectifs n_1 et n_2. Soient T un tournoi d'ordre $n+3h(k_1)+2k_2-5$, T' un sous-tournoi de T d'ordre $n_2+3h(k_1)+2k_2-5$ et T'' le tournoi $T-T'$. Prenons les sommets $x_i, 1 \leq i \leq h(k_1)$, tels que x_i est origine d'un arbre quasi-convenable couvrant A_i de $T-(x_1, \ldots, x_{i-1})$. D'après la proposition 4.1, x_i est origine d'un arbre quasi-convenable d'ordre au moins (n_2+2k_2-2) dans $T' - (\bigcup_{j \neq i} x_j)$. Donc par le lemme 4.6, x_i est origine de R_2 dans $T' - (\bigcup_{j \neq i} x_j)$. De plus, $T_1 = T(T'', \bigcup_{i=1}^{h(k_1)} x_i)$ est de cardinal $n_1 + h(k_1) - 1$. Donc d'après le lemme 4.7, parmi les x_i, il y a une origine, disons x_1, de R_1 dans T_1. Ainsi x_1 est origine de R dans T. □

Les quatre lemmes précédents nous permettent de déduire un théorème général pour un raccordement de chemins sortants:

Théorème 4.1 *Un raccordement d'ordre n de k chemins sortants est $(n+3h(k-2)-1)$-inévitable.*

Puisque $h(k-2) = \frac{1}{2}(k^2-3k)+2$, ce théorème et le lemme 4.3 nous donne le théorème suivant:

Théorème 4.2 *Le raccordement d'ordre n de $k \geq 3$ chemins est $(n+\frac{3}{2}(k^2-3k)+5)$-inévitable. En particulier, un arbre d'ordre n à trois feuilles est $(n+5)$-inévitable.*

4.2 L'idée de Häggkvist et Thomason.

Définition 13 Soit A_1 un sous-arbre d'un arbre A. On note par $A^+(A_1)$, (resp. $A^-(A_1)$) la forêt qui est l'union des composantes de la forêt $A - A_1$ qui sont reliées *positivement* (resp. *négativement*) à A_1, i.e. l'ensemble des sous-arbres A_2 de $A - A_1$ maximaux par inclusion pour lesquels il existe $x \in A_1$ et $y \in A_2$ tels que x domine (resp. est dominé par) y dans A.

Soit p un entier supérieur ou égal à 3. Le *p-cœur* d'un arbre A d'ordre n, noté $h_p(A)$ est le sous-digraphe induit par les arêtes $e \in E(A)$ pour lesquelles chacune des deux composantes de la forêt $A - e$ est d'ordre au moins n/p. Si jamais il n'existe pas de telle arête, $h_p(A)$ sera l'arbre constitué de l'unique sommet x de A telle que $A - x$ est une forêt dont chaque composante est d'ordre inférieur à n/p. Remarquons que $h_p(A)$ est connexe et par conséquent, est un arbre. De plus, pour $p \geq 3$, $h_p(A)$ a au plus $p - 1$ feuilles. En effet, la suppression dans A d'une arête adjacente à une feuille f de $h_p(A)$ nous donne une composante de A d'ordre au moins n/p dont l'intersection avec $h_p(A)$ est réduite à f. Ainsi, si $h_p(A)$ à k feuilles, $h_p(A)$ est d'ordre au plus $n - k\lceil n/p \rceil + k$. Remarquons enfin que les composantes de $A - h_p(A)$ sont toutes d'ordre inférieur à n/p, soit d'ordre au plus $\lceil n/p \rceil - 1$.

L'idée de Häggkvist et Thomason pour trouver un arbre orienté A dans un tournoi T est de trouver le p-cœur $h_p(A)$ de A dans le sous-tournoi induit par les sommets de degrés extérieur et intérieur suffisamment grand pour pouvoir, ensuite, trouver les composantes de $A - h_p(A)$ dans le voisinage des sommets où elles se raccordent dans A, afin que ces composantes soient reliées à $h_p(A)$ dans S de manière identique à celle dans A.

Supposons que pour $k \leq p$, on puisse trouver tous les arbres orientés d'ordre n à k feuilles dans tout tournoi d'ordre $\alpha_k(n)$. Rappelons que la conjecture 4 suppose que $\alpha_k(n) = n + k - 1$

Supposons maintenant que l'on puisse trouver tous les arbres d'ordre $m < n$ dans tous les tournois d'ordre $\alpha(m)$. Nous allons établir des relations que doit vérifier $\alpha(n)$ pour garantir que tout arbre d'ordre n soit contenu dans tous les tournois d'ordre $\alpha(n)$.

Soit A un arbre d'ordre n et $h_p(A)$ son p-cœur. Notons k le nombre de feuilles de $h_p(A)$. L'ordre t de $h_p(A)$ est donc au plus $n - k\lceil n/p \rceil + k$.

Soient U^+ et U^- les ordres de $A^+(h_p(A))$ et de $A^-(h_p(A))$. Pour des raisons de dualité, on peut supposer que $U^+ \leq U^-$. Comme $U^+ + U^- = n - t$, nous avons $U^+ \leq (n - t)/2$.

Montrons que l'on peut trouver A dans le tournoi si on peut trouver $\alpha_k(t)$ sommets v tels que

$$d^+(v) \geq t - 1 + U^+ + \alpha(n/p) - n/p \ (1)$$

et

$$d^-(v) \geq t - 1 + U^+ + U^- + \alpha(n/p) - n/p \ (2)$$

En effet, dans le tournoi induit par les $\alpha_k(t)$ sommets de hauts degrés interne et externe, on peut trouver $h_p(A)$.
Soient $A_1^+, A_2^+, \ldots, A_r^+$ les composantes reliées positivement à $h_p(A)$ et soient $a_1, a_2, \ldots, a_r$ les sommets de $h_p(A)$ auxquels elles se rattachent respectivement. Il nous faut trouver A_j^+ sommets distincts de la partie de l'arbre déjà construite, $h_p(A) \cup \bigcup_{1\leq l<j} A_l^+$, dans le voisinage externe de a_i. Comme $|A_j^+| < n/p < n$, par hypothèse de récurrence, on peut les trouver dans un tournoi d'ordre $\alpha(|A_j^+|)$. Pour garantir l'existence d'une telle partie A_j^+, il suffit donc que a_j soit de degré externe au moins $t-1+\sum_{1\leq l<j}|A_l^+| + \alpha(|A_j^+|)$. Comme $\sum_{1\leq l\leq r}|A_l^+| = U^+$ et $|A_j^+| < n/p$, ceci est vérifié d'après (1).
Soient $A_1^-, A_2^-, \ldots, A_s^-$ les composantes reliées négativement à $h_p(A)$ et soient $b_1, b_2, \ldots, b_s$ les sommets de $h_p(A)$ auxquels elles se rattachent respectivement. Il nous faut trouver A_m^- sommets distincts de la partie de l'arbre déjà construite, $h_p(A) \cup \bigcup_{1\leq l\leq r} A_l^+ \cup \bigcup_{1\leq l<m} A_l^-$, dans le voisinage interne de a_i. Comme $|A_m^-| < n/p < n$, par hypothèse de récurrence, on peut le trouver dans un tournoi d'ordre $\alpha(|A_m^-|)$. Pour garantir l'existence d'une telle partie A_m^-, il faut donc que a_j soit de degré interne au moins $t-1+U^+ + \sum_{1\leq l<m}|A_l^-| + \alpha(|A_m^-|)$. Comme $\sum_{1\leq l\leq s} A_l^-| = U^-$ et $|A_m^-| < n/p$, ceci est vérifié d'après (2).

D'après la propriété 1.1, on peut trouver $\alpha_k(t)$ sommets de degrés interne et externe vérifiant (1) et (2) pour tout tournoi d'ordre $\alpha(n)$ tel que:

$$\alpha(n) \geq \alpha_k(t) + 4t - 5 + 4U^+ + 2U^- + 4\alpha(n/p) - 4n/p.$$

Comme $U^+ + U^- = n - t$ et $U^+ \leq \frac{1}{2}(n-t)$, ceci est vrai si

$$\alpha(n) \geq \alpha_k(t) + 4t - 5 + 3(n-t) + 4\alpha(n/p) - 4n/p,$$

soit

$$\alpha(n) - 4\alpha(n/p) \geq \alpha_k(t) + t + 3n - 4n/p - 5.$$

Et comme $t \leq n - k\lceil n/p\rceil + k$, ceci est vérifié si

$$\alpha(n) - 4\alpha(n/p) \geq \alpha_k(n - k\lceil n/p\rceil + k) + (n - k\lceil n/p\rceil + k) + 3n - 4n/p - 5 \quad (\star_k).$$

Comme $h_p(A)$ a au moins deux et au plus $p-1$ feuilles, on prouve ainsi par récurrence que si α vérifie $(\star_k)$ pour $2 \leq k \leq p-1$, alors tout tournoi d'ordre $\alpha(n)$ contient tout arbre orienté d'ordre n. Il faut donc trouver des fonctions α_k les plus petites possibles pour trouver une fonction α la plus petite possible.

En prouvant $\alpha_k(n) \leq 2^k n$ [16], Häggkvist et Thomason ont obtenu le résultat suivant:

Théorème 4.3 (Häggkvist et Thomason, 1991 [16]) *Un arbre orienté d'ordre n est $12n$-inévitable.*

Preuve. Pour le 10-cœur d'un arbre avec $\alpha_k(n) \leq 2^k n$ et $\alpha(n) = 12n$, les équations $(\star_k)$ sont vérifiées. □

4.3 Arbres ayant peu de feuilles.

Dans ce paragraphe, pour les petites valeurs de k, nous donnons des bornes supérieures $\alpha_k(n)$ de l'ordre d'un tournoi pour garantir l'existence des arbres d'ordre n ayant k feuilles dans celui-ci. Ceci nous permettra de trouver une petite borne pour l'inévitabilité des arbres en utilisant la technique de Häggkvist et Thomason.

Le corollaire 2.1.1 affirme qu'un arbre d'ordre n à deux feuilles est $(n+1)$-inévitable (i.e. $\alpha_2(n) = n+1$) et le théorème 4.2 qu'un arbre d'ordre n à trois feuilles est $(n+5)$-inévitable (i.e. $\alpha_3(n) \leq n+5$).

Lemme 4.10 *Un arbre d'ordre n à quatre feuilles d'ordre n est $(2n+9)$-inévitable.*

Preuve. Soit A un arbre d'ordre n à quatre feuilles. Il existe un sommet v de A tel que $A - v$ soit une forêt dont les composantes sont deux chemins et un arbre à au plus trois feuilles. On supposera que l'arbre à trois feuilles est contenu dans $A^+(v)$, la démonstration étant duale dans le cas contraire. S'il existe un sommet x tel que $d^+(x) \geq |A^+(v)| + 5$ et $d^-(x) \geq |A^-(v)| + 1$ nous pouvons trouver $A^+(v)$ dans $N^+(x)$ et $A^-(v)$ dans $N^-(x)$ et donc nous avons A dans T. Or nous trouvons un tel sommet dans tout tournoi d'ordre $2(|A^+(v)| + 5) + 2(|A^-(v)| + 1) - 1 = 2n + 9$. $\square$

Lemme 4.11 *Un arbre d'ordre n à cinq feuilles est $(2n+15)$-inévitable.*

Preuve. Soit A un arbre d'ordre n à cinq feuilles, il existe un sommet v de A tel que $A - v$ soit une forêt dont les composantes sont des arbres ayant au plus à trois feuilles et un chemin. On supposera que le chemin est contenu dans $A^-(v)$, la démonstration étant duale dans le cas contraire. S'il existe un sommet x tel que $d^+(x) \geq |A^+(v)| + 5$ et $d^-(x) \geq |A^-(v)| + 4$ nous pouvons trouver $A^+(v)$ dans $N^+(x)$ et $A^-(v)$ dans $N^-(x)$ et donc nous avons A dans T. Or nous trouvons un tel sommet dans tout tournoi d'ordre $2(|A^+(v)| + 5) + 2(|A^-(v)| + 4) - 1 = 2n + 15$. $\square$

Lemme 4.12 *Un arbre d'ordre n à six ou sept feuilles est $(4n+8)$-inévitable.*

Preuve. Soit A un arbre d'ordre n à six ou sept feuilles. Il existe un sous-arbre A_1 à quatre feuilles de A tel que $A - A_1$ soit une forêt dont toutes les composantes sont toutes reliées de la même manière, disons positivement, à A_1 vérifiant une des deux conditions suivantes:

a) $A - A_1$ est d'ordre au moins 4 et les composantes sont des arbres ayant au plus trois feuilles.

b) $A - A_1$ est d'ordre au moins 3 et les composantes sont des chemins.

Dans le cas a), par le lemme 4.10, s'il existe $2|A_1| + 9$ sommets x tels que $d^+(x) \geq |A^+(A_1)| + |A_1| + 4$, nous pouvons trouver A dans T. Or nous trouvons de tels sommets dans tout tournoi d'ordre $2|A_1|+9+2(|A^+(A_1)|+|A_1|+4)-1 \leq 4n-2|A^+(A_1)|+16 \leq 4n+8$.

Dans le cas b), par le lemme 4.10, s'il existe $2|A_1|+9$ sommets x tels que $d^+(x) \geq |A^+(A_1)|+|A_1|$, nous pouvons trouver A dans T. Or nous trouvons de tels sommets dans tout tournoi d'ordre $2|A_1|+9+2(|A^+(A_1)|+|A_1|)-1 \leq 4n-2|A^+(A_1)|+8 \leq 4n+8$. $\square$

Lemme 4.13 *Un arbre d'ordre n à 8, 9 ou 10 feuilles est $5n$-inévitable.*

Preuve. Soit A un arbre d'ordre n à 8, 9 ou 10 feuilles. Soit a) il existe un sous-arbre A_1 de A à trois feuilles tel que $A-A_1$ est une forêt d'ordre au moins 9, dont les composantes sont des arbres ayant au plus trois feuilles, soit b) il existe un chemin A_1 tel que $A-A_1$ est un forêt dont les composantes sont des chemins.

Dans les cas a), si nous avons $|A_1|+5$ sommets de degré externe supérieur ou égal à $|A^+(A_1)|+|A_1|+5$ et de degré interne supérieur ou égal à $|A^-(A_1)|+|A^+(A_1)|+|A_1|+4$, on peut trouver A dans T. On trouve de tels sommets dans tout tournoi d'ordre $|A_1|+5+2(|A^+(A_1)|+|A_1|+4)+2(|A^-(A_1)|+|A^+(A_1)|+|A_1|+4) \leq 5n+21-|A^+(A_1)|-2A^-(A_1)| \leq 5n$.

Dans les cas b), si nous avons $|A_1|+1$ sommets de degré externe supérieur ou égal à $|A^+(A_1)|+|A_1|$ et de degré interne supérieur ou égal à $|A^-(A_1)|+|A^+(A_1)|+|A_1|$, on peut trouver A dans T. On trouve de tels sommets dans tout tournoi d'ordre $|A_1|+1+2(|A^+(A_1)|+|A_1|)+2(|A^-(A_1)|+|A^+(A_1)|+|A_1|) \leq 5n$.

$\square$

Théorème 4.4 *Un arbre orienté d'ordre n est $(\frac{38}{5}n-6)$-inévitable.*

Preuve. En appliquant la méthode de Häggkvist et Thomason pour le 9-cœur, on voit que $(\star_k)$ est vérifiée pour tout k avec $\alpha(n)=\frac{38}{5}n-6$. Comme on peut trouver un arbre à un sommet dans un tournoi à $\lfloor \alpha(1) \rfloor = 1$ sommet, on a le résultat. $\square$

Chapitre 5

Algorithmes.

La traduction de la preuve du théorème de Rédei nous donne un algorithme en $O(n^2)$ pour trouver un chemin hamiltonien direct dans un tournoi. Hell et Rosenfeld [18] ont donné un algorithme en $O(n \log n)$ pour trouver un chemin hamiltonien direct. Cet algorithme est un analogue du tri par insertion binaire. La borne $n \log n$ est la meilleure possible puisque dans le cas particulier d'un tournoi transitif, trouver un chemin hamiltonien revient à effectuer un tri sur les sommets.

D'autre part, dans [18], Hell et Rosenfeld ont montré que pour tout $0 \leq \alpha \leq 1$, il existe des chemins dont la recherche nécessite $O(n \log^\alpha n)$ comparaisons. En particulier, ils ont montré que la recherche d'un chemin alterné nécessite seulement $O(n)$ comparaisons. Bampis, Hell, Manoussakis et Rosenfeld [4] ont donné un algorithme en $O(n)$ pour trouver un chemin hamiltonien alterné dans un tournoi.

Cependant aucun algorithme n'a été donné pour trouver un chemin en général. En particulier la preuve de Thomason ne donne pas d'algorithme efficace. Ici nous donnons un algorithme en $O(n^2)$ qui à partir d'un tournoi T d'ordre n et un chemin d'ordre n nous rend une occurrence de P dans T. Cet algorithme est issu de la preuve du théorème 2.3. Il est donc asssez complexe et nécessite d'implémenter des tables pour les exceptions au théorème 2.2. Nous donnons donc au préalable un algorithme en $O(n^2)$ facile d'implémentation qui à partir d'un tournoi T d'ordre n et un chemin d'ordre inférieur à n nous rend une occurrence de P dans T. Cet algorithme a été implémenté en Scheme (voir Annexe A).

La traduction de la preuve du théorème de Camion donne un algorithme en $O(n^3)$ qui trouve un cycle hamiltonien direct dans un tournoi (s'il existe). Morrow et Goodman [25] ont donné un algorithme plus performant toujours en $O(n^3)$ et Soroker [33] a donné un algorithme en $O(n^2 \log n)$ (il s'agit en fait d'un algorithme parallèle en $O(\log^2 n)$ sur $O(n^2/\log n)$ processeurs). Enfin, Manoussakis [23] a donné un algorithme en $O(n^2)$ qui à partir d'un chemin hamiltonien direct d'un tournoi donne un cycle hamiltonien direct. Cet algorithme combiné avec les algorithmes de recherche d'un chemin hamiltonien direct nous donne un algorithme qui trouve un cycle hamiltonien direct (s'il existe) en $O(n^2)$.

Cette borne est la meilleure possible, comme Soroker l'a observé dans [32]. Nous donnons ici un algorithme en $O(n^2)$ qui permet de trouver un cycle non direct hamiltonien dans un tournoi réductible. Nous donnons de plus un algorithme en $O(n^2)$ qui permet de trouver un cycle hamiltonien ayant un bloc de longueur au moins $k+2$ dans un tournoi $(=k)$-fortement connexe et un algorithme en $O(n^2)$ qui permet de trouver un cycle hamiltonien dans un tournoi (=1)-fortement connexe.

5.1 Chemins d'ordre au plus $n-1$ dans les tournois d'ordre n.

5.1.1 L'algorithme.

La preuve du théorème 2.1 se traduit immédiatement par la procédure suivante:
n-1chem(T, P, x, y) rend un chemin P dans T d'origine x ou y si $s_T^+(x,y) \geq b_1(P)+1$ si P sortant et $s_T^-(x,y) \geq b_1(P)+1$ si P entrant.

n-1chem(T, P, x, y)
Début
Si $x \leftarrow y$, faire **n-1chem**(T, P, y, x).
Si P est un chemin entrant, faire **n-1chem**$(-T, -P, y, x)$.
Si P est de longueur 1, rendre (x, y).
Sinon P est sortant et $x \rightarrow y$.

Si $b_1(P) \geq 2$,
  Si $d_T^+(x) \geq 2$.
    Soient z un outgénérateur de $N_T^+(x)$ et $t \in N_T^+(x) \backslash \{z\}$.
    Rendre $(x$, **n-1chem**$(T-x, {}^*P, z, t)$ $)$.
  Sinon $d_T^+(x) = 1$.
    Soit z un outgénérateur de $N_T^+(y)$,
    Rendre $(y$, **n-1chem**$(T-y, {}^*P, z, x)$ $)$.

Sinon $b_1(P) = 1$.
  Si $d_T^+(x) \geq 2$,
    Soit z un ingénérateur de $N_T^+(x)$ et $t \in N_T^+(x) \backslash \{z\}$.
    Si $s_{T-x}^-(z) \geq b_2(P)+1$,
      Rendre $(x$, **n-1chem**$(T-x, {}^*P, z, t)$ $)$.
    Sinon, posons $Y = T - (x, S_{T-x}^-(z))$.
      Soit u un ingénérateur de Y et $v \in Y - u$.
      Rendre $(y$, **n-1chem**$(T-y, {}^*P, u, v)$ $)$.
  Sinon $d_T^+(x) = 1$.

Si $d_T^+(y) < 2$,
Soient x' un outgénérateur et y' un ingénérateur de $N_{T-x}^-(y)$.
Rendre $(x,\ y,$ **n-1chem**$(T-(x,y),^{**} P, x', y'))$.
Sinon $d_T^+(y) \geq 2$,
Soient z un ingénérateur de $N_T^+(y)$ et $t \in N_T^+(y)\backslash\{z\}$.
Si $s_{T-y}^-(z) \geq b_2(P)+1$,
Rendre $(y,$ **n-1chem**$(T-y,^* P, z, t)\ )$.
Sinon $s_{T-y}^-(z) \leq b_2(P)$.
Posons $X = T - (S_{T-y}^-(z), x, y)$.
Soit v un ingénérateur de X.
Si $|X| \geq 2$, soit $u \in X - v$.
Rendre $(x,\ y,$ **n-1chem**$(T-(x,y),^{**} P, v, u))$.
Sinon soit H un chemin hamiltonien entrant de $T-(x,y,v)$.
Rendre $(x, y, v,^* H)$.
Fin

A partir de la procédure ci-dessus, on définit aisément une procédure **petichem** qui trouve un chemin P d'ordre $n-1$ dans un tournoi T de longueur n. Il suffit de trouver un outgénérateur x et un ingénérateur y de T et de faire **n-1chem**(T, P, x, y).

5.1.2 Complexité.

L'algorithme ci-dessus nécessite des procédures permettant de tester si le degré externe d'un sommet est supérieur à 2 ou non, de trouver des ingénérateurs et des outgénérateurs d'un tournoi, de tester si une section initiale est plus grande que l'ordre du deuxième bloc d'un chemin et enfin de retirer un sommet d'un tournoi.

Tester si le degré externe d'un sommet x est au moins 2 nécessite au plus $n-1$ comparaisons (celle de x avec tous les autres sommets). Cela ne nécessite aucune autre opération.

Trouver un ingénérateur d'un tournoi se fait en $n-1$ comparaisons et ne nécessite aucune autre opération. En effet, supposons que nous ayons trouver l'ingénérateur y du tournoi $T-x$. Pour trouver l'ingénérateur de T, il nous suffit de comparer x et y. Si $x \to y$, c'est x sinon c'est y.

Tester si une section initiale d'un ensemble S dans un tournoi est de cardinal supérieur à k ou non se fait en moins de $O(k.n)$ opérations. En effet, il nous suffit de trouver un ingénérateur x de S ou d'une partie de S de cardinal k si $|S| \geq k$ (cela se fait en $O(k)$ d'après ce qui précède) et ensuite, si $|S| < k$, de trouver un arbre descendant de racine x (tous les sous-chemins issus d'origine x dans l'arbre sont descendants) en s'arrêtant lorsque l'on a trouvé k sommets. Ceci peut se faire par exemple avec un parcours en profondeur inversé en $O(kn)$ opérations.

Enfin retirer un sommet d'un tournoi se fait en $O(n)$. Cela revient par exemple à retirer la ligne et la colonne correspondant au sommet dans la matrice d'adjacence.

Dans l'algorithme ci-dessus, on teste au plus le degré de deux sommets (x et y) à chaque appel de **n-1chem**. On le fait donc au plus $n-2$ fois. Ce qui nous donne moins de n^2 comparaisons. A chaque appel, nous devons trouver au plus un outgénérateur et un ingénérateur. Ceci nécessite donc moins de $2n^2$ comparaisons au total. On teste si une section initiale est plus grande que le bloc suivant seulement lorsque le bloc est de taille 1. On le fait donc une seule fois par bloc. Si le type de P est $(b_1, b_2, \ldots, b_l)$ on fait donc $O(b_2.n) + O(b_3.n) + \cdots + O(b_l.n)$ opérations donc en $O(n^2)$.

D'autre part, on fait n opérations consistant à ôter un sommet à un tournoi. Ceci se fait donc en $O(n^2)$ opérations. Cet algorithme s'effectue donc en temps $O(n^2)$.

5.2 Chemins hamiltoniens dans les tournois.

5.2.1 L'algorithme.

On peut traduire la preuve du théorème 2.2 par l'algorithme suivant. Il est évidemment basé sur le même principe que la procédure **n-1chem**, cependant, du fait de l'existence d'exceptions, il nous faut à chaque fois tester si on se raccorde à une exception et si oui faire une procédure particulière.

La procédure suivante prend en entrée un tournoi T et un chemin P tels que $(T;P)$ ne soit pas une exception et deux sommets x et y tels que $s_T^+(x,y) \geq b_1(P)$ si P est sortant ou $s_T^-(x,y) \geq b_1(P)$ si P est entrant; elle rend un chemin P dans T d'origine x ou y.

chem(T, P, x, y)
Début.
Si $x \leftarrow y$, faire **chem**(T, P, y, x).
Si P est un chemin entrant, faire **chem**$(-T, P, y, x)$.
Si $|T| = 2$, rendre (x, y).
Sinon P est sortant et $x \rightarrow y$.

Si $b_1(P) \geq 2$,
  Si $d_T^+(x) \geq 2$,
    Si $(T-x;^* P)$ est une exception, faire **extension1**(T, P, x, y).
    Sinon trouver z un outgénérateur de $N^+(x)$ et $t \in N^+(x) - z$.
      Rendre $(x,$ **chem**$(T-x,^* P, z, t))$.
  Sinon $d_T^+(x) = 1$.
    Si $(T-y;^* P)$ est une exception, faire **tombexcep1**(T, P, x, y).
    Sinon trouver z un outgénérateur de $N^+(y)$.
      Rendre $(y,$ **chem**$(T-y,^* P, z, x))$.

Sinon $b_1(P) = 1$.
Posons $X = S^-_{T-x}(N^+(x))$.

Si $d^+_T(x) \geq 2$ et $|X| \geq b_2(P) + 1$,
Si $(T - x;^* P)$ est une exception, faire **extension2**(T, P, x, y).
Sinon trouver z un ingénérateur de $N^+(x)$ et $t \in N^+(x) - z$.
Rendre $(x$, **chem**$(T - x,^* P, z, t))$.

Si $d^+_T(x) \geq 2$ et $|X| \leq b_2(P)$,
Si $P = +(1, n-2)$, faire **special1**.
Si $P = +(1, n-3, 1)$, faire **special2**.
Si $P = +(1, n-4, 2)$, faire **special3**.
Si $P = +(1, n-4, 1, 1)$, faire **special4**.
Sinon on a $|X| \leq b_2(P) \leq n - 5$.
Soit $Y = T - (x, X)$.
Trouver z un ingénérateur de Y et $t \in Y - z$.
Rendre $(y$, **chem**$(T - y,^* P, z, t))$.

Si $d^+_T(x) = 1$ et $|X| \geq b_2(P) + 1$,
Si $d^+_T(y) = 0$,
Trouver z un outgénérateur de $T - (x, y)$ et t un ingénérateur de $T - (x, y)$.
Rendre $(x$, y, **chem**$(T - (x, y),^{**} P, z, t))$.
Si $d^+_T(y) = 1$,
Si $(T - (x, y);^{**} P)$ est une exception, faire **tombexcep2**(T, P, x, y).
Sinon $(T - (x, y);^{**} P)$ n' est pas une exception.
Si $P = (1, n-2)$ faire **special5**.
Si $P = (1, 1, n-3)$ faire **special6**.
Sinon trouver un outgénérateur u et un ingénérateur v de $(T - (x, y)$.
Si $u = z$, remplacer u par un outgénérateur de $N^+_{T-(x,y)}(u)$.
Si $v = z$, remplacer v par un ingénérateur de $N^-_{T-(x,y)}(v)$.
Rendre $(x$, y, **chem**$(T - (x, y),^{**} P, u, v))$.
Sinon $d^+_T(y) \geq 2$.
Soit $Z = S^-_{T-y}(N^+(y))$ et $W = T - (Z, x, y)$.
Si $|Z| \geq b_2(P) + 1$,
Si $(T - y;^* P)$ est une exception, faire **tombexcep3**(T, P, x, y).
Sinon soit z un ingénérateur de $N^+(y)$ et $t \in N^+(y) - z$.
Rendre $(y$, **chem**$(T - y,^* P, z, t))$.
Sinon $|Z| \leq b_2(P)$.
Si $(T - (x, y);^{**} P)$ est une exception, faire **tombexcep4**(T, P, x, y).
Sinon,

Si $|W| \geq 2$,
Soit u un ingénérateur de W et $v \in W - u$.
Rendre $(x$, y, **chem**$(T - (x,y),^{**} P, u, v))$.
Si $|W| = 1$, disons $W = \{w\}$,
Si y a un voisin interne v dans Z,
Rendre x, y, **chem**$(T - (x,y),^{**} P, w, v))$.
Sinon $Z = N^+(y)$.
Soit u un ingénérateur et v un outgénérateur de $T - (x, y, w)$.
Rendre $(x$, y, z, **chem**$(T - (x,y,w),^{***} P, u, v))$.
Sinon $W = \emptyset$, alors $P = +(1, n-2)$ et y est un ingénérateur de $T - x$.
Rendre **special7**(T, x, y).

Si $d^+_T(x) = 1$ et $|X| \leq b_2(P)$,
Soit $Y = T - (x, X)$.
On a $|Y| \geq 2$ et $b_2(P) \geq n - 2$ car $(T; P)$ n'est pas une exception.
Si $(T - y;^* P)$ est une exception, faire **tombexcep5**(T, P, x, y).
Sinon soit u un ingénérateur de Y et $v \in Y - u$.
Rendre $(y$, **chem**$(T - y,^* P, u, v))$.

Fin

A partir de cette procédure et d'une procédure **tablexcep** qui, prenant en entrée une exception $(T; P)$ et un sommet x origine de P dans T, rend un chemin P dans T d'origine x, on peut construire une procédure **hamilt** qui trouve un chemin hamiltonien P dans T s'il existe. La procédure **tablexcep** correspond aux tables que nous avons données lorsque nous avons introduit les exceptions $\mathcal{E}_i$ (partie 2.2) et $\mathcal{F}_i$ (partie 2.3).

hamilt(T, P)
Début
Si $(T; P)$ est une exception $\mathcal{E}_i$ ou $\mathcal{F}_i$,
Si $(T; P)$ est une exception de Grünbaum, écrire "pas de chemin P dans T".
Sinon soit x un sommet de T origine de P dans T, rendre **tablexcep**(T, P, x).
Sinon soit u un outgénérateur de T et v un ingénérateur de T tels que $u \neq v$.
Rendre **chem**(T, P, u, v).
Fin

5.2.2 Les sous-procédures.

Reconnaissance des exceptions.

Reconnaitre une petite exception se fait clairement en temps constant.

De plus, pour savoir si un couple $(T; P)$ fait partie d'une famille infinie d'exceptions, on regarde d'abord si P est un chemin qui fait partie d'un des couples d'exceptions. Comme les chemins des exceptions ont au plus huit blocs, cela se fait en temps constant. Ensuite, on regarde si le tournoi T fait partie d'une famille F_i correspondant à P. Pour cela, il suffit de regarder les sommets de petits degrés interne ou externe (≤ 3) et ensuite de regarder le sous-tournoi induit par ces sommets. Par exemple, pour savoir si un tournoi appartient à la famille F_1, il suffit de regarder s'il possède trois sommets de degré externe 1. Pour savoir si un tournoi appartient à la famille F_2, il suffit de regarder s'il a exactement deux sommets de degré externe un, notés 1 et 3 et deux sommets de degré externe deux, notés 2 et 4 et de vérifier que $1 \rightarrow 2$ et $2 \rightarrow \{3, 4\}$.

Or on peut trouver les sommets de degré externe $\leq k$ dans un tournoi d'ordre n en moins de $(2k+1)n$ comparaisons par l'algorithme suivant. Cet algorithme garde en mémoire dans une liste les sommets qui sont potentiellement de degré externe inférieur ou égal à k dans une liste L.

Début.
La liste L est vide.
Pour chaque sommet x faire:
    Initialiser le degré provisoire de x à 0.
    Comparer x avec tous les sommets de L.
    A chaque fois que x domine un sommet de L, incrémenter le degré provisoire de x .
    A chaque fois que x est dominé par un sommet y de L, incrémenter le degré provisoire de y.
    Ajouter x à L.
    Enlever tous les sommets de L de degré provisoire supérieur à k.
Fin

Pour chaque sommet, cet algorithme le compare à ceux de L qui sont de degré provisoire au plus k. Il y en a au plus $2k+1$. Donc cet algorithme se fait en moins de $(2k+1)n$ comparaisons.

Ainsi, on peut savoir si $(T; P)$ est une exception en $O(n)$.

Les procédures d'extension.

La procédure **extension1** mime les lemmes d'extension 2.2 et 2.4. La procédure **extension2** mime les lemmes d'extension 2.3 et 2.5. Pour ces deux procédures, nous considérerons que les chemins sont donnés par une table **tablext** lorsque $(T; P)$ est une petite exception. Cette table correspond à celles que nous avons donné pour les preuves des lemmes 2.2 et 2.3. Pour ces procédures, nous utiliserons les notations de la partie 2.3. En particulier les sommets 1, 2, ... représenteront les sommets 1,2, ... de la figure 2.3 et les tournois X et Y les tournois représentés figure 2.3.

extension1(T, P, x, y)

Début
Soit S l'ensemble des sommets de T non départs de ${}^*P$ dans $T - x$.
Si $N_T^+(x) \not\subset S$,
  Soient u un sommet de $N_T^+(x) \setminus S$ et v un voisin externe de x distinct de u.
  Rendre $(x,$ **chem**$(T - x, {}^* P, u, v))$.
Sinon, comme $(T; P)$ n'est pas une exception, d'après lemme 2.4,
$(T - x, {}^* P)$ est une petite exception ou une exception $\mathcal{F}_i$ pour $i \in \{1, 2, 4, 6, 7, 12, 14\}$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est une petite exception, rendre **tablext**(T, P, x, y).
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_1$,
    Trouver I_X un chemin hamiltonien descendant de $X = N_T^-(x)$.
    Quitte à renommer, $y = 1$, rendre $(1, 2, 3, x, I_X)$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_2$,
    Trouver I_X un chemin hamiltonien descendant de X.
    Si $y = 3$, rendre $(3, 1, 2, 4, x, I_X)$.
    Sinon rendre $(4, 1, 2, 3, x, I_X)$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_4$,
    Trouver I_{X-3} un chemin hamiltonien descendant de $X - 3$.
    Si $y = 1$, rendre $(1, 3, x, 4, 2, I_{X-3})$.
    Si $y = 4$, rendre $(4, 3, x, 1, 2, I_{X-3})$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_6$,
    Trouver I_Y un chemin hamiltonien descendant de Y
    Trouver I_{X-2} un chemin hamiltonien descendant de $X - 2$.
    Si $y = 1$, rendre $(1, 2, x, 3, I_Y, I_{X-2})$.
    Sinon rendre $(3, 2, x, 1, I_Y, I_{X-2})$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_7$,
    Trouver O_Y un chemin hamiltonien ascendant de Y.
    Si $y = 2$, rendre $(2, 1, x, O_Y, 3)$.
    Sinon rendre $(3, 1, x, O_Y, 2)$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_{12}$,
    Trouver O_X un chemin hamiltonien ascendant de X.
    Si $y = 1$, rendre $(1, 2, x, 4, 3, O_X)$.
    Sinon rendre $(4, 2, x, 1, 3, O_X)$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_{14}$,
    Trouver O_X un chemin hamiltonien ascendant de X.
    Si $y = 1$, rendre $(1, 2, x, 6, 3, 4, 5, O_X)$.
    Sinon rendre $(6, 2, x, 1, 3, 4, 5, O_X)$.
Fin

Pour éviter toute ambiguité, dans la procédure suivante, les sous-tournois désignés par X et Y dans la figure 2.3 seront notés X' et Y'.

extension2(T, P, x, y)

Début
Soit S l'ensemble des sommets de T non départs de ${}^*P$ dans $T - x$.
Si $N_T^+(x) \not\subset S$,
  Soient u un sommets de $N_T^+(x) \setminus S$ et v un voisin externe de x distinct de u.
  Rendre $(x,$ **chem**$(T - x, {}^* P, u, v))$.
Sinon,
  Si $(T - x; {}^* P)$ est une petite exception, rendre **tablext**(T, P, x, y).
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_1$ duale,
    Si $N^+(x) = \{1, 2, 3\}$,
      Quitte à renommer, on peut supposer que $y = 1$.
      Trouver un chemin hamiltonien ascendant $O_{X'}$ de X'.
      Rendre $(1, 3, x, 2, O_X)$.
    Sinon quitte à renommer, $N^+(x) = \{1, 2\}$.
      Soit u un sommet de X'.
      Trouver un chemin hamiltonien ascendant $O_{X'-u}$ de $X' - u$.
      Si $y = 1$, rendre $(1, u, 3, x, 2, O_{X'-u})$.
      Si $y = 2$, rendre $(2, u, 3, x, 1, O_{X'-u})$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_2$ duale,
    Trouver un chemin hamiltonien ascendant $O_{X'}$ de X'.
    Si $y = 3$, rendre $(3, 2, 4, 1, O_{X'}, x)$.
    Si $y = 4$, rendre $(4, 2, 3, 1, O_{X'}, x)$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_3$ duale,
    Si $y = 1$, trouver un chemin hamiltonien ascendant $(u, 3, R_1)$ de X'.
      Rendre $(1, u, 2, x, 3, R_1)$.
    Si $y = 3$, trouver un chemin hamiltonien ascendant $(3, v, R_2)$ de X'.
      Rendre $(3, v, 1, 2, R_2, x)$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_4$ duale,
    Trouver un chemin hamiltonien ascendant $(3, v, R_2)$ de X'.
    Si $y = 1$, rendre $(1, v, 3, 2, x, 4, R_2)$.
    Si $y = 4$, rendre $(4, v, 3, 2, x, 1, R_2)$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_5$ duale,
    Si $y = 1$, trouver un chemin hamiltonien ascendant de X', $(2, Q, v)$.
      Trouver un chemin hamiltonien ascendant $O_{Y'}$ de Y'.
      Rendre $(1, v, O_{Y'}, x, 2, Q)$.
    Si $y = 2$, trouver un chemin hamiltonien ascendant $O_{Y'}$ de Y'.
      Trouver un sommet u de X' qui est dominé par 2.
      Trouver un chemin hamiltonien ascendant O de $X' - (u, 2)$.
      Rendre $(2, u, O_{Y'}, x, 1, O)$.
  Si $(T - x; {}^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_6$ duale,
    Si $|X'| \geq 2$, trouver un sommet u de X' qui est dominé par 2.

Trouver un chemin hamiltonien ascendant $O_{Y'}$ de Y'.
Trouver un chemin hamiltonien ascendant O de $X' - (u, 2)$.
Si $y = 1$, rendre $(1, u, 2, O_{Y'}, x, 3, O)$.
Si $y = 3$, rendre $(3, u, 2, O_{Y'}, x, 1, O)$.
Si $|X'| = 2$, alors $|Y| \geq 3$.
Soient u, v et w trois sommets de Y' tel que $u \leftarrow v \leftarrow w$.
Trouver un chemin hamiltonien ascendant O de $Y' - (u, v, w)$.
Si $y = 1$, rendre $(1, u, v, w, 2, x, 3, O)$.
Si $y = 3$, rendre $(3, u, v, w2, x, 1, O)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_7$ duale,
Soit u et v deux sommets de Y' tels que $u \leftarrow v$.
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{Y'-(u,v)}$ de $Y' - (u, v)$.
Si $y = 2$, rendre $(2, u, v, x, I_{Y'-(u,v)}, 3, 1)$.
Si $y = 3$, rendre $(3, u, v, x, I_{Y'-(u,v)}, 2, 1)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_8$ duale,
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'-y}$ de $X' - y$.
Rendre $(y, 1, I_{X'-y}, 2, 3, x)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}'_8$ duale,
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'-y}$ de $X' - y$.
Rendre $(y, 1, I_{X'-y}, 2, x, 3)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_9$ duale,
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'-y}$ de $X' - y$.
Rendre $(y, 1, I_{X'-y}, 2, 4, 3, 5, x)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}'_9$ duale,
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'-y}$ de $X' - y$.
Rendre $(y, 1, I_{X'-y}, 2, x, 4, 3, 5)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_{10}$ duale,
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'-y}$ de $X' - y$.
Rendre $(y, 1, I_{X'-y}, 2, 4, 3, 7, 5, 6, x)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}'_{10}$ duale,
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'-y}$ de $X' - y$.
Rendre $(y, 1, I_{X'-y}, 2, x, 4, 3, 7, 5, 6)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_{11}$ duale,
Soient u et v deux sommets de X' tels que $u \leftarrow v$.
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'-(u,v)}$ de $X' - (u, v)$.
Si $y = 1$, rendre $(1, 3, v, u, 2, x, I_{X'-(u,v)})$.
Si $y = 2$, rendre $(2, u, v, x, 3, I_{X'-(u,v)}, 1)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_{12}$ duale,
Soit u un sommet de X'.
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'-u}$ de $X' - u$.
Si $y = 1$, rendre $(1, u, 2, 3, x, I_{X'-u}, 4)$.

Si $y = 4$, rendre $(4, u, 2, 3, x, I_{X'-u}, 1)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_{13}$ duale,
Si $y = 1$, trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'}$ de X'.
Rendre $(1, 3, 4, 2, x, 5, I_{X'})$.
Si $y = 2$, soient u et v deux sommets de X' tels que $u \leftarrow v$.
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'-(u,v)}$ de $X' - (u, v)$.
Rendre $(2, u, v, x, 3, 4, 5, I_{X'-(u,v)}, 1)$.
Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{F}_{14}$ duale,
Trouver un chemin hamiltonien descendant $I_{X'}$ de X'.
Si $y = 1$, rendre $(1, 3, 4, 5, x, I_X, 6, 2)$.
Si $y = 6$, rendre $(6, 3, 4, 5, x, I_{X'}, 1, 2)$.
Fin

Les procédures tombexcep.

Quand on appelle la procédure **tombexcep1**, $b_1(P) \geq 2$, $N^+(x) = y$, $(T - y;^* P)$ est une exception mais $(T; P)$ n'en est pas une. On notera S l'ensemble des sommets non origine de $^*P$ dans $T - y$.

tombexcep1(T, P, x, y)
Début
Soit z un sommet de $N_T^+(y) \setminus S$.
Rendre $(y,$ **chem**$(T - y,^* P, z, x))$.
Fin

Quand on appelle la procédure **tombexcep2**, $b_1(P) = 1$, $N^+(x) = y$ et $d^+(y) = 1$, $|X| \geq b_2(P) + 1$ et $(T - (x, y);^{**} P)$ est une exception.

tombexcep2(T, P, x, y)
Début
Si $(T - (x, y);^{**} P)$ est une des exceptions $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_7$ ou $\mathcal{E}_{33}$ ou une de leurs duales,
Faire **table2**.
Sinon soit z le voisin externe de y.
Prenons u un sommets de $T - (x, y)$ distinct de z et origine de $^{**}P$.
Soit v un sommet de $T - (x, y, z, u)$.
Rendre $(x,\ y,$ **chem**$(T - (x, y),^{**} P, u, v))$.
Fin

Dans cette procédure, la procédure **table2** contient une table qui rend les chemins lorsque $(T - (x, y);^{**} P)$ est une des exceptions $\mathcal{E}_0$, $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_4$, $\mathcal{E}_7$ ou $\mathcal{E}_{33}$ ou une de leurs duales. Cette table est donnée dans la preuve du théorème 2.2.

Quand on appelle la procédure **tombexcep3**, $b_1(P) = 1$, $N^+(x) = y$ et $d^+(y) \geq 2$, $|X| \geq b_2(P) + 1$, $|Z| \geq b_2(P) + 1$ et $(T - y;^* P)$ est une exception. D'après la preuve du théorème 2.2, $(T - y;^* P)$ est l'exception duale de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$, $\mathcal{F}_4$, $\mathcal{F}_5$ ou $\mathcal{F}_6$. Dans la procédure suivante les sommets 1, 2, ... représenteront les sommets 1, 2, ... représentés figure 2.3 et pour éviter la confusion, les ensembles X' et Y' représenteront les ensembles notés X et Y figure 2.3.

tombexcep3(T, P, x, y)
Début
Si $(T - y;^* P)$ est la duale de $\mathcal{F}_1$,
  Si y a un voisin externe $u \in X'$,
    Trouver $O_{X'-u}$ un chemin hamiltonien ascendant de $X' - u$.
    Rendre $(y, u, 1, 3, 2, O_{X'-u})$.
  Si y a un voisin interne $u \notin X'$, disons 1 (quitte à renommer),
    Trouver $O_{X'-x}$ un chemin hamiltonien ascendant de $X' - x$.
    Rendre $(x, y, 1, 3, 2, O_{X'-x})$.
Si $(T - y;^* P)$ est la duale de $\mathcal{F}_2$,
  Si y a un voisin externe $u \notin \{3, 4\}$,
    Rendre $(y,$ **tablexcep**$(T - y,^* P, u))$.
  Sinon soit $u \in X' - x$. Trouver $O_{X'-(x,u)}$ un chemin hamiltonien ascendant de $X' - (x, u)$.
    Rendre $(x, y, u, 2, 1, 3, 4, O_{X'-(x,u)})$.
Si $(T - y;^* P)$ est la duale de $\mathcal{F}_3$,
  Si y a un voisin externe $u \notin \{1, 3\}$,
    Rendre $(y,$ **tablexcep**$(T - y,^* P, u))$.
  Sinon trouver $O_{X'-(x,3)}$ un chemin hamiltonien ascendant de $X' - (x, 3)$.
    Rendre $(x, y, 2, 3, 1, O_{X'-(x,3)})$.
Si $(T - y;^* P)$ est la duale de $\mathcal{F}_4$,
  Si y a un voisin externe $u \notin \{1, 4\}$,
    Rendre $(y,$ **tablexcep**$(T - y,^* P, u))$.
  Sinon soit $u \in X' - (x, 3)$.
    Trouver $O_{X'-(x,u,3)}$ un chemin hamiltonien ascendant de $X' - (x, u, 3)$.
    Rendre $(x, y, u, 2, 3, 4, 1, O_{X'-(x,u,3)})$.
Si $(T - y;^* P)$ est la duale de $\mathcal{F}_5$,
  Si y a un voisin externe $u \notin \{1, 2\}$,
    Rendre $(y,$ **tablexcep**$(T - y,^* P, u))$.
  Sinon trouver $O_{X'-(x,2)}$ et $O_{Y'}$ des chemins hamiltoniens ascendants de $X' - (x, 2)$ et Y'.
    Rendre $(x, y, O_{y'}, 2, 1, O_{X'-(x,2)})$.
Si $(T - y;^* P)$ est la duale de $\mathcal{F}_6$,
  Si y a un voisin externe $u \notin \{1, 3\}$,
    Rendre $(y,$ **tablexcep**$(T - y,^* P, u))$.
  Sinon soit $u \to v$ une arête de Y'.

Trouver $O_{X'-(x,2)}$ et $O_{Y'-(u,v)}$ des chemins hamiltoniens ascendants de $X' - (x, 2)$ et $Y' - (u, v)$.
Rendre $(x, y, u, v, 2, 1, 3, O_{Y'-(u,v)}, O_{X'-(x,2)})$.
Fin

Quand on appelle la procédure **tombexcep4**, $b_1(P) = 1$, $N^+(x) = y$ et $d^+(y) \geq 2$, $|X| \geq b_2(P) + 1$, $|Z| \leq b_2(P)$ et $(T - (x, y);^{**} P)$ est une exception avec $T - (x, y)$ réductible de décomposition $W \leftarrow Z$ et $^{**}P$ entrant. Il nous suffit donc d'après la (duale de la) remarque 2.3 de trouver un sommet $u \in W$ origine de $^{**}P$ dans $T - (x, y)$ et de rendre $(x$, y, **tablexcep**$(T - (x, y),^{**} P, u))$.

Quand on appelle la procédure **tombexcep5**, $b_1(P) = 1$, $N^+(x) = y$, $|X| \leq b_2(P)$ et $(T - y;^{*} P)$ et d'après la preuve du théorème 2.2, $y \to (T - (x, y)$. Ainsi, il nous suffit de trouver un sommet $u \in (T - (x, y)$ origine de $^{*}P$ dans $T - y$ et de rendre $(y$, **tablexcep**$(T - y,^{*} P, u))$.

Les procédures speciali.

Lorsque l'on appelle les procédures **speciali**, pour $1 \leq i \leq 4$, on a $b_1(P) = 1$, $d^+(x) \geq 2$, $|X| \leq b_2(P)$ et $(T; P)$ n'est pas une exception.

Avec la procédure **special1**, il nous faut trouver le chemin $P = +(1, n - 2)$.

special1(T, x, y)
Début
Soit z un sommet de $T - x$.
Trouver $I(z)$ un chemin hamiltonien descendant de $T - y$ d'origine z.
Rendre $(y, I(z))$.
Fin

Avec la procédure **special2**, il nous faut trouver le chemin $P = +(1, n - 3, 1)$.

special2(T, x, y)
Début
Soient $A^+ = X \cap (N^+(x) \setminus \{y\})$ et $A^- = X \cap N^-(x)$.
Si A^- n'est pas vide, prendre $v \in Y$.
Trouver I_{Y-y}, I_{A^+} et I_{A^-} des chemins hamiltoniens descendants de $Y - y$, A^+ et A^-.
Rendre $(y, I_{Y-v}, I_{A^+}, x, I_{A^-}, v)$.
Sinon A^- est vide.
Si $|A^+| \geq 2$, prendre $z \in A^+$.
Trouver I_Y et $I_{X-(y,z)}$ des chemins hamiltoniens descendants de Y et $X - (y, z)$.
Rendre $(y, I_Y, I_{X-(y,z)}, x, z)$.
Sinon A^+ est l'arête $z \to y$.

Soit P'= **petichem**$(Y,^{****} P)$.
Soit v le sommet de $Y - P'$.
Rendre (y, v, z, x, P').
Fin

Avec la procédure **special3**, il nous faut trouver le chemin $P = +(1, n-4, 2)$.

special3(T, x, y)
Début
Soit v un sommet de Y.
Trouver I_{Y-v} et I_{X-y} des chemins hamiltoniens descendants de $Y - v$ et $X - y$.
Rendre $(y, I_{Y-v}, I_{X-y}, v, x)$.
Fin

Avec la procédure **special4**, il nous faut trouver le chemin $P = +(1, n-4, 1, 1)$.

special4(T, x, y)
Début
Soient $A^+ = X \cap (N^+(x) \setminus \{y\})$ et $A^- = X \cap N^-(x)$.
Si A^- n'est pas vide,
Soient v et w deux sommets de Y tels que$v \to w$.
Trouver $I_{Y-(v,w)}$, I_{A^+} et I_{A^-} des chemins hamiltoniens descendants de $Y - (v, w)$, A^+ et A^-.
Rendre $(y, I_{Y-(v,w)}, I_{A^+}, x, I_{A^-}, w, v)$.
Sinon A^- est vide.
Si $|Y| \geq 4$,
Posons $P' = -(|Y| - 4, 1, 1)$ (ou $+(1, 1)$ si $|Y| = 4$).
Soit Q:=**petichem**(P', Y).
Soit v le sommet de $Y - Q$.
Trouver I_{X-y} un chemin hamiltonien descendant de $X - y$.
Rendre (y, v, I_{X-y}, x, Q).
Sinon $V(Y) = \{u, v, w\}$ avec $u \to v$.
Soit $z \in X - y$.
Trouver $I_{X-(y,z)}$ un chemin hamiltonien descendant de $X - (y, z)$.
Rendre $(y, w, I_{X-(y,z)}, x, u, v, z)$.
Fin

Lorsque l'on appelle les procédures **special5** et **special6**, on a $b_1(P) = 1$, $d^+(x) = d^+(y) = 1$, $|X| \geq b_2(P) + 1$ et $(T; P)$ n'est pas une exception.

Avec la procédure **special5**, il nous faut trouver le chemin $P = +(1, n-2)$.

special5(T, x, y)
Début

Soit z le voisin externe de y.
Soit w un voisin externe de z distinct de x.
Faire grandir (w, z) en un chemin hamiltonien descendant I de $T - (x, Y)$
en utilisant l'algorithme de Hell et Rosenfeld [18].
Rendre (x, y, I).
Fin

Avec la procédure **special6**, il nous faut trouver le chemin $P = +(1, 1, n-3)$.

special6(T, x, y)
Début
Soit z le voisin externe de y.
Soit w un voisin interne de z distinct de y.
Faire grandir (w, z) en un chemin hamiltonien ascendant O de $T - (x, Y)$
en utilisant l'algorithme de Hell et Rosenfeld [18].
Rendre (x, y, O).
Fin

Lorsque l'on appelle la procédure **special7**, $P = +(1, n-2)$ et y est un ingénérateur de $T - x$. Il nous faut donc donc trouver un chemin hamiltonien descendant I de $T - x$ d'origine y et de rendre (x, I).

5.2.3 Complexité de l'algorithme.

La procédure **hamilt** exécute les mêmes procédures élémentaires que **petichem**, ce qui se fait en $O(n^2)$. En plus de celles-ci, elle vérifie au plus une fois par appel de **chem** qu'un couple $(T; P)$ est une exception. Comme la reconnaissance d'une exception se fait en $O(n)$, au total cela fait $O(n^2)$.

Les procédures **extension** et **tombexcep**, soit font au plus $O(n)$ opérations et font de nouveau appel à la procédure **chem** avec un tournoi plus petit, soit trouvent un chemin hamiltonien direct dans un tournoi et rendent le chemin cherché. Avec l'algorithme de Hell et Rosenfeld [18], ceci se fait en $O(n \log n)$. Cependant, pour des commodités d'implémentation, on peut se contenter de l'algorithme simple en $O(n^2)$ qui mime la preuve du théorème de Rédei sans augmenter la complexité de la procédure **chem**.

Toutes les procédures **speciali**, pour $1 \leq i \leq 6$, trouvent des chemins hamiltoniens descendants dans des sous-tournois de T et rendent le chemin P recherché. Là aussi on peut choisir de le faire en $O(n^2)$ avec un algorithme simple ou en $O(n \log n)$.

Pour la procédure **special7** et **extension2** (quand $(T - x;^* P) = \mathcal{F}_4$), nous avons besoin de trouver un chemin hamiltonien descendant d'un tournoi qui a pour origine un sommet v. Ceci peut se faire par l'algorithme suivant en $O(n^2)$:

Début
Trouver la composante fortement connexe C de v dans T. Ceci se fait en $O(n^2)$.
Trouver un cycle hamiltonien direct de C et à partir de celui-ci trouver un chemin hamiltonien descendant I_C de C d'origine v. Ceci peut se faire en $O(n^2)$ en utilisant l'algorithme de Manoussakis [23].
Trouver un chemin hamiltonien descendant I' de $T - C$.
Rendre (I_C, I').
Fin

Ainsi, les procédures **chem** et **hamilt** s'effectue en $O(n^2)$ opérations.

Remarque 5.1 Si jamais on cherche des chemins dont les blocs sont de taille au plus k, on peut écrire un algorithme de complexité identique ($O(n^2)$) mais bien plus facile d'implémentation (voir Annexe B).

5.2.4 Chemin dont l'origine est donnée.

A partir des procédures ci-dessus, on peut écrire des procédures correspondant aux corollaires du théorème 2.2.

La procédure suivante correspond au corollaire 2.3.1. Prenant un tournoi 3-fortement connexe T d'ordre $n \geq 9$, un chemin P d'ordre n et un sommet x de T, elle rend un chemin P dans T d'origine x.

3con(T, P, x)
Début
Si P est entrant, faire **3con**$(T', -P, x)$.
Sinon p est sortant.
  Si $(T - x;^* P)$ est l'exception $\mathcal{E}_{49}$ ou $\mathcal{E}_{50}$,
    Trouver un sommet u de $N^+(x)$ origine de $^*P$ dans $(T - x)$.
    Rendre $(x$, **tablexcep**$(T - x,^* P, u))$.
  Sinon, soient u et v deux voisins externes de x.
    Rendre $(x$, **chem**$(T - x,^* P, u, v))$.
Fin

La procédure suivante correspond au corollaire 2.3.2. Prenant un tournoi 2-fortement connexe T d'ordre $n \geq 9$, un chemin sortant P d'ordre n et un sommet x de T, elle rend un chemin P ou $-P$ dans T d'origine x.

2con(T, P, x)
Début
Si $d^+(x) \geq 3$,
  Ecrire "P".

Si $(T-x;^* P)$ est une exception,
Trouver un voisn externe u de x origine de $^*P$ dans $T-x$.
Rendre $(x$, **tablexcep**$(T-x,^* P,u))$.
Sinon, soient u et v deux voisins externes de x.
Rendre $(x$, **chem**$(T-x,^* P,u,v))$.
Si $d^-(x)\geq 3$,
Ecrire "-P".
Si $(T-x;-^*P)$ est une exception,
Trouver un voisin interne u de x origine de $-^*P$ dans $T-x$.
Rendre $(x$, **tablexcep**$(T-x,-^*P,u))$.
Sinon, soient u et v deux voisins internes de x.
Rendre $(x$, **chem**$(T-x,-^*P,u,v))$.
Fin

Cette dernière procèdure correspond aussi au corollaire 2.3.4: prenant en entrée un tournoi T d'ordre $n\geq 9$, un chemin P d'ordre n tel que $b_1(P)=b_2(P)=1$ et un sommet x de T, elle rend un chemin P ou $-P$ dans T d'origine x.

Les procédures **3con** et **2con** se font clairement en $O(n^2)$.

5.3 Cycles hamiltoniens dans les tournois.

De même que pour les chemins, on peut traduire les théorèmes du chapitre 3 en terme d'algorithme. Comme les preuves de ces théorèmes utilisent les théorèmes sur les chemins hamiltoniens, les procédures pour trouver des cycles vont utiliser celles de la partie précédente.

5.3.1 Cycles hamiltoniens dans les tournois réductibles.

Il nous faut tout d'abord une procédure correspondant au lemme 3.1. Cette procédure prenant en entrée deux tournois T_1 et T_2 et un chemin P sortant tel que $A^+(P)\geq |T_1|$ rend un chemin P dans $T_1\rightarrow T_2$ avec son origine dans T_1 et sa fin dans T_2.

satur(T_1,T_2,P)
Début
Trouver le sous-chemin initial de P contenant $|T_1|$ arêtes positives et R le chemin $P-Q$.
Calculer les i_k et j_k tels que $(i_1,j_1,i_2-i_1,j_2-j_1,\ldots,i_r-\sum_{k=1}^{r-1}i_k)$ soit le type de Q.
Soit $Q_1=(a_1,\ldots,a_{i_r})$ un chemin hamiltonien ascendant de T_1.
Si $(T_2;R)$ n'est pas une exception de Grünbaum,
Trouver R dans T_2 par la procédure **hamilt** ou **petichem**.
Trouver $Q_2=(b_1,\ldots,b_l)$ un chemin hamiltonien descendant de T_2-R.

Rendre $(a_1,\ldots,a_{i_1},b_1,\ldots,b_{j_1},a_{i_1+1},\ldots a_{i_2},b_{j_1+1},\ldots b_{j_2},\ \ldots,a_{i_r},c_1,c_2,\ldots,c_m)$.
Sinon$(T_2;R)$ est une exception de Grünbaum,
Si $T_2=3A$,
Si $R=(1,1)$, écrire "exception $\mathcal{P}_1$".
Si $R=-(1,1)$,
Si $|T_1|=1$, écrire "exception $\mathcal{P}_2$".
Sinon rendre $(Q_1^*,1,2,a_k,3)$.
Si $T_2=5A$,
Si $R=(1,1,1,1)$,
Si $|T_1|=1$, écrire "exception $\mathcal{P}_3$".
Sinon rendre $(Q_1^*,1,2,3,a_k,5,4)$.
Si $R=-(1,1,1,1)$,
si $|T_1|=1$, écrire "exception $\mathcal{P}_4$".
Sinon rendre $(Q_1^*,1,2,a_k,5,3,4)$.
Si $T_2=7A$,
Si $R=(1,1,1,1,1,1)$,
Si $|T_1|=1$, écrire "exception $\mathcal{P}_5$".
Sinon rendre $(Q_1^*,1,2,3,a_k,7,5,6,4)$.
Si $R=-(1,1,1,1)$,
Si $|T_1|=1$, écrire "exception $\mathcal{P}_6$".
Sinon rendre $(Q_1^*,1,2,a_k,7,3,5,4,6)$.
Fin

Nous pouvons maintenant écrire une procédure **reduc** qui prenant un tournoi réductible T d'ordre n et un cycle non direct C d'ordre n rend une occurrence de C dans T.

reduc(T,C)
Début
Trouver une décomposition $T_1\to T_2$ de T.
Si $|T_1|>|T_2|$, faire **reduc**$(-T,-C)$
Sinon $|T_1|\le|T_2|$.
Trouver le sens $+$ dans lequel C a la plus d'arêtes.
Trouver un plus petit bloc B_1 dans le sens $+$.
Soit P le sous-chemin sortant d'ordre n de C dont B_1 est le premier bloc.
Si (T,P), n'est pas une exception $\mathcal{P}_i$,
Soit Q=**satur**(T_1,T_2,P) et a son origine.
Rendre (Q,a).
Sinon $(T;P)$ est une exception $\mathcal{P}_i$.
Si $(T;P)$ est l'exception $\mathcal{P}_1$,
Si $|T_1|=1$, écrire " exception $\mathcal{C}_7$".
Si T_1 est un 3-cycle, écrire " exception $\mathcal{C}_8$".
Sinon, soit Q=**hamilt**$(T_1,-(1,n-5))$.

Rendre $(3, Q, 1, 2, 3)$.
Si $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{P}_2$, écrire “ exception $\mathcal{C}_4$”.
Si $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{P}_2$, écrire “ exception $\mathcal{C}_4$”.
Si $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{P}_4$, écrire “ exception $\mathcal{C}_5$”.
Si $(T; P)$ est l'exception $\mathcal{P}_6$, écrire “ exception $\mathcal{C}_6$”.
Fin

Trouver les composantes fortement connexes d'un digraphe nécessite $O(n^2)$ opérations. L'algorithme est basé sur un parcours en profondeur. On peut donc trouver une décomposition de T en $O(n^2)$. On peut aussi le faire en utilisant l'algorithme de Manoussakis [23] qui rend un cycle hamiltonien direct si le tournoi est fortement connexe et la composante fortement connexe minimale sinon. La procédure **satur** se fait en $O(n^2)$ puisqu'à part l'appel aux procédures **hamilt** et **petichem**, elle cherche des chemins directs. Ainsi la procédure **reduc** se fait en $O(n^2)$.

5.3.2 Cycles ayant un long bloc.

De manière à présenter des algorithmes simples en évitant le traitement des cas particuliers lorsque dans les preuves des théorèmes 3.2 et 3.2, nous donnons ici des algorithmes qui fonctionnent pour des tournois de taille suffisamment grande.

La procédure **k+3bloc** trouve dans un tournoi $(= k)$-fortement connexe T d'ordre $n \geq \min(k + 10, 20)$, un cycle C non direct d'ordre n qui contient un bloc de longueur au moins $k + 3$.

Pour cela, nous avons besoin de la procédure **satur1**(T_1, T_2, P, v), correspondant au lemme 3.1. Prenant en entrée deux tournois T_1 et T_2, un outgénérateur v de T_1 et un chemin P sortant tel que $A^+(P) \geq |T_1|$, elle rend un chemin P dans $T_1 \to T_2$ d'origine v et de fin dans T_2. Cette procédure est quasiment identique à la procédure **satur**. Au lieu de prendre Q_1 un chemin hamiltonien ascendant quelconque de T_1, il nous faut prendre Q_1 d'origine v.

k+3bloc(T, C)
Début
Trouver un ensemble X de k sommets tel que $T - X$ est réductible de décomposition $T_1 \to T_2$.
Si $|T_1| > |T_2|$ faire **k+3bloc**$(-T, -C)$.
Sinon $|T_1| \leq |T_2|$.
Trouver un bloc $B = (a_0, \ldots a_l)$ de C de longueur au moins $k + 3$.
Noter + le sens de B et numéroter $C = (a_0, \ldots a_n)$.

Si $|T_1| \geq 2$,
Trouver un chemin hamiltonien ascendant $O = (x_1, \ldots, x_k)$ de X.
Trouver un ingénérateur u de $N^-(x_1) \cap T_2$.

Trouver un outgénérateur u de $N^+(x_k) \cap T_1$.
Soit $P = (a_{k+2}, \ldots, a_0)$.
Si $|T_1| - 1 \leq |A^+(P)|$.
Trouver $v \in T_1$ tel que v soit un outgénérateur de $T_1 - t$.
Rendre ($\mathbf{satur1}(T_1 - t, T_2 - u, P^*, v), t, u, O, v)$.
Sinon $|T_1| - 1 \leq |A^-(P)|$.
Soit b un outgénérateur de $T_1 - v$.
Soit Q le chemin inverse de $\mathbf{satur1}(T_1 - v, T_2 - u, (P^{-1})^*, b)$.
Rendre (v, Q, u, O, v).
Sinon $|T_1| = 1$, disons $T_1 = \{t\}$.
Trouver $Out(X)$ l'ensemble des outgénérateur de X.
Soit U l'ensemble des sommets de T_2 qui domine un sommet de $Out(X)$.
Si $|U| = 1$, disons $U = \{u\}$.
Faire la boucle précédente avec $T_1 := T(X, t)$, $T_2 := T_2 - u$ et $X := \{u\}$.
Sinon $|U| \geq 2$.
Soit $Q = (a_1, a_0, \ldots a_{k+3})$.
Si $(T_2; Q)$ n'est pas une exception $\mathcal{F}_i$.
Soit v et w deux sommets de U.
Soit u l'origine de Q'=$\mathbf{chem}(T_2, Q, v, w)$ et x un voisin externe de u dans $Out(X)$.
Trouver un chemin hamiltonien ascendant O de X d'origine x.
Rendre $(O, t, Q'^{-}1, x)$.
Sinon $(T_2; Q)$ n'est pas une exception $\mathcal{F}_i$.
Si dans U, il y a une origine u de Q dans T_2.
Soit x un voisin externe de u dans $Out(X)$.
Trouver un chemin hamiltonien ascendant O de X d'origine x.
Soit Q' le chemin $\mathbf{tablexcep}(T_2, Q, u)$.
Rendre (O, t, Q'^{-1}, x).
Sinon $(T_2; Q)$ est forcément une exception $\mathcal{F}_i$, pour $i \in \{3, 5, 7, 11, 13\}$.
Soit $Q_1 = (a_0, a_{n-1}, \ldots, a_{k+2})$.
Soient v et w les deux sommets de U.
Soit Q'_1 le chemin $\mathbf{chem}(T_2, Q'_1, v, w)$ et u son origine.
Soit x un voisin externe de u dans $Out(X)$.
Trouver un chemin hamiltonien ascendant O de X d'origine x.
Rendre $(O, t, {Q'}_1^{-1}, x)$.
Fin

La procédure **k+2bloc** trouve dans un tournoi $(= k)$-fortement connexe T d'ordre $n \geq \min(k+10, 20)$, un cycle C non direct d'ordre n qui contient un bloc de longueur $k+2$. Pour cela, nous avons besoin de la procédure $\mathbf{satur3}(T_1, T_2, P, v, U)$, correspondant au lemme 3.3. Prenant en entrée deux tournois T_1 et T_2, un outgénérateur v de T_1, un chemin

P sortant, et $U \subset T_2$ tels que $A^+(P) \geq |T_1| \geq 2$, P^-1 est sortant et $s^+_{T_2}(U) \geq b_1(P^{-1})+1$, elle rend un chemin P dans $T_1 \to T_2$ d'origine v et de fin dans U. Cette procédure est quasiment identique à la procédure **satur1**. Au lieu de prendre R quelconque dans T_2, il suffit de prendre R d'origine dans U.

k+2bloc(T, C)
Début
Trouver un ensemble X de k sommets tel que $T' = T - X$ soit réductible de décomposition $T_1 \to T_2$.
Trouver un bloc $B = (a_0, a_1, \ldots, a_{k+2})$ de longueur $k+2$.
Numéroter $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0)$.
Trouver $In(T')$ et $Out(T')$.
Si $|Out(T')| > |In(T')|$, faire **k+2bloc**$(-T, -C)$.
Sinon $|Out(T')| \leq |In(T')|$.
Posons $T_1 = Out(T')$ et $T_2 = T - T_1$.
Trouver un chemin hamiltonien ascendant O de X.
Soient x son origine et y sa fin.
Trouver un outgénérateur t de $T_1 \cap N^+(y)$.
Soient $U = T_2 \cap N^-(x)$ et $V = T_2 \cap N^+(x)$.
Trouver un ingénérateur u de U.
Soient $P = (a_{k+1}, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ et $Q = (a_k, \ldots, a_{n-1})$.

Si $|T_1| > 1$, trouver un cycle hamiltonien direct $C_1 = (t, t_2, \ldots, t_k, t)$ de T_1.
  Si $A^+(P) \geq |T_1|$, on $b_1(P^{-1}) < T_2$.
    Si $|U| \geq 2$,
      Si $s^+_{T_2}(U) \geq b_1(P^{-1}) + 1$,
        Trouver dans T' par **satur3** un chemin P d'origine t et de fin dans U.
        Rendre (O, P, x).
      Sinon,
        Si $|V| \geq 2$,
          Trouver dans T' par **satur3** un chemin Q d'origine t et de fin dans V.
          Rendre (O, Q, x).
        Sinon $|V| = 1$, disons $V = \{v\}$.
          Trouver dans $T' - v$ par **satur1** un chemin Q^* d'origine t et de fin dans $T_2 - v$.
          Rendre (O, Q^*, v, x).
    Sinon $|U| = 1$, disons $U = \{u\}$ et donc $|V| \geq 2$.
      Si $b_1(P^{-1}) \geq 2$,
        Trouver dans T' par **satur3** un chemin Q d'origine t et de fin dans V.
        Rendre (O, Q, x).
      Sinon $b_1(P^{-1}) = 1$.

Soit $B_1 = (a_{k+2}, \ldots, a_l)$ le bloc de C contenant l'arête $a_{k+2} \leftarrow a_{k+3}$.
Soit $S = (a_l, \ldots, a_{n-1})$.
Trouver par **petichem** un chemin B^* d'origine u dans T_2.
Si $(T' - (B^*, t, t_2); S)$ est une exception $\mathcal{P}_i$, faire **cas1**.
Sinon,
Trouver dans $T' - (B^*, t, t_2)$ par **satur1** un chemin S d'origine T_3 avec fin dans $T_2 - B^*$.
Rendre (O, t, t_2, B^*, S, x).
Sinon $A^+(P) < |T_1|$ et donc $A^-(P) \geq |T_1|$.
Si $x \rightarrow t_2$,
Trouver dans $T' - t$ par **satur1** un chemin $({}^*P)^{-1}$ d'origine t_2 et de fin dans T_2.
Rendre $(t_2, O, t,{}^* P)$.
Sinon $x \leftarrow t_2$.
Si $b_1(P^{-1}) \geq 2$,
Trouver dans $T' - t$ par **satur1** un chemin $(P^*)^{-1}$ d'origine t_2 et de fin dans T_2.
Rendre (O, t, P^*, x).
Sinon $b_1(P^{-1}) = 1$.
Soit $(a_l, a_{l+1}, \ldots, a_{n-1})$ le bloc de C contenant l'arête $a_{n-2} \rightarrow a_{n-1}$.
Soient R le chemin $(a_{l+1}, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ et S le chemin $(a_{k+2}, \ldots, a_l)$.
Si $|U| = 2$,
Trouver par **petichem** un chemin R de fin $u' \in U$.
Trouver dans $T' - (R, t)$ par **satur1** un chemin S^{-1} d'origine t_2 et de fin dans $T_2 - R$.
Rendre (u', O, t, S, R).
Sinon $U = \{u\}$.
Trouver R dans $T(V)$ par **hamilt**.
Si $(T' - (R, t, t_2); S^{-1})$ est une exception $\mathcal{P}_i$, faire **cas2**.
Sinon,
Trouver dans $T' - (R, t, t_2)$ par **satur1** un chemin S^{-1} d'origine t_2 et de fin dans $T_2 - R$.
Rendre (O, t, t_2, S, R, x).

Sinon $|T_1| = 1$, soit $T_1 = \{t\}$.
Si $|X| = 1$ et $U = \{u\}$, remplacer x par u, T_1 par $\{x\}$ et T_2 par $T(T_2 - u, t)$.
Désormais $|U| \geq 2$.
Si $s^+_{T_2}(U) \geq b_1(P^{-1})$,
Si $(T_2; ({}^*P)^{-1})$ n'est pas une exception $\mathcal{F}_i$,
Soit w un sommet de $T_2 - u$.
Trouver dans T_2 un chemin $({}^*P)^{-1}$ d'origine $z \in \{u, w\}$ par **chem**.
Rendre $(O, t,{}^* P, x)$.
Sinon $(T_2; ({}^*P)^{-1})$ est une exception $\mathcal{F}_i$.

Si il existe un sommet $u' \in U$ qui est origine de $({}^*P)^{-1}$ dans T_2.
Soit P_1 le chemin inverse de **tablexcep**$(T_2, ({}^*P)^{-1}, u')$.
Rendre(O, t, P_1, x).
Sinon dans T_2, il y a un chemin $(P^*)^{-1}$ d'origine $z \in U$.
Ce chemin est rendu par la fonction **chem**$(T_2, ({}^*P)^{-1}, z, v)$, où v est un sommet de $U - z$.
Rendre (O, t, P^*, x).
Sinon $s^+_{T_2}(U) < b_1(P^{-1})$.
Si $|V| \geq 2$,
Si $(T_2; (P^*)^{-1})$ est une exception $\mathcal{F}_i$.
Il existe un sommet $v \in V$ origine de $(P^*)^{-1}$ dans T_2.
Soit P_1 le chemin inverse de **tablexcep**$(T_2, (P^*)^{-1}, v)$.
Rendre (O, t, P_1, x).
Sinon, soit v un outgénérateur et w un ingénérateur de V.
Soit P_1 le chemin inverse de **chem**$(T_2, (P^*)^{-1}, v, w)$.
Rendre (O, t, P_1, x).
Sinon $|V| = 1$, disons $V = \{v\}$.
Soit $Q' = (a_{k+1}, \ldots, a_{n-2})$.
Trouver Q' dans $T_2(U)$ par **hamilt**.
Rendre (O, t, Q', v, x).
Fin

A partir de ces procédures, nous pouvons faire une procédure **deuxblocs** qui permet de trouver un cycle de deux blocs d'ordre n dans un tournoi d'ordre n.

deuxblocs(T, P)
Début
Trouver la forte connexité k de T.
Si T est réductible, faire **reduc**(T, C).
Sinon T est fortement connexe.
Si $|C|$ a un bloc de longueur au moins $k+3$, faire **k+3bloc**(T, P).
Si $|C|$ a un bloc de longueur $k+2$, faire **k+2bloc**(T, P).
Sinon $C = (k+1, k)$ ou $C = (k+1, k+1)$.
Si $C = (k+1, k)$,
Trouver un chemin $P = +(k, k)$ dans T par **hamilt**.
Soit x son origine.
Rendre (P, x).
Si $C = (k+1, k+1)$,
Trouver $(x_1, x_2, \ldots, x_{2k+2}, x_1)$ un cycle hamiltonien direct de T.
Si $x_1 \to x_{k+2}$,
Trouver i tel que $x_i \to x_{k+i+1}$ et $x_{i+1} \leftarrow x_{k+i+2}$.
Rendre $(x_i, x_{k+i+1}, x_{k+i}, \ldots, x_{i+2}, x_{i+1}, x_{k+i+2}, x_{k+i+3}, \ldots x_{i-1}, x_i)$.

Sinon $x_1 \leftarrow x_{k+2}$,
Trouver i tel que $x_i \leftarrow x_{k+i+1}$ et $x_{i+1} \rightarrow x_{k+i+2}$.
Rendre $(x_i, x_{k+i+1}, x_{k+i}, \ldots, x_{i+2}, x_{i+1}, x_{k+i+2}, x_{k+i+3}, \ldots x_{i-1}, x_i)$.
Fin

5.3.3 Cycles dans les tournois (=1)-fortement connexes.

Dans cette partie, nous allons donner un algorithme pour trouver un cycle hamiltonien C dans un tournoi d'ordre n. Cet algorithme est la traduction du théorème 3.4. De même que précédemment, afin de donner un algorithme plus simple, nous donnons un algorithme qui fonctionne pour $n \geq 13$.

Pour cet algorithme nous avons besoin de deux procédures **2bloc** et **cyclalt** correspondant aux théorèmes 3.5 et 3.6. Dans ces deux procédures, nous faisons appel à une sous-procédure **satur2**(T_1, T_2, P, v) qui correspond au lemme 3.2. Prenant en entrée deux tournois T_1 et T_2, un sommet v de T_1 et un chemin P sortant tels que $A^+(P) \geq |T_1|$ et $s^+_{T_1} \geq b_1(P)$, elle rend un chemin P dans $T_1 \rightarrow T_2$ d'origine v et de fin dans T_2. Cette procédure est quasiment identique à la procédure **satur**. Au lieu de prendre Q_1 un chemin hamiltonien ascendant quelconque de T_1 , il nous faut prendre un chemin ascendant Q'_1 d'ordre $b_1(P)$ et d'origine v et un chemin hamiltonien ascendant Q''_1 de $T_1 - Q'_1$.

La procédure **2bloc** prend entrée un tournoi T (=1)-fortement connexe d'ordre $n \geq 13$ et un cycle d'ordre n dont le plus long bloc est de longueur 2 et rend une occurrence de C dans T.

2bloc(T, C)
Début
Trouver x tel que $T' = T - x$ est réductible.
Trouver $Out(T')$ et $In(T')$.
Si $|Out(T')| < |In(T')|$, faire **2bloc**$(-T, -C)$.
Sinon $|Out(T')| \geq |In(T')|$.
Poser $T_2 = In(T_2)$ et $T_1 = T' - T_2$.
Soit $U = N^-(x) \cap T_2$.
Tant que $|T_2| \geq 3$ et $|U| = 1$, disons $U = \{u\}$.
Remplacer x par u, T_2 par $In(T_2 - u)$ et T_1 par $T - (u, In(T_2 - u))$.
Ainsi soit $|T_2| \geq 3$ et $|U| \geq 2$, soit $|T_2| = 1$.

Si $|T_2| \geq 3$ et $|U| \geq 2$,
Soit u et w deux sommets de U.
Si C contient un sous-chemin $+(2, 2)$ $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \leftarrow a_3 \leftarrow a_4$,
Numéroter $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0)$.
Trouver dans $T' - w$, par **satur2**, $P = (a_1, a_0, \ldots, a_4)$ d'origine u et de fin dans T_1.
Rendre (u, x, w, P^{-1}).

Si C contient un sous-chemin $+(2,1,1)$ $a_0 \to a_1 \to a_2 \leftarrow a_3 \to a_4 \leftarrow a_5$,
Numéroter $C = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_0)$.
Trouver un sommet $w' \in \{u, w\}$ qui domine un sommet t de $T_2 - (u, w)$.
Soit u' l'autre sommet de $\{u, w\}$.
Trouver dans $T' - (w', t)$, par **satur2**, $Q = (a_1, a_0, \dots, a_5)$ d'origine u' et de fin dans T_1.
Rendre (u', x, w', t, Q^{-1}).
Sinon $C = (2, 1, 2, 1, \dots, 1, 2, 1)$.
Posons $C = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_0)$ avec $a_0 \to a_1 \to a_2$.
Si $|T_2| = 3$, T_2 est le 3-cycle (u, u_1, u_2).
Si x est dominé par un sommet $v \in T_1$,
Trouver $P = (a_6, \dots, a_{n-1}, a_0)$ dans $T_1 - v$ par **hamilt**.
Rendre $(u, x, v, u_1, u_2, P, u)$.
Sinon $x \to T_1$.
Trouver $R = (a_6, \dots, a_{n-1})$ dans T_1 par **petichem**.
Soit $\{v_1, v_2\} = V(T_1 - R)$.
Rendre $(x, v_1, u_1, v_2, u_2, u, R, x)$.
Sinon $|T_2| \geq 4$.
Si w n'est pas origine d'un chemin ascendant de longueur 2 dans $T_2 - u$,
Permuter u et w.
Ainsi on trouve un chemin ascendant (w, t_1, t_2) dans $T_2 - u$.
Trouver dans $T' - (w, t_1, t_2)$, par **satur2**, $Q = (a_1, a_0, a_{n-1}, \dots, a_0)$ d'origine u et de fin dans T_1.
Rendre $(u, x, w, t_1, t_2, Q^{-1})$.

Sinon $T_2 = \{u\}$.
Soient $W = \{w \in T_1, w \to x\}$ et $V = \{v \in T_1, v \to x\}$.
Si $|W| \geq 2$.
Si C contient un sous-chemin $+(2,1,1)$ $a_0 \to a_1 \to a_2 \leftarrow a_3 \to a_4 \leftarrow a_5$,
ou si C contient un sous-chemin $+(2,2)$ $a_0 \to a_1 \to a_2 \leftarrow a_3 \leftarrow a_4$,
Posons $C = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_0)$ avec $a_0 \to a_1 \to a_2$.
Soit $P = (a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_0)$.
Trouver dans T_1 un chemin P d'origine dans W par **chem**.
Rendre (u, x, P, u).
Sinon $C = (2, 1, 2, 1, \dots, 2, 1)$.
Posons $C = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_0)$ avec $a_0 \to a_1 \to a_2$.
Si $s^+_{T_1}(W) \geq 3$,
Trouver dans T_1, par **chem**, $P = (a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, a_0)$ d'origine dans W.
Rendre (u, x, P, u).
Sinon $W = \{w_1, w_2\}$ et $W \to V$.
Trouver dans $T(V)$, $Q = (a_5, a_6, \dots, a_{n-1}, a_0)$ d'origine dans W par **hamilt**.
Rendre (w_1, u, w_2, x, Q, w_1).

Si $W = \{w\}$.
Posons $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ avec $a_0 \to a_1 \to a_2$.
Si $a_{n-2} \to a_{n-1}$,
Trouver dans $T(V)$, $P = (a_2, \ldots, a_{n-2})$ par **hamilt**.
Rendre (u, w, x, P, u).
Sinon $a_{n-2} \leftarrow a_{n-1}$,
Si un sommet $v \in V$ est dominé par w.
Trouver dans $T(V) - v$, $Q = (a_2, \ldots, a_{n-3})$ par **hamilt**.
Rendre (w, x, Q, u, v, w).
Sinon $V \to w$.
Si $a_4 \to a_3$,
Trouver dans $T(V)$, $R = (a_4, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ par **hamilt**.
Rendre (w, x, u, R, w).
Sinon $a_4 \leftarrow a_3$.
Trouver dans $T(V)$, $S = (a_4, \ldots, a_{n-3})$ par **petichem**.
Trouver (v_0, v_1, v_2) un chemin hamiltonien ascendant de $T(V) - S$.
Rendre $(v_0, v_1, v_2, x, Q, u, w, v_0)$.
Si $W = \emptyset$.
Posons $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ avec $a_0 \to a_1 \to a_2$.
Trouver dans T_1 un chemin $P = (a_3, \ldots, a_{n-1})$ par **hamilt**.
Rendre (x, w, u, P, x).
Fin

La procédure **cyclalt** prend entrée un tournoi T (=1)-fortement connexe d'ordre $n \geq 14$ pair et un cycle alterné hamiltonien de T.

cyclalt(T)
Début
Soit $C = (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_0)$ avec $a_0 \to a_1$ le cycle alterné d'ordre $|T|$.
Trouver x tel que $T' = T - x$ est réductible.
Trouver $Out(T')$ et $In(T')$.
Si $|Out(T')| < |In(T')|$, faire **2bloc**$(-T, -C)$.
Sinon $|Out(T')| \geq |In(T')|$.
Poser $T_2 = In(T')$ et $T_1 = T' - T_2$.
Soit $V = \{v \in T_1, x \to v\}$ et $W = \{w \in T_1, w \to x\}$.

Si $|T_2| \geq 4$,
Si x est dominé par deux sommets w_1 et w_2 de T_2.
Trouver dans $T' - w_2$, par **satur2**, $P = (a_1, \ldots, a_{n-2})$ d'origine w_1 et de fin dans T_1.
Rendre (x, P, u_2, x).
Sinon soient $y_1 \to y_2$ et $y_3 \to y_4$ deux arêtes de T_2 telles que y_1 et y_3 dominent x.
Trouver dans $T' - (y_1, y_3, y_4)$, par **satur2**, $Q = (a_3, \ldots, a_{n-2})$ d'origine y_2 et de fin

dans T_1.
Rendre $(y_3, x, y_1, Q, y_4, y_3)$.

Si $|T_2| = 3$, T_2 est le 3-cycle (u, u_1, u_2).
Si x est dominé par deux sommets v_1 et v_2 de T_1.
Trouver $P = (a_6, \dots, a_{n-2})$ dans $T_1 - (v_1, v_2)$ par **petichem**.
Soit v_3 l'unique sommet de $T_1 - (v_1, v_2, P)$.
Rendre $(x, v_2, u, v_3, u_1, P, u_2, v_1, x)$.
Sinon soient $v_2 \to v_1$ et $v_4 \to v_3$ deux arêtes disjointes de $T(V)$.
Trouver $Q = (a_6, \dots, a_{n-4})$ dans $T_1 - (v_1, v_2, v_3, v_4)$ par **petichem**.
Soit v_3 l'unique sommet de $T_1 - (v_1, v_2, v_3, v_4, Q)$.
Rendre $C = (x, v_3, v_4, u, v_5, u_1, Q, u_2, v_2, v_1, x)$.

Si $T_2 = \{u\}$,
Si W a au moins trois sommets w_1, w_2 et w_3,
Trouver dans $T_1 - w_3$, par **chem**, $P = (a_2, \dots, a_{n-2})$ d'origine w_1 ou w_2.
Rendre (x, P, u, w_3, x).
Sinon $|V| \geq 4$.
Soit $v_1 \to v_2$ et $v_3 \to v_4$ deux arêtes disjointes de $T(V)$.
Trouver dans $T_1 - (v_1, v_2)$, par **chem**, $Q = (a_1, \dots, a_{n-4})$ d'origine v_3 ou v_4.
Rendre (x, Q, u, v_1, v_2, x).
Fin

Les procédures **2bloc** et **cyclalt** nous permettent de faire une procédure **1forcon** qui prenant en entrée un tournoi (=1)-fortement connexe T d'ordre $n \geq 13$ et un cycle C d'ordre n rend une occurrence de C dans T.

1forcon(T, C)
Début
Si C est fortement connexe, trouver C par l'algorithme de Manoussakis [23].
Si C contient un bloc de longueur au moins 4, faire **k+3bloc**(T, C).
Si C contient un bloc de longueur 3, faire **k+2bloc**(T, C).
Si le bloc maximal de C est de longueur 2, faire **2bloc**(T, C).
Si C est alterné, faire **cyclalt**(T).
Fin

Cette procédure se fait clairement en $O(n^2)$ opérations. En effet, les procédures auxquelles elle fait appel, font essentiellement des tests puis un appel à une des procédures **chem**, **hamilt** ou **petichem** qui elles se font en $O(n^2)$.

Bibliographie

[1] N. Alon. Restricted colorings of graphs. In *Surveys in Combinatorics, 1993 (Keele), London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, volume 187, pages 1–33. Cambridge Univ. Press, 1993.

[2] N. Alon and M. Tarsi. Colorings and orientations of graphs. *Combinatorica*, 12(2):125–134, 1992.

[3] B. Alspach and M. Rosenfeld. Realisation of certain generalized paths in tournaments. *Discrete Math.*, 34:199 –202, 1981.

[4] E. Bampis, P. Hell, Y. Manoussakis, and M. Rosenfeld. Finding an antidirected hamiltonian path starting with a forward arc from a given vertex of a tournament. In *Combinatorics and computer science (Brest, 1995), Lectures Notes in Computer Science*, volume 1120, pages 67–73, Berlin, 1996. Sringer.

[5] J. Bang-Jensen and G. Gutin. Paths, trees and cycles in tournaments. *Congr. Numer.*, 115:131–170, 1996. Surveys in Graph Theory (San Francisco, CA, 1995).

[6] A. Benhocine and A. P. Wojda. On the existence of a specified cycle in a tournament. *J. Graph Theory*, 7:469–474, 1983.

[7] J. A. Bondy. Diconnected orientations and a conjecture of Las Vergnas. *J. London Math. Soc.*, 14(2):277–282, 1976.

[8] Stefan A. Burr. Subtrees of directed graphs and hypergraphs. In *Proceedings of the Eleventh Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Florida Atlantic Univ., Boca Raton, Fla., 1980), Vol. I*, volume 28, pages 227–239, 1980.

[9] P. Camion. Chemins et circuits hamiltoniens des graphes complets. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 249:2151–2152, 1959.

[10] D. Z. Du, D. F. Hsu, and F. K. Hwang. The Hamiltonian property of consecutive-d digraphs. *Math. Comput. Modelling*, 17(11):61–63, 1993. Graph-theoretic Models in Computer Science, II (Las Cruces, NM, 1988–1990).

[11] P. Erdös. Graph theory and probability. *Canad. J. Math.*, 11:34–38, 1959.

[12] H. Fleischner and M. Stiebitz. A solution to a colouring problem of P. Erdös. *Discrete Math.*, 101:39–48, 1992.

[13] R. Forcade. Parity of paths and circuits in tournaments. *Discrete Math.*, 6:115–118, 1973.

[14] T. Gallai. On directed paths and circuits. In *Theory of Graphs (Proc. Colloq., Tihany, 1966)*, pages 115–118. Academic Press, New York, 1968.

[15] B. Grünbaum. Antidirected hamiltonian paths in tournaments. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 11:249–257, 1971.

[16] R. Häggkvist and A. G. Thomason. Trees in tournaments. *Combinatorica*, 11:123–130, 1991.

[17] F. Havet and S. Thomassé. Oriented hamiltonian paths in tournaments: a proof of Rosenfeld's conjecture. soumis au J. Combinatorial Theory Ser. B, 1997.

[18] P. Hell and M. Rosenfeld. The complexity of finding generalized paths in tournaments. *J. Algorithms*, 4(4):303–309, 1983.

[19] X. Lu. On claws belonging to every tournament. *Combinatorica*, 11(2):173–179, 1991.

[20] X. Lu. Claws contained in all n-tournaments. *Discrete Math.*, 119(1-3):107–111, 1993. ARIDAM IV and V (New Brunswick, NJ, 1988/1989).

[21] X. Lu. On avoidable and unavoidable trees. *J. Graph Theory*, 22(4):335–346, 1996.

[22] X. Lu, D. Wang, and C. K. Wong. On avoidable and unavoidable claws. *Discrete Math.*, 184(1-3):259–265, 1998.

[23] Y. Manoussakis. A linear-time algorithm for finding Hamiltonian cycles in tournaments. *Discrete Appl. Math.*, 36(2):199–201, 1992.

[24] J. W. Moon. *Topics on Tournaments.* Holt, Rinehart and Winston, New York, 1968.

[25] C. Morrow and S. Goodman. An efficient algorithm for finding a longest cycle in a tournament. In *Proceedings of the Seventh Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1976)*, pages 453–462. Congressus Numerantium, No. XVII, Winnipeg, Man., 1976. Utilitas Math.

[26] V. Petrović. Antidirected hamiltonian cicuits in tournaments. In *Graph Theory (Novi Sad, 1983)*, pages 259–269. Univ. Novi Sad, Novi Sad, 1984.

[27] L. Rédei. Ein kombinatorischer satz. *Acta Litt. Szeged*, 7:39–43, 1934.

[28] M. Rosenfeld. Antidirected hamiltonian paths in tournaments. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 12:93–99, 1972.

[29] M. Rosenfeld. Antidirected hamiltonian cycles in tournaments. *J. Combinatorial Theory Ser. B*, 16:234–242, 1974.

[30] B. Roy. Nombre chromatique et plus longs chemins d'un graphe. *Rev. Française Informat. Recherche Opérationnelle.*, 1(5):129–132, 1967.

[31] M. Saks and V. T. Sós. On unavoidable subgraphs of tournaments. In *Finite and Infinite Sets, Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai*, volume 37, pages 663–674, Hungary, 1981. Eger.

[32] D. Soroker. *Fast Parallel Algorithms and Networks.* PhD thesis, Computer Science Division, University of California, Berkeley, 1987.

[33] D. Soroker. Fast parallel algorithms for finding hamiltonian paths and cycles in a tournament. *J. Algorithms*, 9(2):276–286, 1988.

[34] H. J. Straight. The existence of certain type of semi-walks in tournaments. In *PROC. XI Southeastern Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Congr. Numer.*, volume 29, pages 901–908, 1980.

[35] A. G. Thomason. Paths and cycles in tournaments. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 296:167–180, 1986.

[36] C. Thomassen. Antidirected hamiltonian cycles and paths in tournaments. *Math. Ann.*, 201:231–238, 1973.

[37] N. C. Wormald. Subtrees of large tournaments. In *Combinatorial Mathematics X (Adelaide, 1982), Lectures Notes in Mathematics*, volume 1036, pages 417–419. Springer, 1983.

Annexe A

Programme Scheme qui trouve un chemin d'ordre $n-1$ dans un tournoi d'ordre n.

```
;SOUS-PROCEDURES

;rend la longueur du premier bloc de $P$
(define (b1 P)
   (cadr P) )

;rend + si P est sortant, - sinon
(define (sgn P)
   (car P) )

;rend le chemin P prive de son premier sommet
(define (star P)
   (if (>= (b1 P) 2) (cons (car P) (cons (- (b1 P) 1) (cddr P) ) )
           (if (eq? (sgn P) '-) (cons '+ (cddr P))
                                (cons '- (cddr P))
))         )


;rend le dual d'un graphe
(define (dual T)
   (map (lambda (S) (list (car S) (caddr S) (cadr S)))  T) )
```

```scheme
;rend vrai si x appartient a la liste
(define (appartient? x liste)
   (cond
      ( (null? liste) #f)
      ( (eq? (car liste) x) #t)
      (else (appartient? x (cdr liste)) )
))


;rend l'ordre d'un tournoi
(define (ordre T)
   (cond
      ( (null? T) 0)
      (else (+ 1 (ordre (cdr T))) )
))


;rend le voisinage externe de x dans T
(define (voisext x T)
   (cond
      ( (null? T) "erreur3")
      ( (eq? x (caar T)) (cadar T) )
      (else (voisext x (cdr T)) )
))

;rend le voisinage interne de x dans T
(define (voisint x T)
   (cond
      ( (null? T) "erreur4")
      ( (eq? x (caar T)) (caddar T) )
      (else (voisint x (cdr T)) )
))



;rend vrai si x-> y dans T
(define (domine x y T)
   (cond
      ( (null? T) "erreur1")
      ( (eq? x (caar T)) (appartient? y (cadar T)) )
      (else (domine x y (cdr T)) )
```

```
))


;rend vrai si le degre externe de x dans T est >=2
(define (d+>=2 x T)
   (cond
      ( (null? T) "erreur2")
      ( (eq? x (caar T))
              (if (or (null? (cadar T)) (null? (cdr (cadar T)) ) )  #f
                              (list (car (cadar T)) (cadr (cadar T)) )
       )               )
      (else (d+>=2  x  (cdr T)) )
))


;rend le chemin hamiltonien sortant de S dans T
(define (direct+ S T)
   (cond
      ( (null? S) "erreur5")
      ( (null? (cdr S)) S)
      (else (allonge+ (car S) (direct+ (cdr S) T) T) )
))

(define (allonge+ x P T)
   (cond
      ( (null? P) (list x) )
      ( (domine x (car P) T) (cons x P) )
      (else  (cons (car P) (allonge+ x (cdr P) T) ) )
))


;rend le chemin hamiltonien entrant de S dans T
(define (direct- S T)
   (cond
      ( (null? S) "erreur6")
      ( (null? (cdr S)) S)
      (else (allonge- (car S) (direct- (cdr S) T) T) )
))

(define (allonge- x P T)
   (cond
```

```
      ( (null? P) (list x) )
      ( (domine (car P) x T) (cons x P) )
      (else  (cons (car P) (allonge- x (cdr P) T) ) )
))



;rend le graphe T-x
(define (otesom x T)
   (cond
      ( (null? T) T)
      ( (eq? (caar T) x) (otesom x (cdr T)) )
      (else (cons (list (caar T) (ote x (cadar T)) (ote x (caddar T)) )
                  (otesom x (cdr T) ) ))
))



;enleve la premiere occurence de x dans la liste l
(define (ote x l)
   (cond
      ( (null? l) l)
      ( (eq? x (car l)) (cdr l) )
      (else (cons (car l) (ote x (cdr l))) )
))


;rend la longueur d'une liste
(define (card l)
   (if (null? l) 0
                 (+ 1 (card (cdr l)))
))

;rend la liste des sommets d'un graphe
(define (listsom T)
   (if (null? T) T
       (cons (caar T) (listsom (cdr T)) )
))

;rend la liste des elements de l1 - l2
(define (-list l1 l2)
```

```
   (cond
      ((null? l1) l1)
      ((null? l2) l1)
      (else (ote (car l2) (-list l1 (cdr l2)) ) )
))



;CALCUL DU PARCOURS EN PROFONDEUR
(define (metdrap T)
   (map (lambda (S) (list (car S) 0 (cadr S)))  T) )


(define parcprof (lambda (x G A)
   (let* (( som (trouve x G) ) ( v (voisuiv (caddr som) G) ))
         (if (nonmarque? som)
               (if v (parcprof v (marque x G ) (ajpere v x A))
                     (let (( p (pere x A) ))
                          (if (null? p) (list G A)
                                        (parcprof p (marque x G) A )
               )     )    )
               (if v (parcprof v G (ajpere v x A))
                     (let (( p (pere x A) ))
                          (if (null? p) (list G A)
                                        (parcprof p G A)
               )     )    )
          )
)))



(define trouve (lambda (x G)
   (if (null? G) "erreur 0"
       (if (= x (caar G)) (car G)
                         (trouve x (cdr G))
))))


(define marque (lambda (x G)
   (if (null? G) "erreur 1"
       (if (= x (caar G)) (cons (list x 1 (caddar G)) (cdr G))
```

```
                          (cons (car G) (marque x (cdr G)) )
))))


(define nonmarque? (lambda (som)
    (= 0 (cadr som))
))


(define voisuiv (lambda (l G)
   (if (null? l) '()
       (if (nonmarque? (trouve (car l) G)) (car l)
                          (voisuiv (cdr l) G)
))))

(define ajpere (lambda (v x A)
   (cons (list v x) A) ))


(define pere (lambda (x A)
   (if (null? A) '()
       (if (= x (caar A)) (cadar A)
                          (pere x (cdr A))
))))


;FIN DU PARCOURS EN PROFONDEUR


;CALCUL DE LA SECTION FINALE D'UN SOMMET
;a partir du parcours en profondeur
(define (S+ x T)
   (normalise (aplati (cadr (parcprof x (metdrap T) '()) )))
)

(define (aplati l)
  (cond
     ( (null? l) l)
     ( (list? (car l)) (append (aplati (car l)) (aplati (cdr l)) ) )
     (else (cons (car l) (aplati (cdr l)) ) )
))
```

```
;enleve les repetitions dans une liste.
(define normalise (lambda (l)
   (if (null? l) l
       (cons (car l) (otetout (car l) (normalise (cdr l))) )
)))

;enleve toutes les occurences de x dans la liste l
(define (otetout x l)
   (cond
      ( (null? l) l)
      ( (eq? x (car l)) (otetout x (cdr l)) )
      (else (cons (car l) (otetout x (cdr l))) )
))


;FIN DU CALCUL DE LA SECTION FINALE

;rend la section initiale
(define (S- x T)
   (S+ x (dual T))
)


;rend le dernier element d'une liste non vide
(define (dernier l)
   (cond
      ( (null? l) "erreur6" )
      ( (null? (cdr l)) (car l) )
      (else (dernier (cdr l) ) )
))



;rend un outgenerateur de S dans T
(define (outgen S T)
   (cond
      ( (null? S) "erreur7")
      ( (null? (cdr S)) (car S))
      (else (let ((out (outgen (cdr S) T)) )
                (if (domine (car S) out T) (car S)
```

```
                                                    out)
)  )  )         )


;rend un ingenerateur de S dans T
(define (ingen S T)
   (cond
      ( (null? S) "erreur8")
      ( (null? (cdr S)) (car S))
      (else (let ((in (ingen (cdr S) T)) )
               (if (domine (car S) in T) in
                                                    (car S))
)  )  )      )



;rend un element de l different de x
(define (deuze l x)
   (cond
      ( (null? l) "erreur9" )
      ( (null? (cdr l)) "erreur10" )
      ( (eq? (car l) x) (cadr l) )
      (else (car l) )
))





;FONCTION PRINCIPALE
;TROUVE UN CHEMIN  P D'ORDRE N-1 DANS UN TOURNOI T D'ORDRE N


(define (n-1chem T P x y)

(cond
( (= (ordre T) 2) (list x) )
( (eq? (sgn P) '-) (n-1chem (dual T) (cons '+ (cdr P)) y x ) )
( (domine y x T) (n-1chem T P y x) )
( (= (ordre T) 3) (list x y) )
( (>= (b1 P) 2)
```

```
     (if (d+>=2 x T)
        (let* ( ( V (voisext x T) )   (z (outgen V T) ) (u (deuze V z)) )
              (cons x (n-1chem (otesom x T) (star P) z u ) )
        )
        (cons y (n-1chem (otesom y T) (star P) (outgen (voisext y T) T) x) )
     )  )
 (else
   (if (d+>=2 x T)
       (let* ( (V (voisext x T) ) (z (ingen V T))  (u (deuze V z))
               (S (S- z (otesom x T))) )
        (if (> (card S) (b1 (star P)) )
           (cons x (n-1chem (otesom x T) (star P) z u) )
           (let* ( (A (-list (listsom T) (cons x S)) ) (z1 (ingen A T))
                   (u1 (deuze A z1)) )
              (cons y (n-1chem (otesom y T) (star P) z1 u1) )
           )
       ) )
       (if (d+>=2 y T)
          (let* ( ( V (voisext y T) ) (z (ingen V T)) (u (deuze V z))
                  (T1 (otesom x (otesom y T))) (S (S- z T1)) )
           (if (> (card S) (b1 (star P)) )
              (cons y (n-1chem  (otesom y T) (star P) z u) )
              (let* ( (A (-list (listsom T1) S) )  (z1 (ingen A T)) )
                 (if (>= (card A) 2)
                   (cons x (cons y (n-1chem T1 (star (star P))
                                        z1 (deuze A z1)) ))
                   (cons x (cons y (cons z1 (cdr (direct- S T1)) )))
          ) )  )  )
          (let* ( (T1 (otesom x T) ) (V (voisint y T1) ) (x1 (outgen V T))
                  (y1 (ingen V T)) )
             (cons x (cons y (n-1chem (otesom y T1) (star (star P)) x1 y1) ) )
           )
  ) )  )

 ) )
```

Annexe B

Trouver un chemin hamiltonien dont les blocs sont de taille au plus k dans un tournoi.

Il n'y a pas d'exceptions au théorème 2.2 d'ordre supérieur à $k+7$ dont tous les blocs sont de taille au plus k. Ainsi avec une procédure **tablek**(T, P, x, y) qui pour $|T| \leq k+9$ rend le chemin P d'origine x ou y dans T (s'il existe), on peut construire la procédure **kchem**(T, P, x, y). Celle-ci prenant en entrée un tournoi T et un chemin P d'ordre n et deux sommets x et y tels que $s^+(x, y) \geq b_1(P)$ renvoie un chemin P dans T d'origine x ou y.

kchem(T, P, x, y)
Début
Si P est entrant, faire **kchem**$(T', -P, y, x)$.
Si $x \leftarrow y$, faire **kchem**(T, P, y, x).
Si $|T| \leq k+9$, faire **tablek**(T, P, x, y).

Si $b_1(P) \geq 2$,
  Si $d^+_T(x) \geq 2$,
    Trouver un outgénérateur z de $N^+_T(x)$.
    Soit $t \in N^+_T(x) - z$.
    Rendre $(x$, **kchem**$(T - x, {}^*P, z, t))$.
  Sinon $d^+_T(x) = 1$.
    Trouver un outgénérateur z de $N^+_T(y)$.
    Rendre $(y$, **kchem**$(T - y, {}^*P, z, x))$.

Sinon $b_1(P) = 1$.
  Si $d^+_T(x) \geq 2$,
    Si $s^-_{T-x}(N^+_T(x)) \geq b_1({}^*P) + 1$,

Trouver un ingénérateur z de $N_T^+(x)$.
Soit $t \in N_T^+(x)$, $t \neq z$. Rendre (x, **kchem**$(T - x,^* P, z, t)$).
Sinon $s^-_{t-x}(N_T^+(x)) \leq b_1(^*P)$ donc $d_T^+(y) \geq 2$ et $s^-_{T-y}(N_T^+(y)) \geq b_1(^*P) + 1$.
Trouver un ingénérateur z de $N_T^+(y)$.
Soit $t \in N_T^+(y)$, $t \neq z$. Rendre (y, **kchem**$(T - y,^* P, z, t)$).
Sinon $d_T^+(x) = 1$.
Si $d_T^+(y) < 2$,
Trouver un outgénérateur u de $N_T^-(y)$.
Trouver un ingénérateur v de $N_T^-(y)$.
Rendre (x, y, **kchem**$(T - (x, y),^{**} P, u, v)$).
Sinon $d_T^+(y) \geq 2$.
Si $s^-_{T-y}(N_T^+(y) \geq b_1(^*P) + 1$.
Trouver un ingénérateur z de $N_T^+(y)$.
Soit $t \in N_T^+(y)$, $t \neq z$. Rendre (y, **kchem**$(T - y,^* P, z, t)$).
Sinon $s^-_{T-y}(z) \leq b_1(^*P)$ donc $d^-_{T-x}(y) \geq 2$ et $s^-_{T-(x,y)}(N^-_{T-x}(y)) \geq b_1(^*P)$.
Trouver un ingénérateur z de $N^-_{T-x}(y)$.
Soit $t \in N_T^-(y)$, $t \neq z$. Rendre (x, y, **kchem**$(T - (x, y),^{**} P, z, t)$).

Fin

Index des définitions.