Les grands problèmes mathématiques de l'antiquité

Frédéric Havet

MASCOTTE, commun I3S(CNRS/UNSA)-INRIA Sophia Antipolis

Soirée scientifique – 10 Décembre 2010

Principe Pythagoricien

Pour les Pythagoriciens, "tout est nombre".

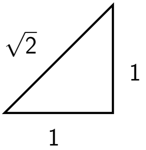
Pythagore (-550 avant J.C.) a découvert les lois harmoniques: relation entre la longueur d'une corde vibrante et la hauteur du son émis.

Idée naturelle: toute longueur est commensurable à l'unité.
Autrement dit: tout nombre peut s'exprimer comme une fraction.

Si c'était vrai, à condition de bien choisir l'unité, il devient possible de ne travailler que sur des figures dont les longueurs sont entières.

Malheureusement, c'est FAUX. $\sqrt{2}$ ne peut pas s'exprimer comme une fraction.

Racine carrée de 2



$\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 1.

Pythagore: $\sqrt{2}^2 = 1^2 + 1^2 = 2$.

Supposons que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.
$p = 2^i p_1$ et $q = 2^j q_1$ avec p_1 et q_1 impair.
$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2}$ soit $2q^2 = p^2$.
Ainsi $2 \times 2^{2j} q_1^2 = 2^{2i} p_1^2$. Donc $2j + 1 = 2i$, impossible.

Nombres constructibles à la règle et au compas

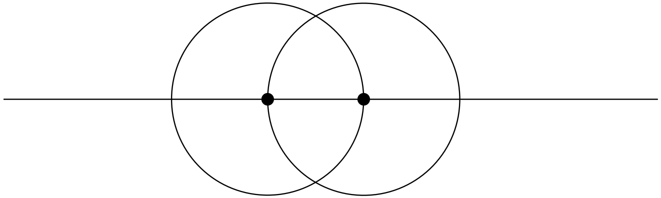
Les points, cercles et droites constructibles à la règle et au compas sont définis de la manière récursive suivante:

- $(0,0)$ et $(1,0)$ sont constructibles.
- Si deux points A et B sont constructibles alors la droite (AB) est constructible et le cercle de centre A et de rayon AB sont constructibles.
- L'intersection de deux cercles ou droites constructibles est constructibles.

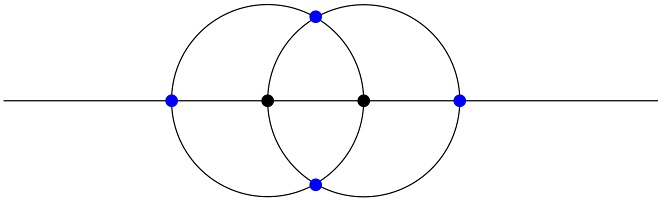
Un nombre constructible à la règle et au compas est la mesure d'une longueur associée à deux points constructibles à la règle (non graduée) et au compas.

Points constructibles en une étape

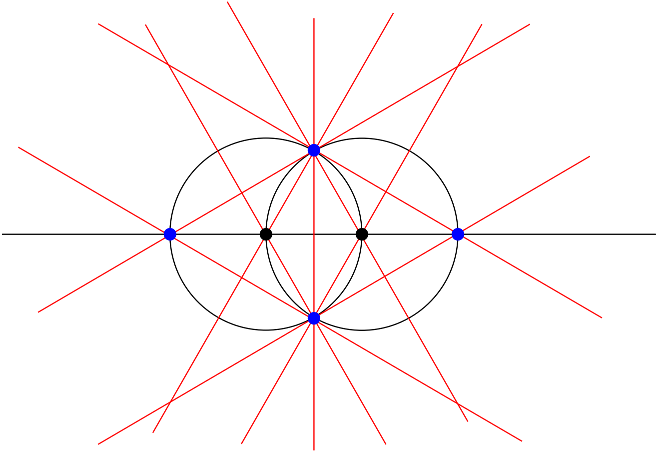
Points constructibles en une étape



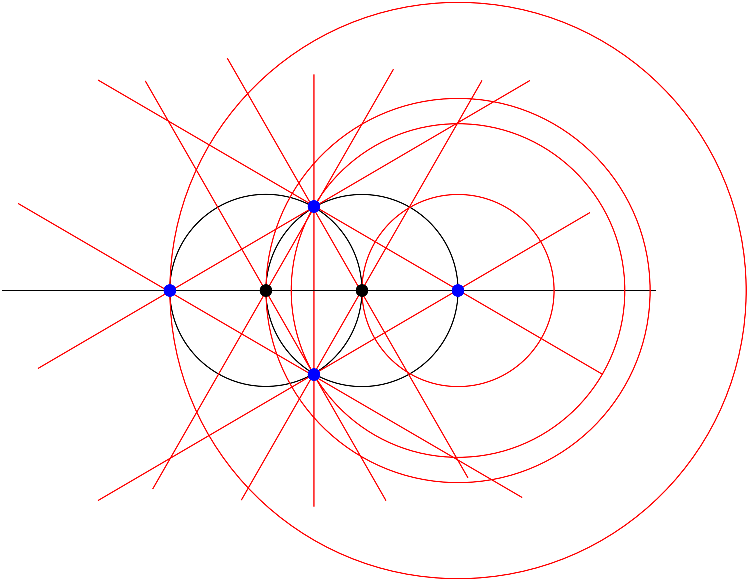
Points constructibles en une étape



Points constructibles en deux étapes



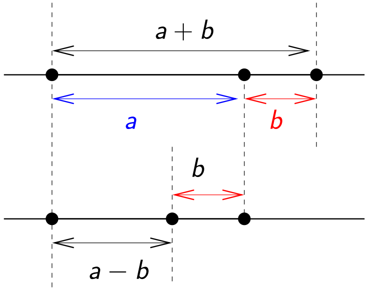
Points constructibles en deux étapes



Addition et soustraction de nombres constructibles

Soit a et b deux nombres constructibles.

$a + b$ et $a - b$ sont constructibles.

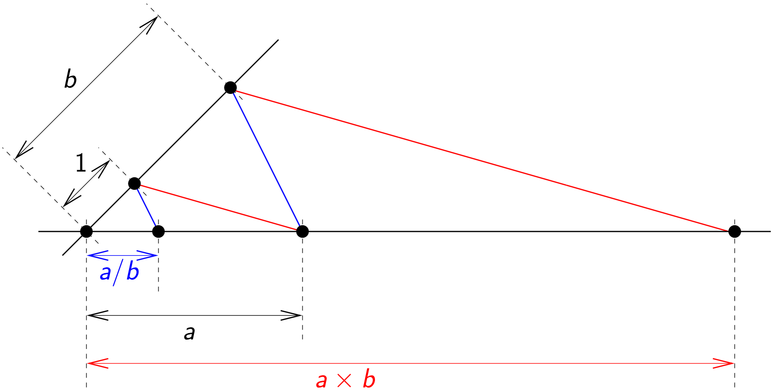


Les entiers $(\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots)$ sont constructibles.

Multiplication et division de nombres constructibles

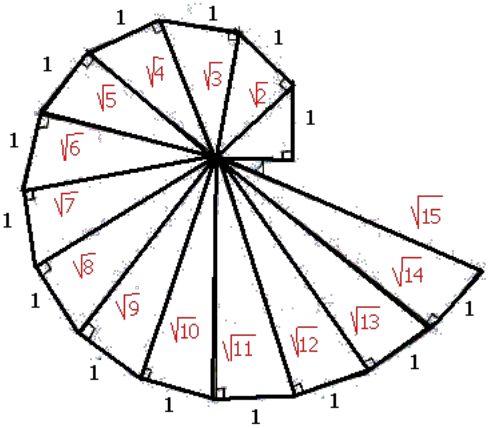
Soit a et b deux nombres constructibles.

$a \times b$ et a/b sont constructibles.



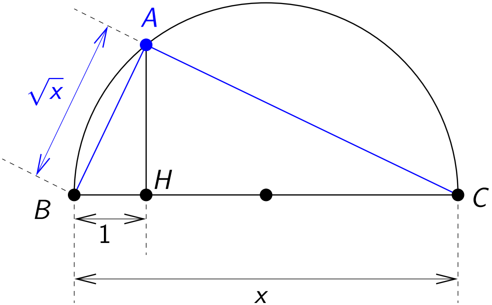
Les rationnels (fractions) sont constructibles.

Escargot de Pythagore



Racine carrée de nombres constructibles

Si x est constructible, alors $\sqrt{x}$ est constructible.



Exemple: $\sqrt[4]{2} = \sqrt{\sqrt{2}}$ ou $3 + \sqrt{27 - \dfrac{\sqrt{23} - 6}{\sqrt{5} - \sqrt[4]{2}}}$ sont constructibles.

Les 3 problèmes de l'Antiquité

Question: Tous les nombres sont-ils constructibles?

Les trois grands problèmes de l'antiquité.

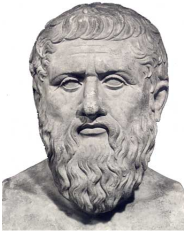
- Duplication du cube
- Trisection de l'angle
- Quadrature du cercle

Duplication du cube et sa légende

Les Déliens, victime d'une épidémie de peste, demandèrent à l'oracle de Delphes comment faire cesser cette épidémie. La réponse de l'oracle fut qu'il fallait doubler l'autel consacré à Apollon, autel dont la forme était un cube parfait.

Comment faire ?? Cela revient à construire $\sqrt[3]{2}$.

Les architectes allèrent trouver Platon. Ce dernier leur répondit que le dieu n'avait certainement pas besoin d'un autel double, mais qu'il leur faisait reproche, par l'intermédiaire de l'oracle, de négliger la géométrie.



Quadrature du cercle et trisection de l'angle

Quadrature du cercle: construire un carré de même aire qu'un cercle donné à l'aide d'une règle et d'un compas.

Aire d'un cercle de rayon $R = \pi R^2$.

Cela revient à la construction à la règle et au compas de $1/\sqrt{\pi}$ donc de π.

Trisection de l'angle: Etant donné un angle, construire un angle 3 fois plus petit.

Pour un angle θ fixé, cela revient à savoir si $\cos(\theta/3)$ est constructible à la règle et au compas.

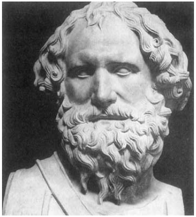
Premiers résultats

Ces 3 problèmes ont occupé les savants du monde entier depuis le papyrus Rhind (∼1650 av. J.-C.) du scribe Ahmès.

Duplication du cube et trisection de l'angle: constructions EXACTES en utilisant plus de choses que la règle et le compas.

Quadrature du cercle: Que des approximations. Pas de méthodes exactes.

Méthodes pour la trisection de l'angle

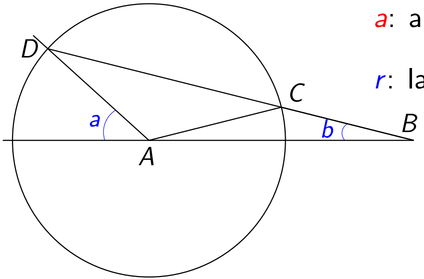


Archimède (IIIe siècle avant J.C.):
Construction avec compas et règle graduée.

Nicomède (IIe siècle avant J.C.): avec une courbe auxiliaire, la conchoïde

Abe (1980): par pliage de papier ou origami.

Trisection de l'angle – Méthode d'Archimède



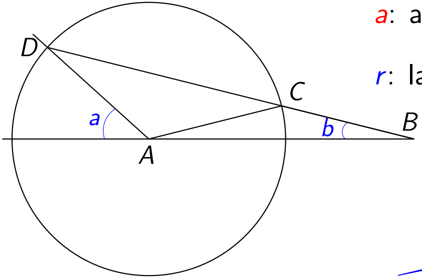
a: angle à trisecter, de sommet A.

r: la distance entre les 2 graduations.

1. On trace le cercle de centre A et de rayon r.
2. Le cercle coupe un côté de l'angle en D (donc $AD = r$).
3. On dispose la règle de façon à ce qu'elle passe par D, que l'une des graduations C de la règle soit sur le cercle, et l'autre graduation B soit sur le prolongement (AB) de l'autre côté de l'angle (donc $AC = CB = r$).

L'angle b de sommet B est le tiers de l'angle a.

Trisection de l'angle – Méthode d'Archimède

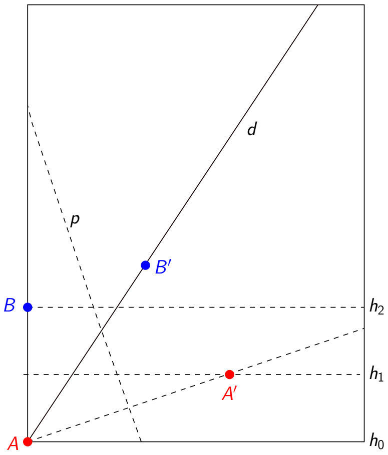


a: angle à trisecter, de sommet A.

r: la distance entre les 2 graduations.

Triangle ACB isocèle en C, donc $\widehat{BAC} = b$.
La somme des angles d'un triangle vaut π radians (180 degrés).
Donc $\widehat{ACB} = \pi - 2b$.
(BD) est une droite donc $\widehat{ACB} + \widehat{ACD} = \pi$. Donc $\widehat{ACD} = 2b$.
Triangle ACD est isocèle en A donc $\widehat{ACD} = \widehat{ADC} = 2b$ et donc $\widehat{DAC} = \pi - 4b$.
(AB) est une droite donc $a + \widehat{DAC} + \widehat{CAB} = \pi$ donc
$a = \pi - (\pi - 4b) - b$ soit $a = 3b$.

Trisection de l'angle par origami

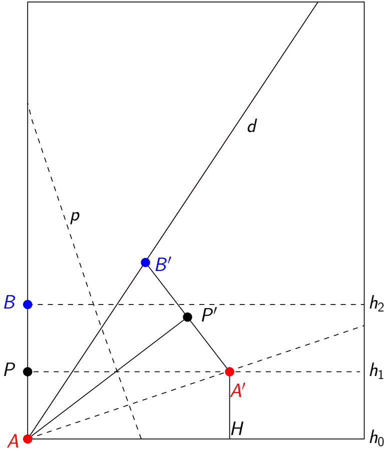


$\widehat{h_0Ad}$: angle à trisecter.

1. Par pliage, on détermine 2 bandes horizontales de même largeur (arbitraire) en bas de la feuille. h_1 et h_2 les droites qui les délimitent. Soit B l'intersection du bord gauche avec h_2.
2. On plie pour que A aille sur h_1 (en A') et B sur d (en B'). Soit p le pli obtenu.

$$\widehat{h_0AA'} = \frac{1}{3}\ \widehat{h_0Ad}.$$

Trisection de l'angle par origami



Montrons $\widehat{h_0 A A'} = \frac{1}{3}\ \widehat{h_0 A d}$.

P milieu de $[A, B]$; P' milieu de $[A', B']$;
$(A'P) \perp (AB)$ donc par symétrie (par rapport à p), $(AP') \perp (A'B')$.
Le triangle $AA'B'$ est donc isocèle en A et AP' est la bissectrice de $\widehat{A'AB'}$. Donc $\widehat{P'AB'} = \widehat{A'AP'}$.
$PAHA'$ est un rectangle donc $\widehat{HAA'} = \widehat{PA'A} = \widehat{A'AP'}$ par symétrie.
Ainsi $\widehat{HAB'} = \widehat{HAA'} + \widehat{A'AP'} + \widehat{P'AB'} = 3\widehat{HAA'}$.

Théorème de Wantzel

Pierre-Laurent Wantzel (1837):
Les nombres constructibles sont les rationnels et les racines de certains polynômes de degré 2^n à coefficients entiers.

$\sqrt[3]{2}$ est solution racine $x^3 - 2$.

Comme 3 n'est pas une puissance de 2, $\sqrt[3]{2}$ n'est pas constructible.

La duplication du cube est impossible à la règle et au compas.

Trisection et racines de polynôme

Trisecter angle θ = trouver x tel que $3x = \theta$.

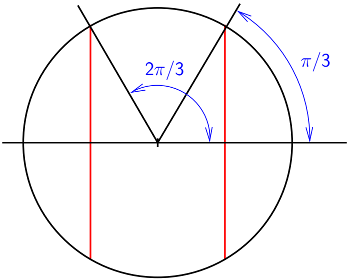
$\cos(3x) = 4\cos^3(x) - 3\cos(x)$.

$\cos(x) = X$ est donc solution de l'équation $4X^3 - 3X - \cos(\theta) = 0$.

Thérorème de Wantzel: $\Rightarrow$ si $4X^3 - 3X - \cos\theta$ est irréductible, alors c'est impossible.

Quelques trisections possibles

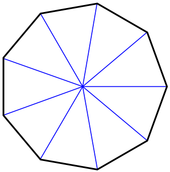
Si $\theta = 2\pi$, on $4X^3 - 3X - 1 = (X-1)(2X+1)^2$. Le polynôme n'est pas réductible. $\cos(2\pi/3) = -1/2$.
L'angle de mesure $2\pi/3$ est constructible.



Si $\theta = \pi$, on a $4X^3 - 3X + 1 = (X+1)(2X-1)^2$. Le polynôme n'est pas réductible. $\cos(\pi/3) = 1/2$.
L'angle de mesure $\pi/3$ est constructible.

Trisections impossibles

Si $\theta = \pi/3$, on $4X^3 - 3X - 1/2$ est un polynôme irréductible.
L'angle de mesure $\pi/9$ n'est pas constructible.



Impossible de construire à la règle et au compas l'ennéagone régulier (9 côtés). Gauss 1801

La "plupart" des angles ne sont pas constructibles à la règle et au compas.

Impossibilité de la quadrature du cercle

Impossibilité de la quadrature du cercle a été établie par von Lindemann en 1882 à l'aide du théorème de Wantzel.

Il montre que π est transcendant (i.e. racine d'aucun polynôme).

La quadrature du cercle ne peut pas être résolue ni avec un compas et une règle graduée, ni par origami.

De nos jours "Chercher la quadrature du cercle" signifie "Tenter de résoudre un problème insoluble".