

Allocation de fréquences et coloration impropre des graphes hexagonaux pondérés

J.-C. Bermond^{1†} and F. Havet^{1†} and F. Huc^{1†} and C. Linhares-Sales^{1,2 ‡}

¹ projet Mascotte (I3S (CNRS & UNSA) & INRIA),
2004 route des lucioles, BP 93, 06902 Sophia-Antipolis Cedex, France

² Universidade Federal do Ceará, Departamento de Computação,
Bloco 910, Campus do Pici, Fortaleza, Ceará, CEP 60455-760, Brésil

Motivés par un problème d'allocation de fréquences, nous étudions la coloration impropre des graphes pondérés et plus particulièrement des graphes hexagonaux pondérés. Nous donnons des algorithmes d'approximation pour trouver de telles colorations.

Keywords: allocation de fréquences, coloration impropre, coloration pondérée

1 Introduction

Ce papier est motivé par un problème posé par Alcatel Space Technologies (voir [1]). Un satellite envoie des informations vers des récepteurs terrestres qui captent chacun plusieurs fréquences. Techniquement, il est impossible de concentrer un signal envoyé par le satellite sur le récepteur auquel il est destiné. Ainsi un signal est émis sur une zone autour du récepteur, créant ainsi du bruit pour les autres récepteurs situés dans cette zone. Chaque récepteur est capable de distinguer un signal qui lui est envoyé des bruits extérieurs qu'il reçoit si la somme de ces bruits n'est pas trop grande, c'est-à-dire si elle ne dépasse pas une certaine limite T . Le problème est d'allouer des fréquences aux récepteurs de manière à ce que chaque récepteur puisse capter ses signaux et les distinguer des bruits, tout en utilisant le moins de fréquences possibles.

Généralement, la "relation de bruit" est symétrique (si un récepteur u reçoit du bruit du récepteur v alors v reçoit du bruit de u). Ainsi les interférences peuvent être modélisées par un *graphe de bruit* dont les sommets sont les récepteurs et pour lequel deux sommets sont reliés si et seulement si les récepteurs correspondant interfèrent. De plus, le graphe est muni d'une *fonction de poids* $p : V \rightarrow \mathbb{N}$, où le poids $p(v)$ du sommet v est égal au nombre de signaux que le récepteur correspondant doit recevoir. Nous disposons ainsi d'un *graphe pondéré*, c'est-à-dire d'une paire (G, p) où G est un graphe et p une fonction de poids sur les sommets de G .

Dans une version simplifiée, l'intensité I du bruit créé est indépendante de la fréquence et du récepteur. Ainsi pour pouvoir distinguer son signal des bruits, un récepteur doit être dans la zone de bruit d'au plus $k = \lfloor T/I \rfloor$ récepteurs écoutant sur la même fréquence. Le problème revient donc à trouver une coloration du graphe (pondéré) de bruit qui soit *k-impropre*. Une *coloration* du graphe pondéré (G, p) est une fonction $C : V \rightarrow \mathcal{P}(S)$ telle que $|C(v)| \geq p(v)$, l'ensemble S étant l'ensemble de *couleurs* et $\mathcal{P}(S)$ l'ensemble des parties de S . Comme seule la cardinalité de S nous intéresse, on prend $S = \{1, 2, \dots, l\}$ pour un certain entier l . Une coloration de (G, p) avec un ensemble de couleurs de taille l est appelée *l-coloration*. Une coloration C de (G, p) est *k-impropre* si pour toute couleur i , l'ensemble des sommets ayant la couleur i induit un graphe de degré au plus k . En d'autres termes, tout sommet recevant une couleur i est adjacent à au plus k sommets recevant cette même couleur i . Le *nombre chromatique k-impropre* de (G, p) , noté $\chi_k(G, p)$, est le

[†]Recherche soutenue par le projet européen FET AEOLUS

[‡]Recherche soutenue par le CNPq (Brésil)

plus petit entier l tel que (G, p) ait une l -coloration k -impropre. Puisqu'on cherche à minimiser le nombre de fréquences, on cherche à trouver une coloration k -impropre de (G, p) ayant un nombre de couleurs aussi proche que possible de l'optimum $\chi_k(G, p)$.

Dans le problème posé par Alcatel, on découpe la zone en cellules hexagonales, une cellule étant adjacente aux 6 cellules voisines. Ainsi les récepteurs sont répartis comme les sommets du réseau triangulaire R qui peut être décrit comme suit. Les sommets sont les combinaisons linéaires $a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2$ des vecteurs $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ et $\mathbf{e}_2 = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$: ainsi on peut identifier les sommets avec les paires (a, b) d'entiers. Deux sommets sont adjacents si la distance euclidienne entre eux est au plus 1. Ainsi chaque sommet $x = (a, b)$ a six voisins : $(a - 1, b)$, $(a + 1, b)$, $(a - 1, b + 1)$, $(a, b + 1)$, $(a, b - 1)$ et $(a + 1, b - 1)$. Les graphes de bruit que nous considérons sont des sous-graphes induits du réseau triangulaire, appelés *graphes hexagonaux*. La Figure 1 donne une 5-coloration 1-impropre de R avec $p(v) = 2$ pour tout $v \in V(R)$.

Pour $k \geq 6$, le nombre chromatique k -impropre d'un graphe hexagonal est son *poide maximum* $p_{\max} = \max\{p(v) \mid v \in V(G)\}$ car son degré maximum est au plus 6. Ainsi nous étudions uniquement des impropretés inférieures à 6. Généralisant un résultat de McDiarmid et Reed [6] pour la coloration propre, Havet, Kang et Sereni [3, 7] ont montré que pour tout $0 \leq k \leq 5$, il est \mathcal{NP} -complet de décider si le nombre chromatique k -impropre d'un graphe hexagonal pondéré est 3 ou 4. Ainsi il n'existe pas d'algorithme polynomial pour trouver le nombre chromatique k -impropre d'un graphe hexagonal pondéré (à moins que $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$). On cherche donc des algorithmes α_k -approchés i.e. qui trouvent une coloration k -impropre de tout graphe hexagonal pondéré (G, p) avec au plus $\alpha_k \times \chi_k(G, p) + \beta_k$ couleurs, où α_k et β_k sont deux constantes.

McDiarmid and Reed [6] ont donné un algorithme 4/3-approché pour la coloration propre des graphes hexagonaux pondérés. Un algorithme distribué garantissant ce même rapport de 4/3 est donné par Narayanan et Schende [5]. Dans ce papier, pour $1 \leq k \leq 5$, nous proposons un algorithme linéaire α_k -approché pour la coloration k -impropre des graphes hexagonaux pondérés pour tout $1 \leq k \leq 5$, avec $\alpha_1 = \frac{25}{13}$, $\alpha_2 = \frac{12}{7}$, $\alpha_3 = \frac{18}{13}$, $\alpha_4 = \frac{80}{63}$ et $\alpha_5 = \frac{49}{43}$. La méthode proposée pouvant être appliquée à tous les graphes pondérés, nous la présentons dans un contexte général.

2 Les algorithmes

Soit q un entier. On note \mathbf{q} la fonction de poids constante égale à q . Une méthode naturelle pour trouver une coloration k -impropre de (G, p) consiste à trouver une coloration k -impropre de (G, \mathbf{q}) . Supposons que cette coloration utilise r couleurs, idéalement $r = \chi_k(G, \mathbf{q})$. On découpe ensuite les demandes en $\lceil \frac{p_{\max}}{q} \rceil$ paquets de telle sorte que dans aucun des paquets un sommets ait plus de q demandes; en utilisant r couleurs par paquets, on obtient une coloration en $r \times \lceil \frac{p_{\max}}{q} \rceil$ couleurs. Comme $\chi_k(G, p) \geq p_{\max}$, ceci nous donne un algorithme (r/q) approché.

Nous déterminons maintenant le nombre chromatique k -impropre ($1 \leq k \leq 5$) du réseau triangulaire avec poids constant qui est une borne supérieure du nombre chromatique k -impropre de tout graphe hexagonal.

Théorème 1 *Pour le réseau triangulaire R , nous avons:*

$$(i) \chi_1(R, \mathbf{q}) = \lceil \frac{5q}{2} \rceil, (ii) \chi_2(R, \mathbf{q}) = 2q, (iii) \chi_3(R, \mathbf{q}) = \lceil \frac{3q}{2} \rceil, (iv) \chi_4(R, \mathbf{q}) = \lceil \frac{4q}{3} \rceil \text{ et } (v) \chi_5(R, \mathbf{q}) = \lceil \frac{7q}{6} \rceil.$$

Preuve. Nous donnons seulement des colorations avec le nombre de couleurs requis qui sont utiles pour obtenir des algorithmes approchés. Pour la preuve des égalités, voir [2].

(i) Pour $1 \leq j \leq 5$, soit A_j l'ensemble des sommets obtenus à partir du sommet $(j, 0)$ en utilisant les combinaisons linéaires des vecteurs $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ et $5\mathbf{e}_1$. Pour $1 \leq j \leq 5$, attribuons les couleurs $\lceil \frac{(j-1)q}{2} \rceil + 1, \dots, \lceil \frac{jq}{2} \rceil$ aux sommets de $A_j \cup A_{j+1}$ (avec $A_6 = A_1$). Voir Figure 1 pour $q = 2$.

(ii) Colorons un sommet (a, b) avec $1, \dots, q$ si a est pair et avec $q + 1, \dots, 2q$ sinon.

(iii) Pour $1 \leq j \leq 3$, soit S_j l'ensemble des sommets obtenus à partir de $(0, j)$ en utilisant les combinaisons linéaires des vecteurs $\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ et $3\mathbf{e}_1$. Attribuons les couleurs $\lceil \frac{(j-1)q}{2} \rceil + 1, \dots, \lceil \frac{jq}{2} \rceil$ aux sommets qui ne sont pas dans S_j .

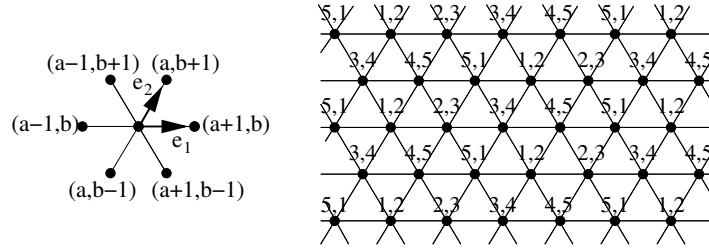


Fig. 1: Une coloration 1-impropre de $(R, 2)$

(iv) Pour $0 \leq j_1 \leq 1$ et $1 \leq j_2 \leq 2$, $T_{2j_1+j_2} = \{(a,b) \mid a \equiv j_1 \pmod{2} \text{ et } b \equiv j_2 \pmod{2}\}$. Attribuons les couleurs $\left\lceil \frac{(j-1)q}{3} \right\rceil + 1, \dots, \left\lceil \frac{jq}{3} \right\rceil$ aux sommets qui ne sont pas dans T_j .

(v) Pour $1 \leq j \leq 7$, soit U_j l'ensemble des sommets obtenus à partir du sommet $(j,0)$ en utilisant les combinaisons linéaires des vecteurs $2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ et $7\mathbf{e}_1$. Attribuons les couleurs $\left\lceil \frac{(j-1)q}{6} \right\rceil + 1, \dots, \left\lceil \frac{jq}{6} \right\rceil$ aux sommets qui ne sont pas dans U_j . \square

Ces colorations donnent donc des algorithmes 5/2-, 2-, 3/2-, 4/3- et 7/6-approchés pour la coloration 1-, 2-, 3-, 4- et 5-impropre respectivement des graphes hexagonaux pondérés. Nous pouvons cependant faire mieux : utilisant une coloration de (G, \mathbf{q}) en r couleurs, nous donnons un algorithme de coloration de (G, p) avec un rapport d'approximation meilleur que r/q . Pour cela, au lieu de ne considérer que p_{\max} , nous considérons également le nombre de couleurs imposé par un sommet et $k+1$ de ses voisins. Comme le montre la proposition suivante (voir la preuve dans [2]), celui-ci peut être supérieur à p_{\max} . Le graphe ayant un sommet u , appelé *centre*, adjacent à $k+1$ autres sommets, appelés *pointes*, est noté $K_{1,k+1}$.

Proposition 2 Pour toute fonction de poids p , $\chi_k(K_{1,k+1}, p) \geq \frac{1}{k+1} \sum_{v \in V(K_{1,k+1})} p(v)$.

On appelle $(k+1)$ -*étoile*, ou simplement *étoile*, un sous-graphe de G isomorphe à $K_{1,k+1}$. Le poids d'une étoile H est $p(H) = \sum_{v \in V(H)} p(v)$. On note $\theta_k(G, p) = \max\{p(H)/(k+1) \mid H \text{ étoile de } G\}$ et $\omega_k(G, p) = \max\{p_{\max}, \theta_k(G, p)\}$. D'après la proposition 2, $\omega_k(G, p) \leq \chi_k(G, p)$.

Théorème 3 Soient $\alpha_k(r, q) = \frac{(k+1)r^2}{(k+2)rq - q^2}$ et $\beta_k(r, q) = \max\{(k+2)r^2 - rq, (k+1)r^2 + krq\}$.

Etant donné une coloration C de (G, \mathbf{q}) avec r couleurs, il existe un algorithme polynomial qui colore (G, p) avec au plus $\alpha_k(r, q) \times \omega_k(G, p) + \beta_k(r, q)$ couleurs.

Preuve. Considérons l'algorithme suivant :

Algorithme 1 0. Initialisation: $(G^0, p^0) := (G, p)$, (S, s) est le graphe vide et $i = 0$.

1. On ajoute les sommets de petit poids au graphe S qui sera traité à la fin (Étape 3):
 $S^i := \{v \in V(G) \mid p^i(v) \leq \gamma_k(r, q) = \max\{(k+2)rq - q^2, (k+1)rq + kq^2\}, V(S) := V(S) + S^i$ et pour tout $v \in S^i$, $s(v) := p^i(v)$. $G^{i+1} := G^i - S^i$.

2. Si G^{i+1} n'est pas le graphe vide:

2.1. On donne à chaque sommet v de G^{i+1} un certain nombre $n^i(v)$ de couleurs parmi un ensemble de couleurs de taille $(k+1)r^2$ de manière à ce que $\omega_k(G^{i+1}, p^i - n^i) \leq \omega_k(G^i, p^i) - (k+2)rq + q^2$.

2.2. On pose $p^{i+1} := p^i - n^i$ et $i := i + 1$ et on retourne à l'étape 1.

3. On colore (S, s) avec β_k couleurs. On peut le faire en utilisant $r\gamma_k/q$ fois la coloration C car $s_{\max} \leq \gamma_k$.

A chaque étape 2, $(k+1)r^2$ couleurs sont utilisées et ω_k diminue d'au moins $(k+2)rq - q^2$. Par conséquent l'Algorithme 1 donne une coloration k -impropre de (G, p) avec au plus $\frac{(k+1)r^2}{(k+2)rq - q^2} \omega_k(G, p) + \max\{(k+2)r^2 - rq, (k+1)r^2 + krq\}$ couleurs.

Décrivons maintenant précisément l'étape 2.1. Posons $\omega_k = \omega_k(G^i, p^i)$. Une *grosse étoile* est une étoile H de G^{i+1} telle que $p^i(H) \geq (k+1)\omega_k - q^2$ et *gros sommet* un sommet tel que $p^i(v) > \omega_k - rq$. Un *petit sommet* est un sommet qui n'est pas gros. Il est *contraint* s'il est adjacent à un gros sommet et *libre* sinon.

Posons $a = (k+1)r - q$. A chaque étape 2.1, on utilise d'abord a fois la coloration C : avec ar couleurs, chaque sommet en reçoit aq . Ensuite on utilise rq couleurs supplémentaires de façon à ce que les gros sommets reçoivent rq couleurs et les sommets libres q^2 (utilisant q fois C sur les sommets libres). Ainsi $n^i(v) = (k+2)rq - q^2$ si v est gros, $n^i(v) = (k+1)rq$ si v est libre et $n^i(v) = (k+1)rq - q^2$ si v est contraint.

Vérifions maintenant que $\omega_k(G^{i+1}, p^{i+1}) \leq \omega_k - (k+2)rq + q^2$. On a $p_{\max}^{i+1} \leq \omega_k - (k+2)rq + q^2$: en effet, pour un sommet v , $p^{i+1}(v) \leq p^i(v) - n_i(v)$. Si v est gros $n^i(v) = (k+2)rq - q^2$ et si v est petit $n^i(v) \geq (k+1)rq - q^2$ et $p^i(v) \leq \omega_k - rq$. Dans les deux cas, $p^{i+1}(v) \leq \omega_k - (k+2)rq + q^2$.

Considérons une étoile H de G^{i+1} . Chaque sommet reçoit au moins qa couleurs. Donc si H n'est pas grosse, $p^{i+1}(H) \leq p^i(H) - (k+2)qa \leq (k+1)\omega_k - q^2 - (k+2)qa = (k+1)(\omega_k - (k+2)rq + q^2)$.

Supposons maintenant que H soit grosse. On peut montrer qu'un des sommets de H n'est pas contraint. Ce sommet reçoit donc au moins $qa + q^2$ couleurs. Ainsi

$$p^{i+1}(H) \leq p^i(H) - (k+2)qa - q^2 \leq (k+1)\omega_k - (k+2)qa - q^2 \leq (k+1)(\omega_k - (k+2)rq + q^2).$$

Donc $\theta_k(G^{i+1}, p^{i+1}) \leq \omega_k - (k+2)rq + q^2$. D'où $\omega_k(G^{i+1}, p^{i+1}) \leq \omega_k - (k+2)rq + q^2$.

L'algorithme 1 nécessite de calculer la valeur de $\omega_k(G, p)$. Comme il y a au plus $n \binom{\Delta}{k+1}$ étoiles à $k+1$ branches dans un graphe à n sommets de degré maximal Δ , ceci peut être fait en $O(n \binom{\Delta}{k+1})$ opérations. De plus, lorsque l'on passe d'une itération i à l'itération $i+1$ de l'algorithme, les gros sommets restent inchangés. Il n'est donc pas nécessaire de les recalculer et on peut assigner les couleurs de toutes les itérations simultanément. La complexité de l'algorithme est donc $O\left(n \binom{\Delta}{k+1}\right)$. Pour une classe de graphes de degré maximal borné, comme les graphes hexagonaux, l'algorithme est linéaire. \square

Les théorèmes 3 et 1 nous donnent un algorithme linéaire α_k -approché pour calculer la coloration k -impropre ($1 \leq k \leq 5$) d'un graphe hexagonal pondéré. Pour $k=1$ ou $k=5$ il est possible d'améliorer le facteur d'approximation en analysant plus précisément la répartition des gros sommets et des sommets contraints. Nous avons obtenus des algorithmes $\frac{20}{11}$ - et $\frac{49}{48}$ -approchés pour la coloration 1- et 5-impropre respectivement des graphes hexagonaux pondérés. Nous avons également des versions distribuées de chacun de ces algorithmes. Parmi les problèmes à considérer, on peut examiner d'autres topologies (nous avons des résultats similaires pour les sous-graphes de la grille infinie) et surtout d'autres modèles de bruit pour lesquels l'intensité dépend de la distance et/ou de la fréquence utilisée.

References

- [1] S. Alouf, E. Altman, J. Galtier, J.-F. Lalande, et C. Touati, Quasi-optimal bandwidth allocation for multi-spot MFTDMA satellites, in *Proc. IEEE INFOCOM 2005*, Miami, FL, 2005.
- [2] J-C Bermond, F. Havet, F. Huc, et C. Linhares, Improper Coloring of weighted graphs, 2007, <http://www-sop.inria.fr/sloop/personnel/Florian.Huc/Publications.html>
- [3] F. Havet, R. J. Kang et J.-S. Sereni, Improper colourings of unit disk graphs, *Electronic Notes in Discrete Mathematics* **22** (2005), 123–128.
- [4] F. Havet et J. Zerovnik. Finding a five bicolouring of a triangle-free subgraph of the triangular lattice. *Discrete Mathematics*, 244:103–108, 2002.
- [5] L. Narayanan et S. Schende, Static Frequency Assignment in Cellular Networks, In *Sirocco 97*, D. Krizanc et P. Wildmayer (eds.), Carleton Scientific 1997, pp. 215–227.
- [6] C. McDiarmid et B. Reed, Channel assignment and weighted coloring, *Networks* **36** (2000), 114–117.
- [7] J.-S. Sereni, *Coloration de graphes et applications*, PhD thesis, University of Nice-Sophia-Antipolis, July 2006