Puzzles combinatoires

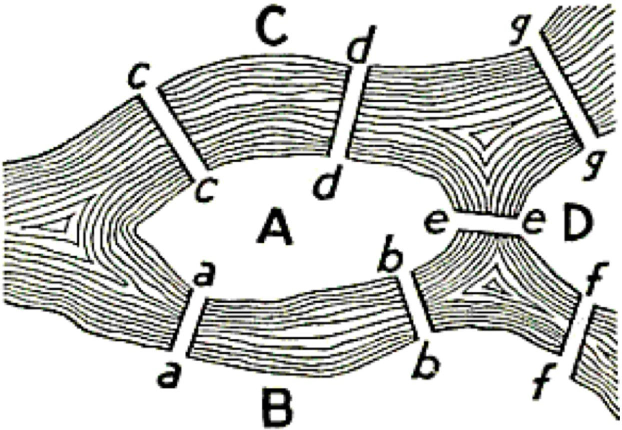
Frédéric Havet

MASCOTTE, commun I3S(CNRS/UNSA)-INRIA Sophia Antipolis

Fête de la science – 21-24 octobre 2010

Les Ponts de Königsberg

La rivière Pregel partage la ville de Königsberg en 4 quartiers. Les habitants se demandent s'il est possible de faire un tour par chaque pont une et une seule fois. A votre avis?

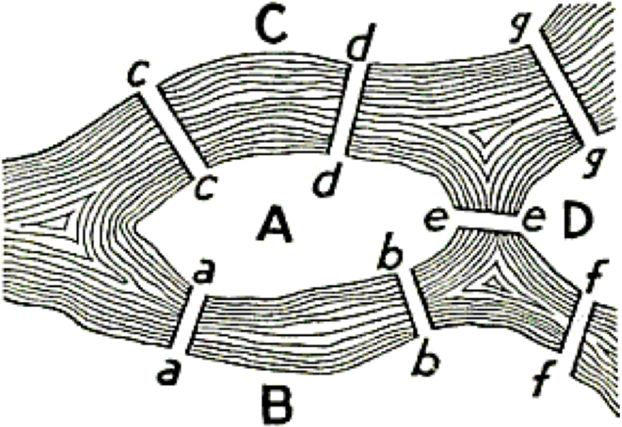


Les Ponts de Königsberg

La réponse est NON!

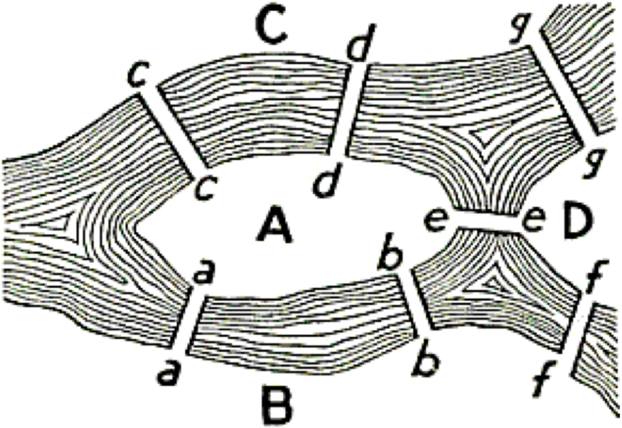
Si un tel tour existait, chaque quartier devrait être relié à un nombre pair de ponts.

Un pont pour arriver et un pour repartir à chaque fois qu'on passe par un quartier.



Les Ponts de Königsberg

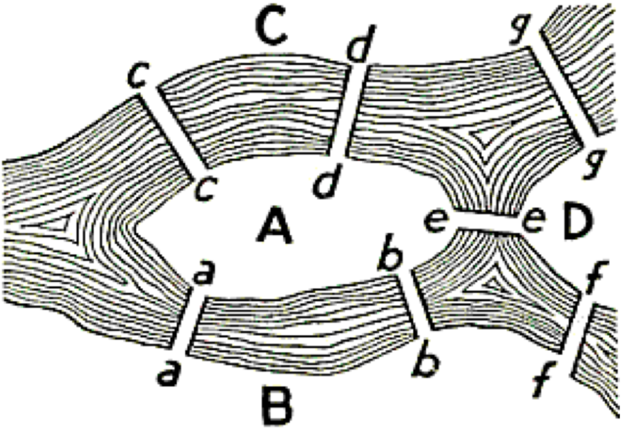
Et si on veut faire une balade (le départ et l'arrivée ne sont pas le même quartier) par chaque pont une et une seule fois?



Les Ponts de Königsberg

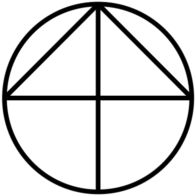
La réponse est encore NON!

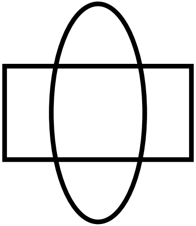
Si une telle balade existait, tous les quartiers sauf deux (le départ et l'arrivée) devrait être relié à un nombre pair de ponts: un pont pour arriver et un pour repartir à chaque fois qu'on passe par un quartier.

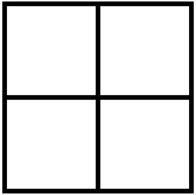


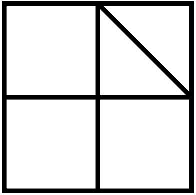
Dessiner sans lever la main

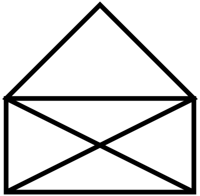
Pouvez vous dessiner chacune des figures ci-dessous sans lever le crayon et en ne passant qu'une seule fois sur chaque trait.





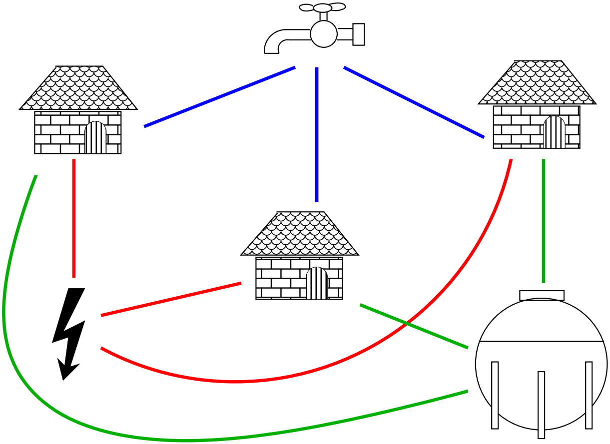






Le problème Gaz-Eau-Electricité

Peut-on relier trois maison à l'eau, le gaz et l'électricité sans que les canalisations se croisent ?



Formule d'Euler

Euler: graphe planaire (connexe), $|S| + |F| = |A| + 2$

$|S|$: nb de sommets $|A|$: nb d'arêtes $|F|$: nb de faces.

Une arête est dans deux faces. Ainsi $\sum_{f \in F} d(f) = 2|A|$.

Une face a au moins 3 arêtes donc $\sum_{f \in F} d(f) \geq 3|F|$.

Donc $2|A| \geq 3|F|$, soit $|F| \leq \frac{2}{3}|A|$.

D'où $|A| \leq |S| + \frac{2}{3}|A| - 2$, soit $\frac{1}{3}|A| \leq |S| - 2$ i.e. $|A| \leq 3|S| - 6$.

Réponse problème Gaz-Eau-Electricité

Dans notre graphe, les faces seraient de taille au moins 4.

Reprenons le calcul: $\sum_{f \in F} d(f) \geq 4|F|$.

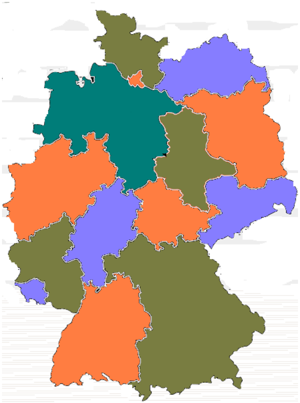
Il vient $2|A| \geq 4|F|$, soit $|F| \leq \frac{1}{2}|A|$.

D'où $|A| \leq |S| + \frac{1}{2}|A| - 2$, soit $\frac{1}{2}|A| \leq |S| - 2$ i.e. $|A| \leq 2|S| - 4$.

Or le graphe à réaliser à 6 sommets et 9 arêtes. Il ne peut pas être planaire.

Colorer une carte

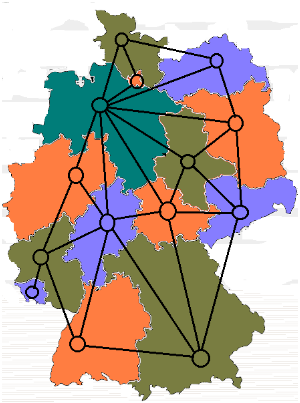
1852 Francis Guthrie: Peut-on colorer les régions (connexes) d'une carte avec 4 couleurs de manière à ce que deux régions voisines (ayant une frontière en commun) aient des couleurs différentes.



Colorer un graphe planaire

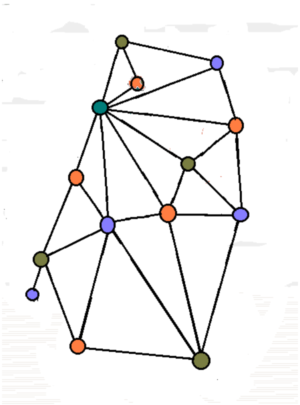
Un sommet dans chaque région.
Deux sommets reliés si les régions sont voisines.

On obtient un graphe planaire.



Colorer un graphe planaire

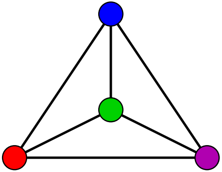
Colorer les régions = colorer le graphe planaire.
Donner des couleurs aux sommets tels que deux sommets adjacents aient des couleurs différentes.



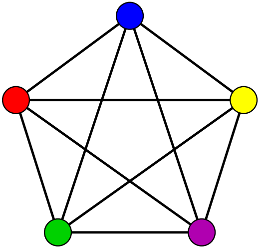
Colorer un graphe planaire

Guthrie: Peut-on colorer n'importe quel graphe planaire avec 4 couleurs?

4 couleurs nécessaires pour certains graphes.



Graphe complet à 5 sommets n'est pas planaire.
Nb d'arêtes: $(5 \times 4)/2 = 10 > 9 = 3 \times 5 - 6$



Colorer un graphe planaire avec 6 couleurs

$|A| \leq 3|S| - 6$ et $\sum_{v \in S} d(v) = 2|A|$.

Donc $\displaystyle\sum_{v \in S} d(v) \leq 6|A| - 12 < 6|A|$.

Il existe v tel que $d(v) < 6$, soit $d(v) \leq 5$.

Ordre $(v_1, \ldots, v_n)$ des sommets t.q. v_i a au plus 5 voisins dans $\{v_1, \ldots, v_{i-1}\}$.

En colorant suivant cet ordre, on utilise au plus 6 couleurs.

Théorème des 4 couleurs

Alfred Kempe en 1879 et Peter Guthrie Tait en 1880 donne une preuve. Des erreurs sont trouvées par Percy Heawood (1890) et Julius Petersen (1891).

1976: Preuve par Appel et Haken. Réduction à un 1478 graphes critiques. Utilisation de l' ordinateur pour résoudre ces cas. Problème pour la validation:

- Vérification de l'algorithme.
- Vérification de l'implémentation.

1995: Nouvelle preuve par Robertson, Sanders, Seymour et Thomas. Réduction à 633 cas.

Le preuve donne un algorithme en $O(n^2)$ pour colorer un graphe planaire.

Colorer un graphe planaire avec 3 couleurs

Quel est le temps d'exécution (au pire) le meilleur pour un algorithme pour résolvant le problème suivant:

Entrée: un graphe G (planaire).
Question: peut-on colorer G avec 3 couleurs?

Il y a 3^n colorations (non forcément propres) donc on peut le faire en $O^*(3^n)$.

Conjecture: C'est impossible en temps polynomial.

C'est $P \neq NP$, une des conjectures du millénaire.
1 million de dollars est offert pour qui la montre ou la réfute.

Le même problème avec 2 couleurs se fait facilement en temps polynomial.

(Δ, D)-Problème

Construire un réseau

- de degré au plus Δ
- de distance entre sommets au plus D

Objectif $=$ maximiser le nombre de sommets

Diamètre $D = 1 \rightarrow$ Graphe Complet

Degré $\Delta = 2 \rightarrow$ Cycle, Anneau

Le problème du *Monde*

Réseau routier

Dans une petite île, chaque route joint en ligne droite deux des villes. Le réseau routier a été construit de telle sorte que :

- De chaque ville partent au plus trois routes.
- On peut toujours aller d'une ville à l'autre soit par une route directement, soit en passant au plus par une ville intermédiaire.

Le nombre de villes de l'île peut-il être 5 ? 6 ? 7 ? Combien y a-t-il, au plus, de villes dans cette île ?

Elisabeth Busser et Gilles Cohen Solution dans *Le Monde* du 4 octobre.

AFFAIRE DE LOGIQU

Réseau routier

DANS une petite île, chaque route joint en ligne droite deux des villes.

Le réseau routier a été construit de telle sorte que :

– De chaque ville partent au plus trois routes.

– On peut toujours aller d'une ville à l'autre soit par une route directe, soit en passant au plus par une ville intermédiaire.

Le nombre de villes de l'île peut-il être 5 ? 6 ? 7 ?

Combien y a-t-il, au plus, de villes dans cette île ?

Elisabeth Busser
et Gilles Cohen
© POLE 2005

Solution dans *Le Monde* du 4 octobre.

LE MONDE

Le problème du *Monde*

Réseau routier

UE N° 449

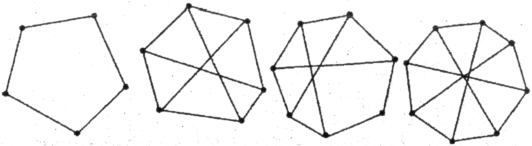
Solution du jeu n° 448 paru dans *Le Monde* du 27 septembre.

Il y a au plus 8 villes dans l'île.

Voici des solutions à 5 villes, à 6 villes, à 7 villes, à 8 villes.

– Avec 9 villes, il ne peut pas se faire que des 9 villes partent 3 routes. En effet, on parviendrait à 27 extrémités de routes (nombre impair), alors que chaque route compte 2 extrémités.

Il existe donc une ville, soit A, dont ne partent que 2 routes. A est reliée directement à B et C, de B et C partent au plus 2 routes menant au plus à D, E, F et G, ce qui fait au total au plus 6 villes reliées directement ou via une étape à A. Il ne peut y en avoir 8.



Le problème du *Monde*

Le graphe de Petersen