Gentille introduction aux probabilités

Frédéric Havet

MASCOTTE, commun I3S(CNRS/UNSA)-INRIA Sophia Antipolis

Café des Science – Rians – 14 février 2012

Probabilités (discrètes)

espace de probabilités: $(\Omega, \mathbf{Pr})$

Ω est un ensemble fini, ensemble des possibles

$\mathbf{Pr} : \Omega \to [0,1]$ fonction de probabilité t. q. $\sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{Pr}(\omega) = 1$.

Exemple: Lancer de dé.

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ avec ω_i = le dé marque i.

Plusieurs fonctions de probabilité possibles:

- **dé équilibré**: $\mathbf{Pr}_1(\omega_i) = \frac{1}{6}$ pour tout i. distribution uniforme
- **dé pipé**: $\mathbf{Pr}_2(\omega_6) = \frac{1}{4}$, $\mathbf{Pr}_2(\omega_1) = \frac{1}{12}$, $\mathbf{Pr}_2(\omega_i) = \frac{1}{6}$ pour $i = 2, 3, 4, 5$.

Evénement

événement: sous-ensemble A de Ω. $\quad \mathbf{Pr}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbf{Pr}(\omega)$.

Exemple: $A =$ "le dé marque au moins 4".

$$\mathbf{Pr}(A) = \mathbf{Pr}(\omega_4) + \mathbf{Pr}(\omega_5) + \mathbf{Pr}(\omega_6)$$

- **dé équilibré**: $\mathbf{Pr}_1(A) = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2 = 0,5$.
- **dé pipé**: $\mathbf{Pr}_2(A) = 1/6 + 1/6 + 1/4 = 7/12 = 0.58333\ldots$.

Probabilités conditionnelles et indépendance

probabilité (conditionnelle) de A sachant B: $\mathbf{Pr}(A|B) = \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)}$
(si $\mathbf{Pr}(B) = 0$ alors $\mathbf{Pr}(A|B) = \mathbf{Pr}(A)$).

A est indépendant de B si $\mathbf{Pr}(A|B) = \mathbf{Pr}(A)$
i.e. $\mathbf{Pr}(A \cap B) = \mathbf{Pr}(A)\,\mathbf{Pr}(B)$.

L'indépendance n'est pas un état de choses.

Vaclav Havel

Probabilités conditionnelles et indépendance

Le plus souvent $\mathbf{Pr}(A|B) > \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)}$ ou $\mathbf{Pr}(A|B) < \frac{\mathbf{Pr}(A \cap B)}{\mathbf{Pr}(B)}$.

Bob achète une voiture au hasard.

Sachant que 20% des voitures sont grises, il se dit que la probabilité qu'elle soit grise est 0,2.

- Le vendeur lui dit que c'est une Ferrari. Comme 5% des Ferraris sont grises, la probabilité qu'elle soit grise est 0,05.
- Le vendeur lui dit que c'est un break. Comme 60% des breaks sont gris, la probabilité qu'elle soit grise est 0,6.

Probabilités conditionnelles

Supposons que l'on tire k fois de suite à *pile* ou *face* avec une pièce qui retombe sur *pile* avec probabilité $1/2$ et sur *face* avec probabilité $1/2$.

Quelle est la probabilité qu'au dernier jet la pièce donne *pile*?

Quelle est la probabilité qu'au dernier jet la pièce donne *pile*, sachant qu'elle vient de tomber $k-1$ fois sur *face*?

Probabilités conditionnelles

Quelle est la probabilité qu'au dernier jet la pièce donne *pile*?

PPPP, PPPF, PPFP, PPFF, PFPP, PFPF, PFFP, PFFF, FPPP, FPPF, FPFP, FPFF, FFPP, FFPF, FFFP, FFFF.

$$\mathbf{Pr} = 2^{k-1}/2^k = 1/2$$

Quelle est la probabilité qu'au dernier jet la pièce donne *pile*, sachant qu'elle vient de tomber $k-1$ fois sur *face*?
PPPP, PPPF

$$\mathbf{Pr} = 1/2$$

Jeu des trois portes

Dans une émission télé, un joueur a le choix entre trois portes.
Derrière l' une, le gros lot. Derrière les deux autres, rien.
Il gagnera ce qui se cache derrière la porte de son choix. Le présentateur sait ce qu'il y a derrière les portes mais ne dira rien.

- Le candidat choisit une porte.
- Le présentateur ouvre une des deux autres, derrière laquelle ne se trouve rien.
- Le présentateur propose au candidat de changer son choix.

Que doit-faire le candidat ?

Jeu des trois portes

Deux possibilités :

Cas 1 le candidat choisit la bonne porte; le présentateur ouvre n'importe quelle autre porte; si le candidat change il perd, s'il ne change pas il gagne.

Cas 2 le candidat choisit une mauvaise porte; le présentateur ouvre l'autre mauvaise porte; si le candidat change il gagne, s'il ne change pas il perd.

Dans premier cas il ne faut pas changer, dans le deuxième il le faut.

Jeu des trois portes

Deux possibilités :

Cas 1 le candidat choisit la bonne porte; le présentateur ouvre n'importe quelle autre porte; si le candidat change il perd, s'il ne change pas il gagne.

Cas 2 le candidat choisit une mauvaise porte; le présentateur ouvre l'autre mauvaise porte; si le candidat change il gagne, s'il ne change pas il perd.

Dans premier cas il ne faut pas changer, dans le deuxième il le faut.

Mais pas équiprobables : $\mathbf{Pr}(\text{Cas } 1) = 1/3$ et $\mathbf{Pr}(\text{Cas } 2) = 2/3$.

Il vaut donc mieux changer.

Hasard, vous avez dit "Hasard"....

Est-ce vraiment un hasard ?

“Paradoxe” des anniversaires

Combien de personnes doit-on réunir dans une pièce pour que deux d’entre elles au moins aient la même date de naissance ?

(pas d’année bissextile, les dates sont équiprobables)

“Paradoxe” des anniversaires

Combien de personnes doit-on réunir dans une pièce pour que deux d’entre elles au moins aient la même date de naissance ?

(pas d’année bissextile, les dates sont équiprobables)

Principe des tiroirs: **366 personnes**

Si 365 personnes, elles peuvent avoir des dates différentes.

MAIS: Cas au pire.

Très peu probable d’avoir 365 personnes, toutes de dates différentes. 1 chance sur $365 \times 364 \times \cdots \times 1 = 2,5 \times 10^{79}$.

“Paradoxe” des anniversaires

*Combien de personnes doit-on réunir dans une pièce pour qu'***avec probabilité au moins 1/2** *deux d'entre elles au moins aient la même date de naissance ?*

(pas d'année bissextile, les dates sont équiprobables)

“Paradoxe” des anniversaires

*Combien de personnes doit-on réunir dans une pièce pour qu'***avec probabilité au moins 1/2** *deux d'entre elles au moins aient la même date de naissance ?*

(pas d'année bissextile, les dates sont équiprobables)

D_k: événement que k personnes aient toutes des dates différentes.

$k = 1$: Abel seul, pas de coincidence: $\mathbf{Pr}(D_1) = 1$.

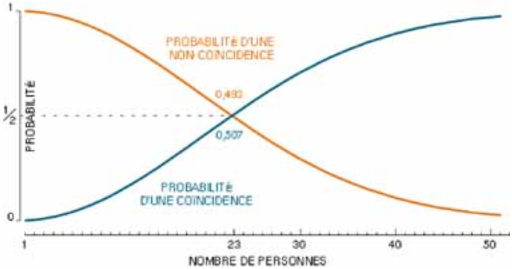
$k = 2$: Boole entre, 364 dates différentes de celle d'Abel: $\mathbf{Pr}(D_2) = 364/365$.

$k = 3$: Cantor entre, 363 dates différentes de celles d'Abel et Boole: $\mathbf{Pr}(D_3) = (364/365) \times (363/365)$.

k quelconque:
$\mathbf{Pr}(D_k) = (364/365) \times (363/365) \times \cdots \times (365 - k + 1/365)$.

"Paradoxe" des anniversaires

$\mathbf{Pr}(D_k)$ décroit et tend vers 0 quand k tend vers l'infini.
$\mathbf{Pr}(D_{22}) = 0,524$, et $\mathbf{Pr}(D_{23}) = 0,493$.



Donc, dès que **23 personnes** sont rassemblées, la probabilité d'une coïncidence au moins est $1 - 0,493 = 0,507$: l'événement est légèrement plus probable que son contraire.

Moralité

Méfiez-vous des coïncidences ...

... elles sont parfois très probables.

Autre question d'anniversaires

Combien de personnes en plus de vous-même doivent être dans la pièce pour que l'événement "une personne au moins a votre date de naissance" soit plus probable que son contraire ?

Autre question d'anniversaires

Combien de personnes en plus de vous-même doivent être dans la pièce pour que l'événement "une personne au moins a votre date de naissance" soit plus probable que son contraire ?

Intuition fausse: $\lceil 365/2 \rceil = 183$, puisqu'il y a 365 dates différentes. Si plus de la moitié de ce nombre de personnes se trouve dans la salle, vous avez plus d'une chance sur deux de partager votre date de naissance avec l'une d'elles.

Autre question d'anniversaires

Combien de personnes en plus de vous-même doivent être dans la pièce pour que l'événement "une personne au moins a votre date de naissance" soit plus probable que son contraire ?

Réponse correcte: **253**.
E_k: événement que k personnes aient toutes des dates différentes de la votre.

$k = 1$: Alembert entre, $364/365$ chances d'avoir une date différente de la votre: $\mathbf{Pr}(E_1) = 364/365$.

$k = 2$: Bernouilli entre, $364/365$ chances d'avoir une date différente de la votre: $\mathbf{Pr}(E_2) = (364/365)^2$.

k quelconque: $\mathbf{Pr}(E_k) = (364/365)^k$.

Pour $k < 253$, $\mathbf{Pr}(E_k) > 1/2$, pour $k \geq 253$, $\mathbf{Pr}(E_k) < 1/2$.

Certains pronostiqueurs et faux devins l'avaient abusé de vaine espérance.

Cicéron.

Variables aléatoires et espérance

variable aléatoire: fonction $\Omega \to \mathbb{R}$.

espérance d'une variable aléatoire X: $\mathbf{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} \mathbf{Pr}(\omega) X(\omega)$.

X_1: nombre de points avec le dé équilibré.

$$\mathbf{E}(X_1) = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{7}{2} = 3,5.$$

X_2: nombre de points avec le dé pipé.

$$\mathbf{E}(X_2) = \frac{1}{12} \times 1 + \frac{1}{6} \times 2 + \frac{1}{6} \times 3 + \frac{1}{6} \times 4 + \frac{1}{6} \times 5 + \frac{1}{4} \times 6 = \frac{47}{12} = 3,9166.$$

Linéarité de l'Espérance *Si* $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$, *alors* $\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{E}(X_i)$.

X: nombre de points avec les deux dés. $\mathbf{E}(X) = \frac{89}{12} = 7,4166$.

Loto

Mise: 2 euros pour une grille.
Choix: 5 numéros entre 1 et 49 et un numéro chance entre 1 et 10.

$$\mathbf{Pr}(k \text{ bons numéros}) = 1/\binom{49}{k} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times k}{49 \times 48 \times \cdots \times (50-k)}$$

Combinaison	**Rapport**	**Proba**
5 bons numéros + chance	5 000 000	1/19 068 840
5 bons numéros	300 000	1/1 906 884
4 bons numéros	2 500	1/211 876
3 bons numéros	15	1/18 424
2 bons numéros	7	1/1 176
numéro chance	2	1/10

Espérance de gain inférieure à

$$\frac{5\ 000\ 000}{19\ 068\ 840} + \frac{300\ 000}{1\ 906\ 884} + \frac{2\ 500}{211\ 876} + \frac{15}{18\ 424} + \frac{7}{1176} + \frac{2}{10} \leq \mathbf{0,64}$$

Ecart type et variance

Ecart type: écart moyen avec l'espérance. $\sigma(X) = \mathbf{E}(|X - \mathbf{E}(X)|)$.

Pour le dé équilibré :

$$\sigma(X_1) = \frac{1}{6}(2,5 + 1,5 + 0,5 + 0,5 + 1,5 + 2,5) = 1,5.$$

Pour le dé pipé :

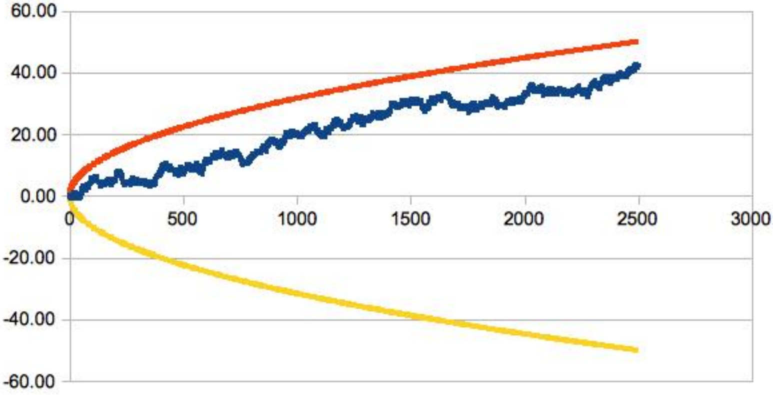
$$\sigma(X_2) = \frac{1}{12} \times \frac{35}{12} + \frac{1}{6}\left(\frac{23}{12} + \frac{11}{12} + \frac{1}{12} + \frac{13}{12}\right) + \frac{1}{4} \times \frac{25}{12} = \frac{103}{72}$$
$$= 1,4305\ldots$$

Variance: carré de l'écart type. $\mathbf{var}(X) = \sigma^2(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2$.

Marche de l'ivrogne

Un ivrogne marche. A chaque pas, il titube et se décale d'un pas vers la droite ou vers la gauche de manière aléatoire.

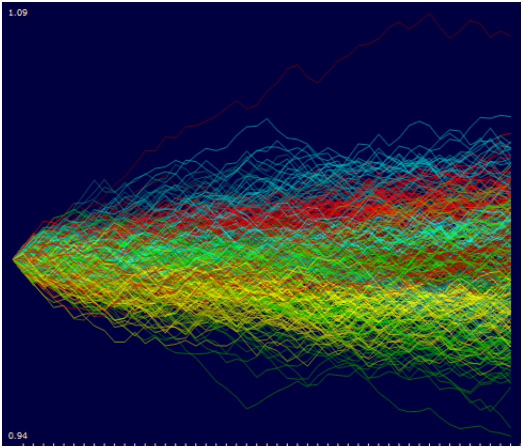
- l'espérance est nulle ;
- la variance vaut n et l'écart type $\sqrt{n}$.



Marche de l'ivrogne

Un ivrogne marche. A chaque pas, il titube et se décale d'un pas vers la droite ou vers la gauche de manière aléatoire.

- l'espérance est nulle ;
- la variance vaut n et l'écart type $\sqrt{n}$.



Marche aléatoire de dimension 1

Déviation en $\sqrt{n}$.

- avec perspective, impression que l'ivrogne garde son cap.
- détection de dés pipés, ... $3,5 + \frac{\sqrt{n}}{n} < \frac{47}{12}$.
  (Loi des grands nombres).
- **Sondage** entre deux propositions sur 1 000 personnes. Ecart type de $\sqrt{1000} \simeq 31,6$ soit environ $3,16$ %.
  Pour un écart type de 1%, il faudrait 10 000 personnes.

Une marche infinie croise n'importe quel niveau un nombre infini de fois.

- Ruine du parieur.

Marche de l'ivrogne (2)

Dans une ville idéale (= grille), un ivrogne essaie de rentrer chez lui. Arrivé à chaque intersection, il choisit au hasard une route parmi les 4 possibles (dont celle d'où il vient) avec égale probabilité (1/4).

C'est une marche aléatoire sur la grille infinie à deux dimensions.

Presque sûrement, l'ivrogne va finir par passer devant chez lui.

Moralité

Il y a les probabilités pour les ivrognes.

Le hasard, c'est Dieu qui se promène incognito.

Albert Einstein

Toute connaissance dégénère en probabilité.

David Hume

Traité de la nature humaine

Percolation

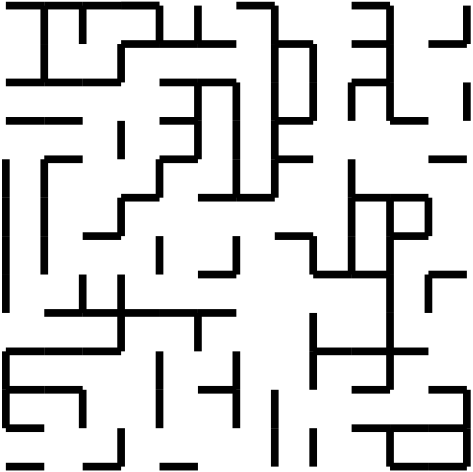
On considère la grille infinie.

L'existence de chaque arête est tirée au hasard indépendamment.

- Avec probabilité p, l'arête existe;
- Avec probabilité $1 - p$, l'arête n'existe pas.

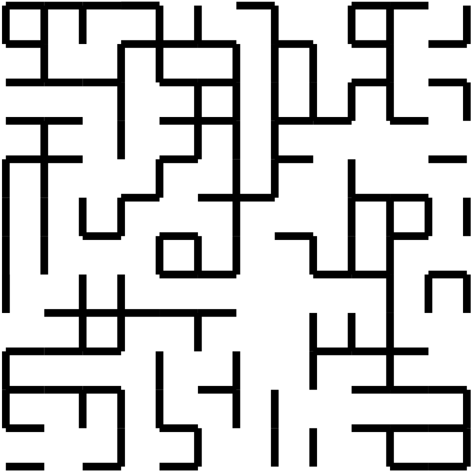
On fait augmenter p et on regarde l'évolution du graphe.
On regarde la taille des composantes.

Percolation



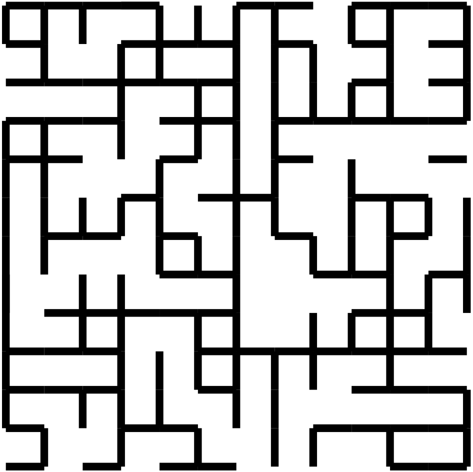
$p = 0.4$

Percolation et transition de phase



$p = 0.5$

Percolation et transition de phase



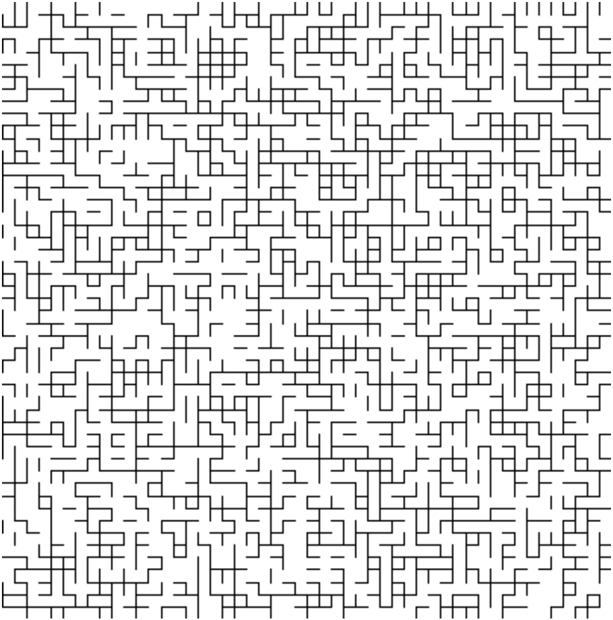
$p = 0.6$

Transition de phase

- $p < 1/2$: toutes les composantes sont petites (finies). Pleins de petites îles dans un grand océan ouvert.
- $p = 1/2$: complexe. Pas de composante infinie, mais beaucoup de grandes.
- $p > 1/2$: UNE composante géante avec une infinité de sommets. Un grand continent avec pleins de petits lacs.

Pleins de phénomènes (confiture, transition liquide-gaz, ...) s'expliquent par des modèles de la sorte.

Percolation et transition de phase



Moralité

Avec les probabilités, on peut faire des confitures.

Il suffit d'ajouter des fruits et du sucre.

Petits mondes

Expérience de Milgram (1967) :

- Lettre avec nom, profession, adresse du destinataire.
- Envoyer en faisant passer de connaissance en connaissance.

100 personnes : 20 lettres à destination, chaines de longueur entre 2 et 10, en moyenne 5.

Doods, Muhamad et Watts (2003) :
Même expérience mais avec courriel.
25 000 sources et 12 destinations.
$\sim$ 400 à destination par des chaînes de longueur 4 en moyenne (entre 1 et 10).

- **Le monde est petit. Pourquoi?**
- **Comment se fait-il qu'on trouve des chaines courtes?**

Le modèle de Kleinberg

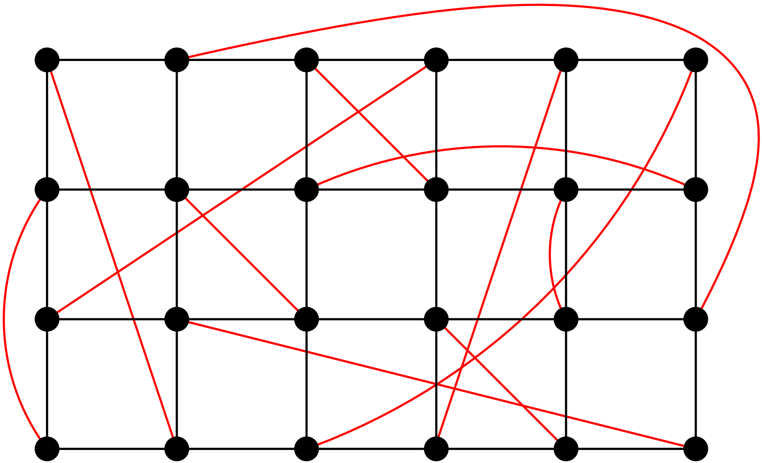
Idée : les gens connaissent leur voisinage et quelques personnes lointaines au "hasard" des rencontres.

Ils connaissent la localisation des personnes dans l'espace (géographie, métier, . . .).

Modèle : graphe de proximité (disons une grille);
pour chaque sommet et on rajoute une connaissance au hasard dans le graphe.

Chaque personne fait passer la lettre à sa connaissance la plus proche de la destination.

Le modèle de Kleinberg (Exemple)



Le modèle de Kleinberg (résultats)

Si on prend une grille à deux dimensions (critère géographique seul).

Résultat varie suivant la fonction de probabilité choisie pour la connaissance supplémentaire.

- proba. uniforme : les lettres mettent un temps long (proportionnel à la taille de la grille) pour arriver.
- proba. inversement proportionnelle au carré de la distance : les lettres mettent un temps court (logarithmique en la taille de la grille) pour arriver.

Moralité

Le hasard fait parfois bien les choses.