Introduction à la thérorie des jeux combinatoires

Frédéric Havet

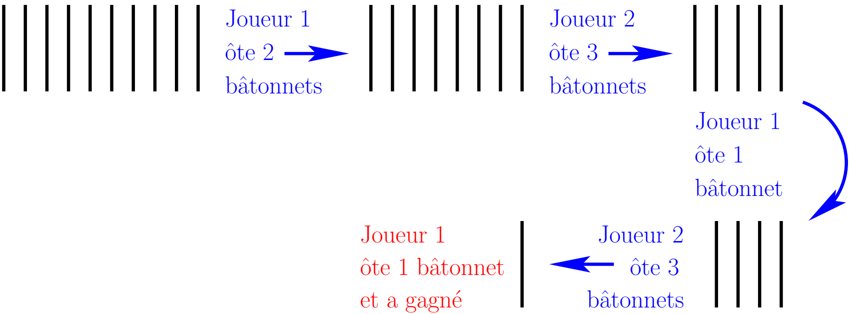
MASCOTTE, commun I3S(CNRS/UNSA)-INRIA Sophia Antipolis

Fête de la science – 21-24 octobre 2010

Jeu des bâtonnets – règle

Des bâtonnets sur la table. Chacun leur tour, les deux joueurs prennent 1, 2 ou 3 bâtonnets. Celui qui prend le dernier bâtonnet a gagné.

Exemple de partie:



Jeu des bâtonnets – positions perdantes et gagnantes

Examinons les positions quand je dois jouer, en fonction du nombre de bâtonnets restant.

- 1, 2, ou 3 bâtonnets: gagné. Je peux ôter tous les bâtonnets pour qu'il n'en reste plus. L'autre joueur a alors perdu.
- 4 bâtonnets: perdu. Que j'enlève 1, 2 ou 3 bâtonnets, il en restera 3, 2 ou 1, et l'autre joueur gagne (s'il joue correctement).
- 5, 6, ou 7 bâtonnets: gagné. Je peux ôter 1, 2 ou 3 bâtonnets pour qu'il en reste 4, position où l'autre joueur perd (si je joue correctement).
- $4k$ bâtonnets: perdu. Que j'enlève 1, 2 ou 3 bâtonnets, il en restera $4k-1$, $4k-2$ ou $4k-3$, positions où l'autre joueur gagne.
- $4k+1$, $4k+2$, ou $4k+3$ bâtonnets: gagné. Je peux ôter 1, 2 ou 3 bâtonnets pour qu'il en reste $4k$, position où l'autre joueur perd.

Jeu des bâtonnets – stratégie

S'il y a $4k$ bâtonnets (4,8,12,...) alors le Joueur 2 gagne.

Stratégie: se ramener à un multiple de 4.

Si l'adversaire a ôté	1 bâtonnet,	en elever 3;
	2 bâtonnets,	en elever 2;
	3 bâtonnets,	en elever 1.

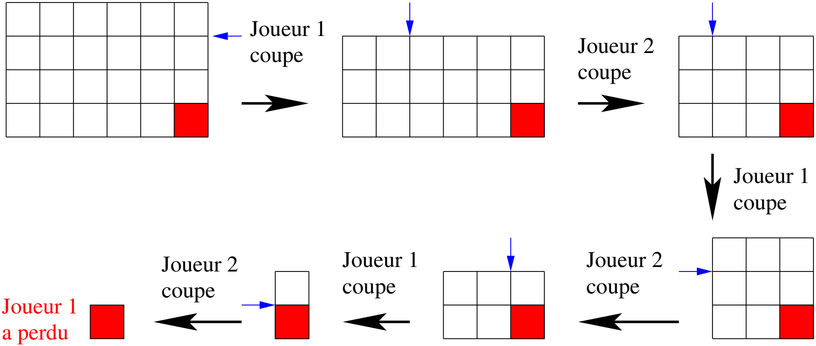
Sinon le Joueur 1 gagne.

Stratégie: Enlever 1, 2 ou 3 bâtonnets pour qu'il y en ait $4k$ et appliquer ensuite la stratégie ci-dessus.

Jeu du chocolat empoisonné – règle

Chaque joueur à son tour coupe suivant une coupe verticale ou horizontale une partie de la plaquette de chocolat qu'il doit manger. Celui qui se voit forcé de manger le carreau en bas à droite qui est empoisonné a perdu.

Exemple de partie:



Jeu du chocolat empoisonné – stratégie

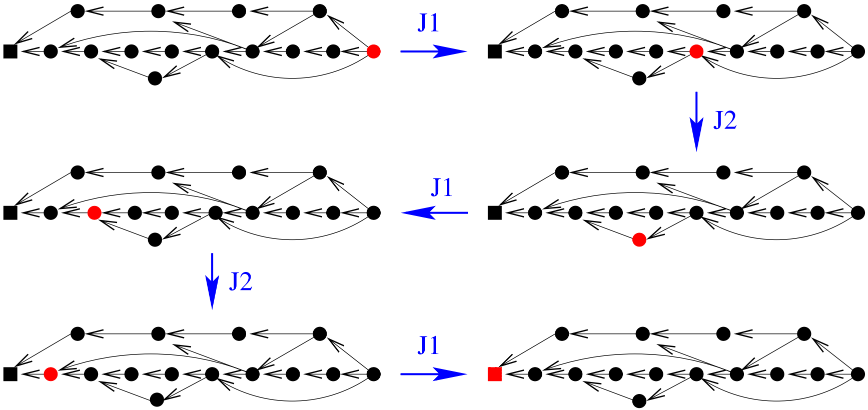
Stratégie gagnante: toujours couper de manière à ce que la plaquette de chocolat restante soit carrée.

Si la plaquette est carrée au départ, le Joueur 2 gagne.

Si la plaquette n'est pas carrée au départ, le Joueur 1 gagne.

Jeu sur un graphe (orienté acyclique) – règle

Un graphe orienté acyclique et un pion (rouge) sur un sommet. Chacun à son tour, les joueurs déplace le pion suivant un arc du graphe. Celui qui ne peut plus bouger a perdu.



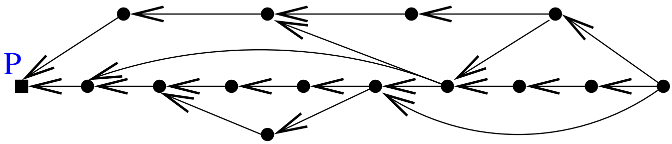
Théorème de Sprague-Grundy

Sprague-Grundy: Pour tout jeu sur un graphe orienté acyclique, il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs.

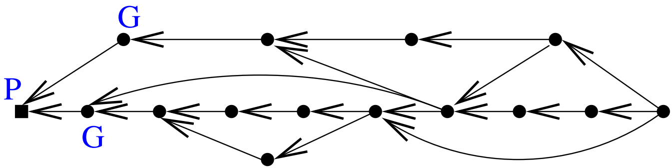
Pour trouver cette stratégie, déterminer pour chaque sommet s'il est perdant ou gagnant.

- les sommets desquels aucuns arcs ne sortent sont perdants;
- si un sommet pointe vers au moins un sommet perdant alors il est *gagnant*;
- si un sommet pointe uniquement vers des sommets gagnants alors il est *perdant*.

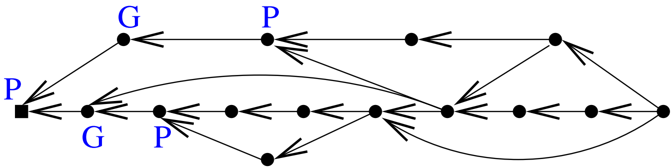
Trouver les sommets gagnants et perdants



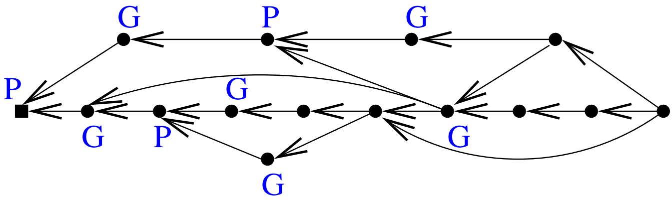
Trouver les sommets gagnants et perdants



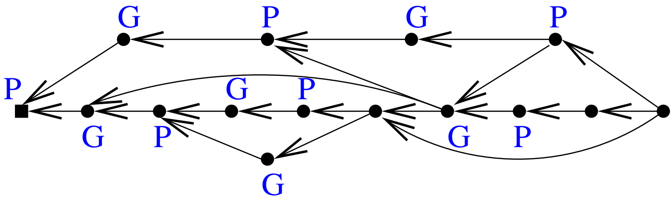
Trouver les sommets gagnants et perdants



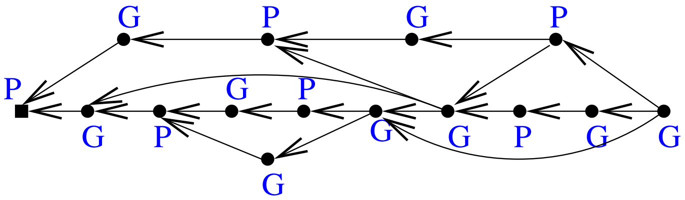
Trouver les sommets gagnants et perdants



Trouver les sommets gagnants et perdants



Trouver les sommets gagnants et perdants



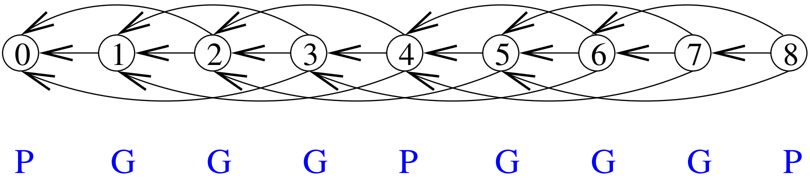
Jeu sur un graphe – stratégie

Stratégie gagnante: Bouger le pion vers un sommet perdant.

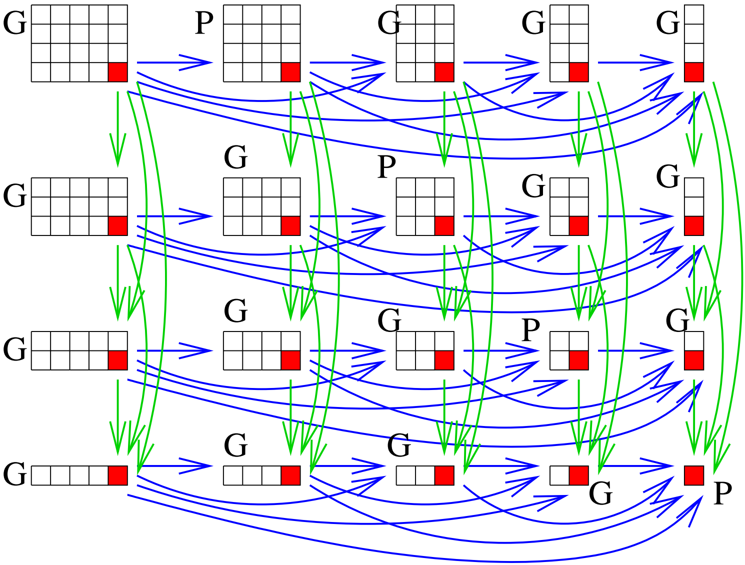
- possible si le pion est sur un sommet gagnant,
- impossible si le pion est sur un sommet perdant.

Si le sommet de départ est gagnant, le Joueur 1 gagne.
Si le sommet de départ est perdant, le Joueur 2 gagne.

Graphe du jeu des bâtonnets



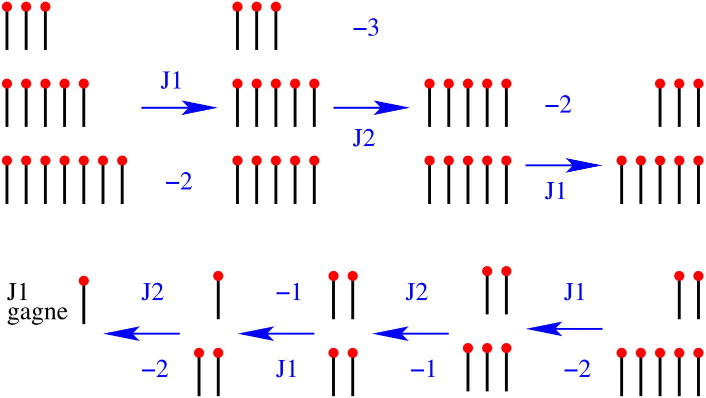
Graphe du jeu du chocolat



Jeu de Nim – règle

Plusieurs rangées d'allumettes sur la table. Chacun leur tour, les deux joueurs prennent autant d'allumettes qu'ils le veulent dans une rangée. Celui qui prend la dernière allumette a gagné.

Exemple de partie:



Jeu de Nim à une et deux lignes

Le jeu à 1 ligne est très simple. Le premier joueur gagne. Il peut en effet enlever toutes les allumettes.

Le jeu de Nim à deux lignes ressemble à celui du chocolat.
Stratégie: Egaliser le nombre d'allumettes dans les 2 lignes.

Et sur 3 lignes ??

Jeu sur deux graphes

Deux graphes G_1 et G_2 disjoints avec un pion sur chaque. Chacun à son tour, les joueurs bougent un pion sur un des graphes de son choix. Celui qui ne peux pas bouger de pion a perdu.

On peut le voir comme le jeu sur le graphe $G_1 \oplus G_2$ de toutes les configurations possibles sur les 2 graphes.

Déterminer les positions gagnantes et perdantes de $G_1 \oplus G_2$ peut se faire, mais c'est long et compliqué (surtout de tête) car $G_1 \oplus G_2$ a beaucoup de sommets $(|G_1| \times |G_2|)$.

Peut-on déduire si une position est gagnante ou perdante pour $G_1 \oplus G_2$ simplement en connaissant les positions gagnantes et perdantes pour G_1 et G_2?

Positions gagnantes et perdantes sur deux graphes

perdante sur G_1 et perdante sur G_2 $\Longrightarrow$ perdante pour $G_1 \oplus G_2$.

En bougeant un pion sur un des graphes, le joueur 1 est obligé d'atteindre une position gagnante sur ce graphe. Il suffit alors au Joueur 2 de bouger le pion sur ce même graphe sur une position perdante.

gagnante sur G_1 et perdante sur G_2 $\Longrightarrow$ gagnante pour $G_1 \oplus G_2$.

Le joueur 1 bouge vers une position perdante sur G_1 et applique la stratégie précédente.

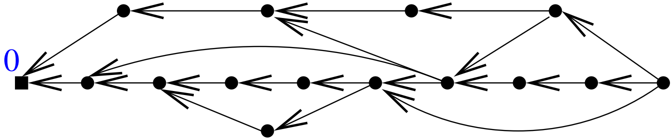
gagnante sur G_1 et perdante sur G_2 $\Longrightarrow$ **????** pour $G_1 \oplus G_2$.

Pour le Jeu de Nim, 1 et 2 sont toutes deux gagnantes sur une ligne mais (1,1) est perdante et (1,2) est gagnante.

Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

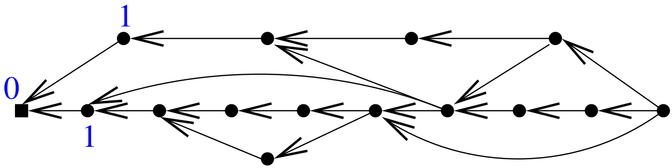
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

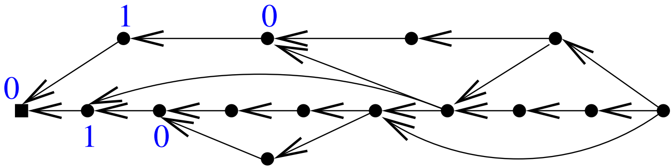
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

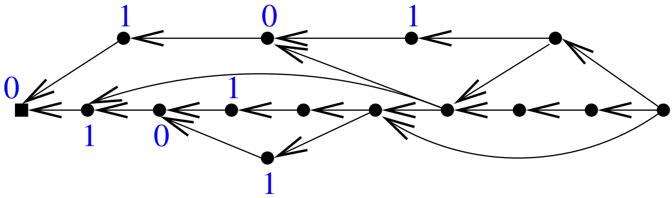
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

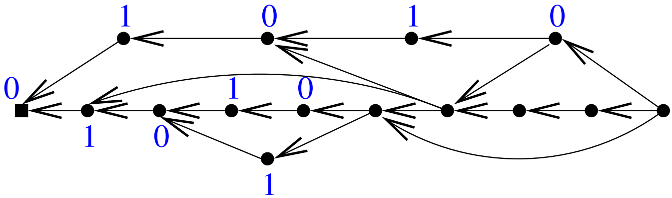
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

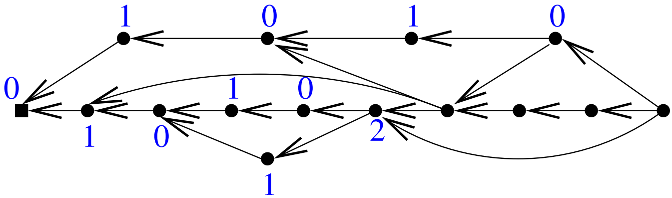
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

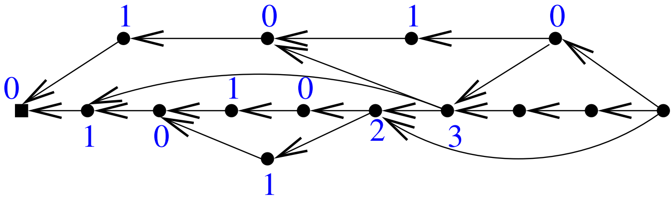
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

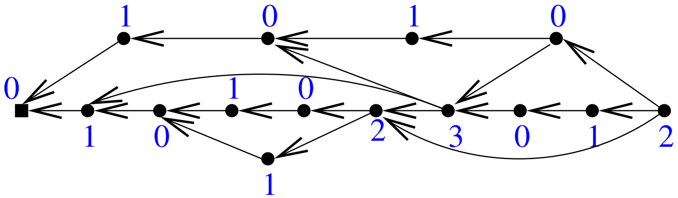
- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Fonction de Sprague-Grundy

nombre de Sprague-Grundy:

- les sommets desquels aucun arc pointe ont pour nombre 0;
- pour tout sommet le nombre de Sprague-Grundy est le plus petit entier positif qui n'apparait pas sur les sommets vers lequel il pointe.



Propriétés de la fonction de Sprague-Grundy d'un jeux à deux graphes

Un sommet v est perdant $\Leftrightarrow g(v) = 0$.

$G = G_1 \oplus G_2$, $v = (v_1, v_2)$.
$g(v) = g(v_1) \oplus g(v_2)$ avec $\oplus$ la somme de Nim = somme binaire bit à bit (sans retenue).

Par exemple, 3 s'écrit 011 et 5 s'écrit 101 en binaire. On note 101_2.
$011_2 \oplus 101_2 = 110_2$ soit $3 \oplus 5 = 6$.

Fonction de Sprague-Grundy pour le jeu de Nim

Jeu à une ligne: nombre de Grundy = nombre d'allumettes.

$$\Longleftarrow$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8
0	1	2	3	4	5	6	7	8

Jeu à plusieurs lignes: il faut faire la somme de Nim.
Par exemple, si on a 10, 5 et 3 allumettes:
somme de Nim de 10, 5 et 3: $1010_2 \oplus 0101_2 \oplus 0011_2 = 1100_2$. La position est gagnante.

Stratégie pour le jeu de Nim

Si on a des lignes telle que la somme de Nim de leur taille ne soit pas 0. La position est gagnante mais que jouer??

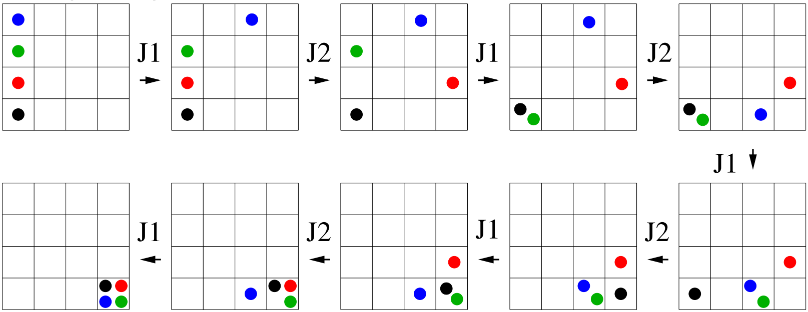
3 lignes de 10, 5 et 3 allumettes $1010_2 \oplus 0101_2 \oplus 0011_2 = 1100_2$.

- On prend le bit de plus gros poids à 1 dans la somme. 1100_2
- On prend une ligne pour laquelle ce bit est à 1. 1010_2
- On réduit cette ligne de facon à égaler la somme de Nim des autres sur les bits plus faibles.
  $101_2 \oplus 011_2 = 110_2 = 6$. On réduit donc la ligne de 10 a 6 allumettes.

Jeu du tableau – règle

Un tableau de 4×4 cases avec un pion par case sur la première colonne. Chacun son tour, les deux joueurs déplacent un pion de leur choix d'autant de cases qu'ils le veulent vers la droite ou vers le bas. Plusieurs pions peuvent se trouver sur la même case. Celui qui ne peut plus jouer a perdu.

Exemple de partie:



Jeu de Grundy

A chaque étape, il y a un certain nombre de piles de jetons. Le joueur qui doit jouer doit prendre une des piles et la séparer en deux piles de tailles différentes. Le joueur qui ne peut plus jouer (i.e. quand toutes les piles sont de taille 1 ou 2) a perdu.

Pour comprendre ce jeu, cela revient à connaitre la fonction de Grundy $g(n)$ pour une pile à n jetons.

On a calculé $g(n)$ jusqu'à 2^{35}.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...
$g(n)$	0	0	1	0	2	1	0	2	1	0	2	1	3	

La suite $g(n)$ suite est-elle périodique? Est-elle bornée?

Jeux impartiaux

Tous les jeux que nous avons vus sont impartiaux.

1. Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
2. Toutes les informations concernant le jeu (configurations, possibilités de mouvement des joueurs) sont connues à chaque instant des deux joueurs (l'information est complète).
3. Aucun hasard n'intervient dans le jeu (pas de lancer de dé, ni de distribution aléatoire de cartes, etc.).
4. Le jeu termine forcément (pas de match nul).
5. Pour une configuration donnée, les possibilités de mouvement ne dépendent pas du joueur.

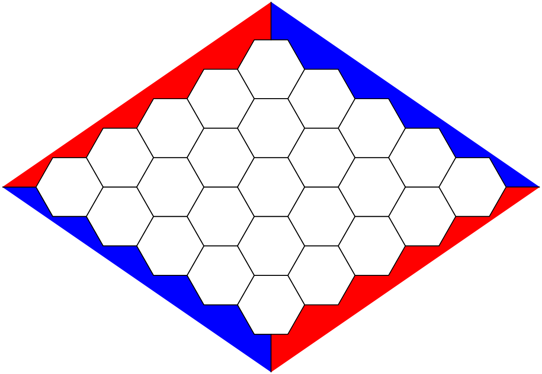
Jeux partisans

Regardons des jeux plus compliqués: jeux partisans.

1) Les deux joueurs jouent à tour de rôle.
2) Toutes les informations concernant le jeu (configurations, possibilités de mouvement des joueurs) sont connues à chaque instant des deux joueurs (l'information est complète).
3) Aucun hasard n'intervient dans le jeu (pas de lancer de dé, ni de distribution aléatoire de cartes, etc.).
4) Le jeu termine forcément (pas de match nul).
5) Pour une configuration donnée, les possibilités de mouvement varient en fonction du joueur.

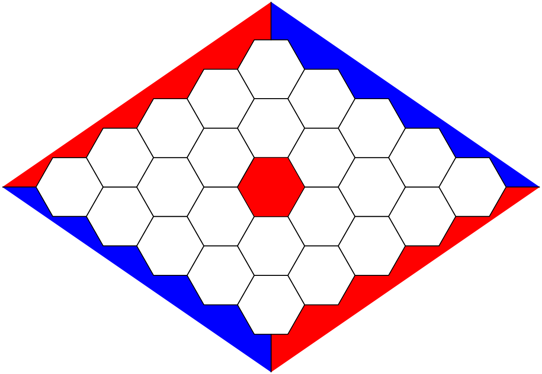
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



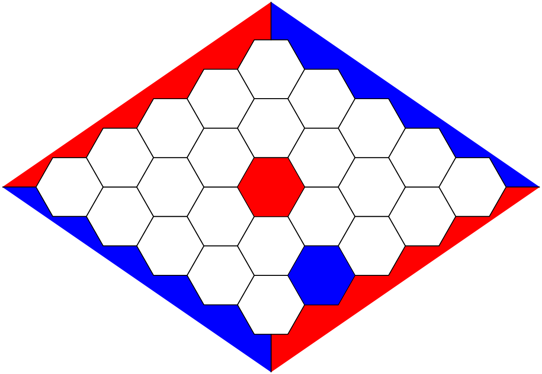
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



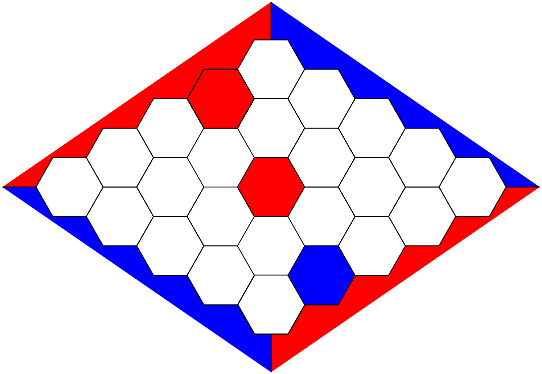
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



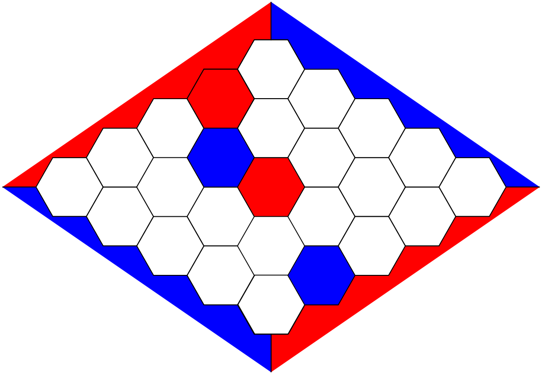
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



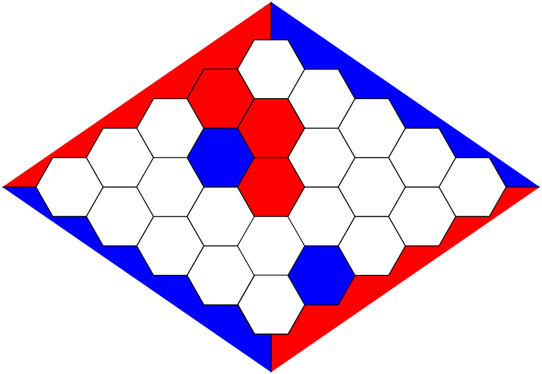
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



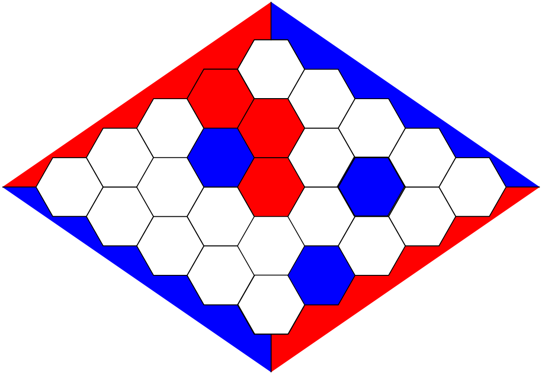
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



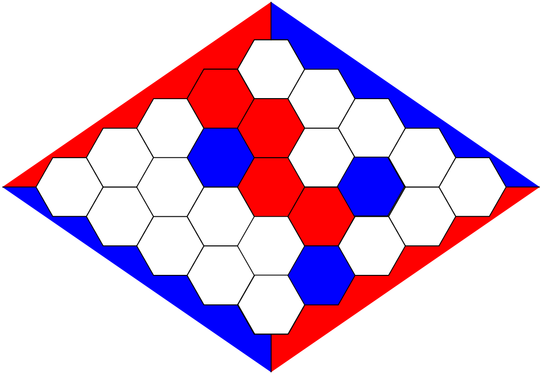
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



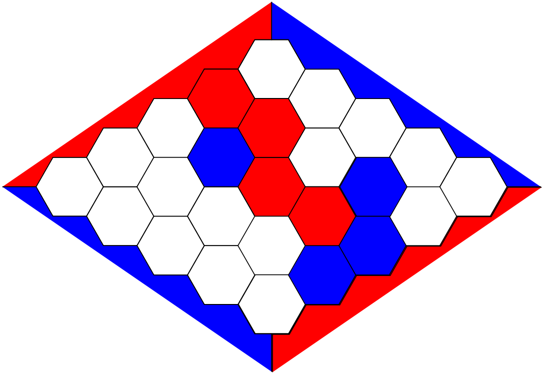
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



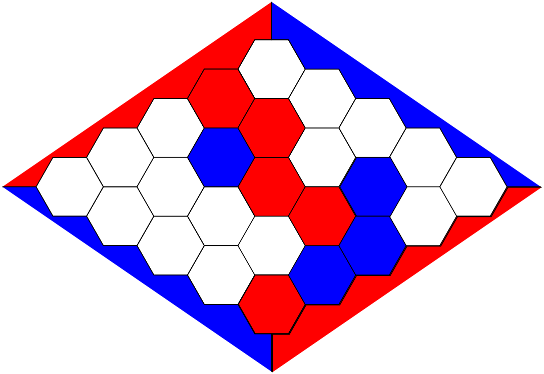
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



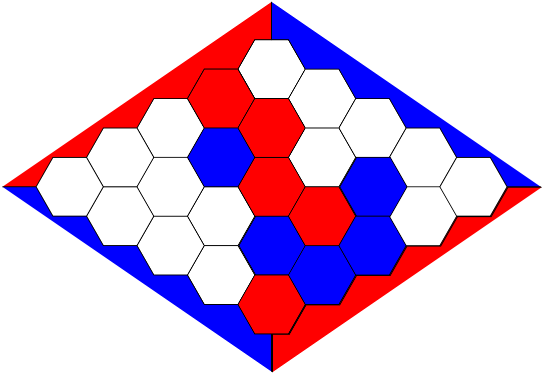
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



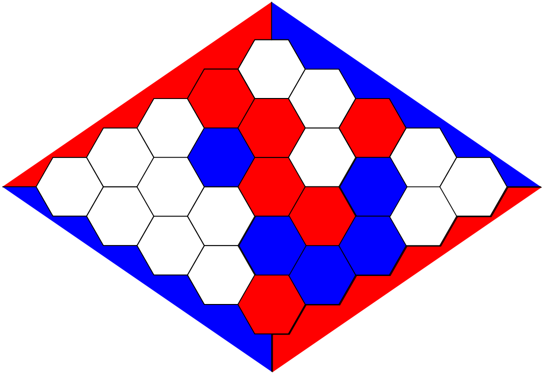
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



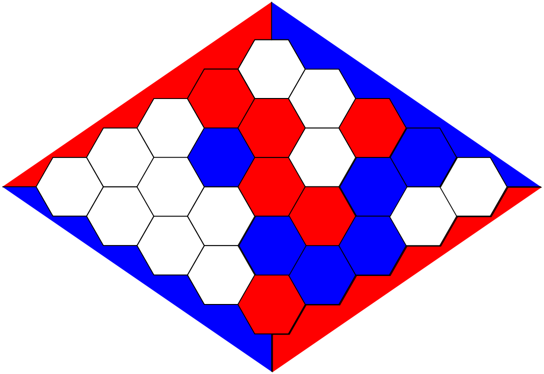
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



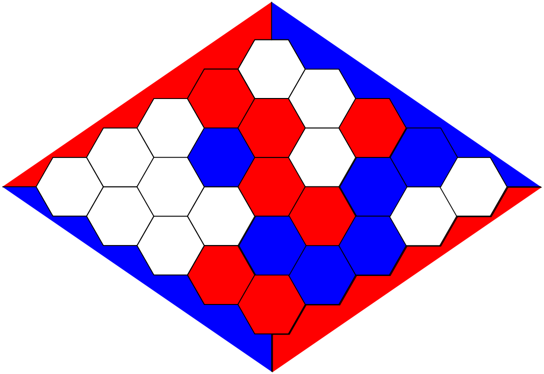
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



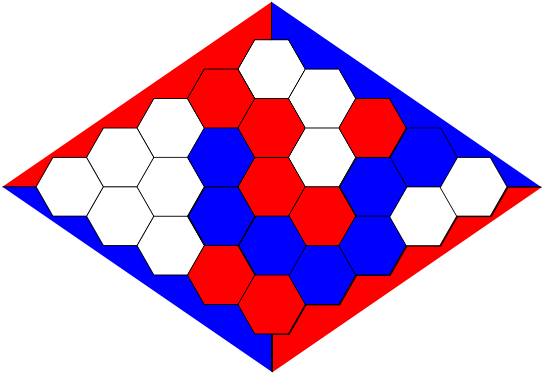
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



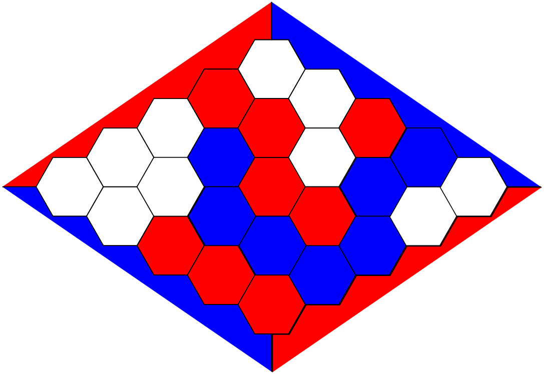
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



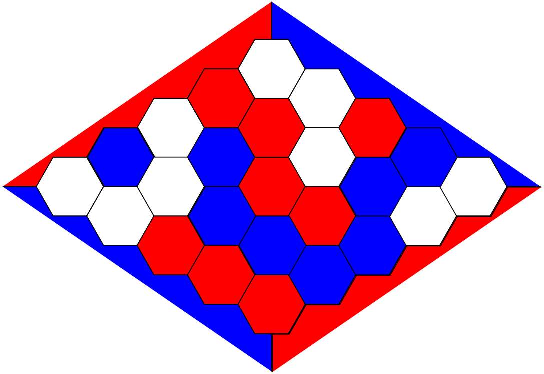
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



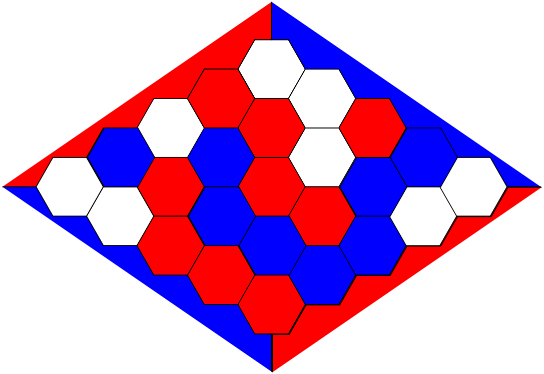
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



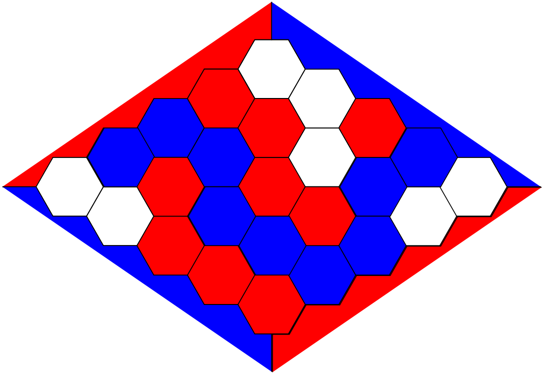
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



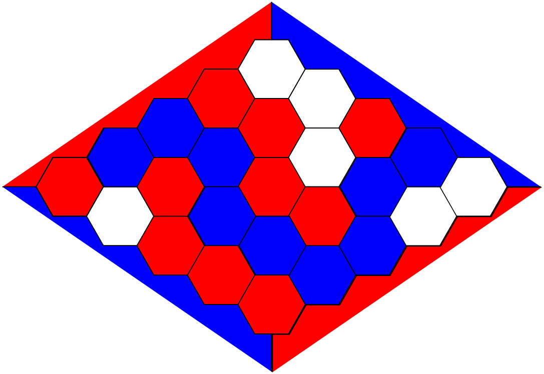
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



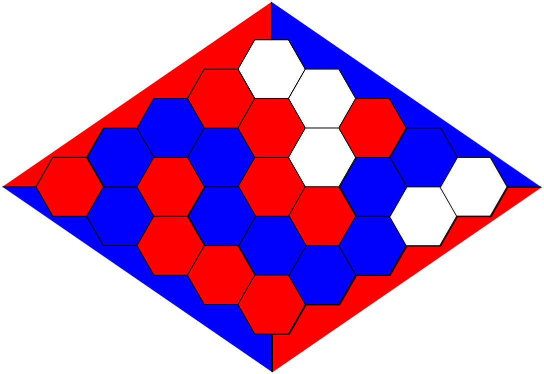
Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



Hex

Plateau en forme de losange dont les cases sont hexagonales. Deux côtés opposés du losange sont rouges, les deux autres sont bleus. Un joueur rouge et un joueur bleu jouent à tour de rôle un pion de leur couleur sur une case libre. Le gagnant est celui qui relie les deux côtés de sa couleur avec un chemin de pions de sa couleur.



Vol de stratégie

Le jeu Hex termine forcément $\Rightarrow$ un des joueurs à une stratégie gagnante.

Ca ne peut pas être le Joueur 2 car le Joueur 1 pourrait lui voler sa stratégie:

- Jouer un premier coup au hasard.
- Appliquer la stratégie du Joueur 2, (en jouant un nouveau coup au hasard si le coup à faire est de jouer la où on a placé un pion au hasard précédemment).

Donc le Joueur 1 a une stratégie gagnante.
Mais on ne la connait pas!!!