Chapitre 1

Définitions et rappels

1.1 Graphes non-orientés et orientés

Un *graphe (non orienté)* est un couple $G = (V, E)$ tel que $E \subset [V]^2$, c'est à dire que les éléments de E sont des parties à deux éléments de V. Les éléments de V sont appelés les *sommets* de G et les éléments de E ses *arêtes*. Si $\{u, v\}$ est une arête alors u et v sont ses *extrémités*. Très souvent, pour alléger les notations, l'arête $\{u, v\}$ est notée uv.

Un *digraphe* ou *graphe orienté* est un couple $G = (V, A)$ telle que $A \subset V \times V$, c'est à dire que les éléments de A sont des couples à deux éléments de V. Les éléments de V sont appelés les *sommets* de G et les éléments de A ses *arcs* ou *arêtes*. Si $a = (u, v)$ est un arc, u et v sont ses extrémités u est son *début* et v sa *fin*.

Lorsque nous écrivons graphe sans préciser, il s'agit d'un graphe non orienté. Lorsque nous parlerons d'un graphe indifféremment orienté ou pas, une arête $\{u, v\}$ ou un arc (u, v) de G sera noté $[u, v]$.

Soit G un graphe ou un digraphe. L'ensemble de ses sommets est noté $V(G)$ et l'ensemble de ses arêtes $E(G)$. Pour un graphe orienté, on note parfois l'ensemble des arcs $A(G)$. L'*ordre* de G est son nombre de sommets.

Un *sous-graphe* de G est un graphe H tel que $V(H) \subset V(G)$ et $E(H) \subset E(G)$. Si H est un sous-graphe de G on dit que G *contient* H. Le sous-graphe *induit* par un ensemble de sommets $V' \subset V(G)$ est le sous-graphe $G[V'] = (V', E')$ avec $E' = \{uv \in E(G), u \in V', v \in V'\}$. Un sous-graphe H de G est *couvrant* si $V(H) = V(G)$.

Soit S un ensemble de sommets de G, on note par $G - S$ le sous-graphe induit par $V(G) \setminus S$. On note également $G - u$ le graphe $G - \{u\}$ pour tout sommet u. De même, si E' est un ensemble d'arête, on note par $G - E'$, le sous-graphe H tel que $V(H) = V(G)$ et $E(H) = E(G) \setminus E'$. Le graphe $G - \{e\}$ est également noté $G - e$ pout toute arête e.

Le *graphe inverse* d'un graphe orienté D, noté $\overline{D} = (V(D), \overline{A})$ ou $\overline{A} = \{(v, u) \mid (u, v) \in A\}$. Un graphe orienté D est dit *symétrique* si $D = \overline{D}$.

L'*orientation* d'un graphe G est un digraphe D obtenu en subsituant chaque arête $\{x, y\}$ de G par un des deux arcs (x, y) et (y, x).

1.2 Voisinages et degrés

Soit G un graphe. Deux sommets u et v sont *adjacents* ou *voisins* s'ils sont reliés par une arête. Deux arêtes sont *adjacentes* si elles ont une extrémité en commun. Une arête e et un sommet v sont *incidents* si $v \in e$.

Le *voisinage* d'un sommet v, noté $N_G(v)$, est l'ensemble des sommets de G voisins de v. Le *degré* d'un sommet v, noté $d_G(v)$ est le nombre d'arêtes incidentes à v. Parfois pour alléger les notations et lorsqu'il n'y a pas d'ambiguité sur le graphe G, on note le voisinage $N(v)$ et le degré $d(v)$. Notons que $d(v) = |N(v)|$. Le *degré maximal* de G est $\Delta(G) = \max\{d(v), v \in V(G)\}$. Un graphe est *k-régulier* si tous ses sommets sont de degré k. Un graphe 3-régulier est aussi appelé *cubique*.

Proposition 1.1. *Soit $G = (V, E)$ un graphe, alors*

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

Démonstration. En comptant le nombre ext d'extrémités d'arêtes. Comme une arête a deux extrémités $ext = 2|E|$. Comme un sommet v est l'extrémité de $d(v)$ arêtes alors $ext = \sum_{v \in V} d(v)$. □

Le *degré moyen* d'un graphe G est $Ad(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d_G(v)}{|V(G)|}$. Par la Proposition 1.1, $Ad(G) = \frac{2|E(G)|}{|V(G)|}$.

Le *degré moyen maximal* d'un graphe G, noté $Mad(G)$, est le degré moyen maximal d'un sous-graphe H de G. $Mad(G) := max\{Ad(H), H \text{ sous-graphe de } G\}$.

Soit D un digraphe et $a = (u, v)$ un arc. On dit que a est un arc *sortant* en u et *entrant* en v. Si $u = v$ alors a et une *boucle*. Le sommet v est un *voisin externe* de u et u un *voisin interne* de v.

Le *voisinage externe* (resp. *voisinage interne*) d'un sommet x, noté $N_D^+(x)$, (resp. $N_D^-(x)$) est l'ensemble des voisins externes (resp. internes) de x. Le *degré externe* (resp. *degré interne*) d'un sommet x, noté $d_D^+(x)$ (resp. $d_D^-(x)$) est le nombre de voisins externes (resp. internes) de x.

Le *degré externe maximal* de G est $\Delta^+(G) = \max\{d^+(v), v \in V(G)\}$ et le *degré interne minimal* de G est $\Delta^-(G) = \max\{d^-(v), v \in V(G)\}$

Proposition 1.2. *Soit $D = (V, A)$ un digraphe, alors*

$$\sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v) = |A|$$

1.3 Marches, chemins et cycles

Soit G un graphe ou un digraphe. Une *marche* dans G est une suite finie (non vide) $W = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 \dots e_k v_k$ alternant sommets et arêtes telle que, pour $1 \leq i \leq k$, $e_i = [v_{i-1}, v_i]$. Le sommet v_0 est appelé *début* de W et v_k *fin* de W. On dit que W *relie* v_0 à v_k et que W est une (v_0, v_k)*-marche*. Notons qu'une marche est entièrement déterminée par la suite de ses sommets. Très souvent, nous noterons $W = (v_0, v_1, \dots, v_k)$. La *longueur* d'une marche est son nombre d'arêtes. Une marche est dite *paire* (resp. *impaire*) si sa longueur est paire (resp. impaire).

Une marche ayant même début et même fin est dite *fermée*. Une marche dont les arêtes sont toutes distinctes est un *parcours*. Un parcours fermé est un *tour*. Une marche dont tous les sommets sont distincts est un *chemin* si elle n'est pas fermée et un *cycle* sinon.

On peut également voir un chemin comme un graphe $P = (V, E)$ de la forme $V = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $E = \{[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]\}$, avec les x_i tous distincts. De même, un *cycle* est un graphe $C = (V, E)$ de la forme $V = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $E = \{[x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n], [x_n, x_1]\}$, avec les x_i tous distincts.

Proposition 1.3. *Soit G un graphe ou un digraphe.*
(i) Il y a une (u, v)-marche dans G si et seulement si il y a un (u, v)-chemin.
(ii) Si une arête est dans un parcours fermé alors elle est dans un cycle.
(iii) Il y a une marche fermée impaire si et seulement si il y a un cycle impair.

Un graphe sans cycle est une *forêt*.

Un graphe G est *connexe* si pour tous sommets u, v, il existe un (u, v)-chemin dans G. Les *composantes connexes* d'un graphe G sont ses sous-graphes connexes maximaux.

Un graphe connexe sans cycle est un *arbre*. Les *feuilles* d'un arbre T sont les sommets de degré 1 dans T.

Proposition 1.4. *Les quatre propositions suivantes sont équivalentes :*

(i) T est un arbre ;

(ii) entre deux sommets de T il existe un unique chemin ;

(iii) T est connexe minimal, i. e. T est connexe et $T - e$ ne l'est pas quelle que soit $e \in E(T)$;

(iv) T est acyclique maximal, i. e. T ne contient pas de cycle mais $T + xy$ en contient pour tout couple (x, y) de sommets non adjacents.

Corollaire 1.5. *Un graphe est connexe si et seulement si il possède un arbre couvrant.*

1.4 Graphes bipartis

Un ensemble S de sommets d'un graphe est un *stable* ou *ensemble indépendant* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de S, uv n'est pas une arête. La *stabilité* d'un graphe G, notée $\alpha(G)$ est la taille d'un plus grand stable de G.

A l'inverse, un ensemble S de sommets d'un graphe est une *clique* si pour toute paire $\{u, v\}$ de sommets de S, uv est une arête. La *taille maximale d'une clique* d'un graphe G, notée $\omega(G)$, est le nombre maximal de sommets d'une clique de G.

Une *bipartition* d'un graphe G est une partition (A_0, A_1) de $V(G)$ en deux stables. Autrement dit toutes les arêtes de G ont une extrémité dans A_0 et une extrémité dans A_1. On note souvent un graphe biparti sous la forme $G = ((A_0, A_1), E)$.

Proposition 1.6. *Un graphe est biparti si et seulement si il ne contient pas de cycle impair.*

Démonstration. Il suffit de le montrer pour les graphes connexes. Soit G un graphe connexe. Si G contient un cycle impair C alors il n'est clairement pas biparti.

Supposons maintenant que G ne contient pas de cycle impair. Soit v_0 un sommet de G. Soit A_0 (resp. A_1) l'ensemble des sommets à distance paire (resp. impaire) de v_0 dans G. Ceci est bien défini car aucune des distances ne vaut $+\infty$ puisque G est connexe.

Nous allons prouver que (A_0, A_1) est une bipartition de G. Soit uv une arête de G. Soit P_u un plus court chemin reliant u à v_0 et P_v un plus court chemin reliant v à v_0. La marche fermée (P_u, P_v, v, u) est nécessairement de longueur paire d'après la Proposition 1.3. Ainsi P_u et P_v ont des longueurs de parités différentes. L'arête uv a donc une extrémité dans chacun des A_i. □

Notons que dans un graphe biparti, pour deux sommets u et v fixés, tous les (u, v)-chemins sont de même parité.

L'algorithme suivant donne une bipartition d'un graphe connexe s'il est biparti et répond qu'il n'est pas biparti sinon. Cela revient à construire un arbre en largeur et à vérifier que les arêtes joignent des sommets situés dans des niveaux de parités distinctes. En fait, il suffit de vérifier qu'il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets d'un même niveau. En effet, par définition, lors d'un parcours en largeur, les arêtes du graphe relient des sommets de niveaux identiques ou consécutifs.

Algorithme 1.1 (Détermination d'une bipartition)**.**
1. Marquer tous les sommets $m(v) := -1$ et marquer un sommet $m(x) := 0$, $N := \{x\}$.
2. Si N est non vide, alors retirer un sommet v de N.
   Pour tout sommet w adjacent à v
   - Si $m(w) = m(v)$ terminer et répondre "G n'est pas biparti" ;
   - Sinon si $m(w) = -1$, marquer w avec $m(v) + 1 \; mod \; 2$, ajouter w à N ; et aller en 2.
3. Sinon N est vide, mettre dans $A_i, i = 0, 1$ l'ensemble des sommets marqués i, répondre "G est biparti de bipartition" (A_0, A_1).

Complexité de l'algorithme 1.1 : La complexité de cet algorithme est $O(|E|)$. En effet, chaque arête est examinée au plus deux fois (une pour chaque extrémité) et à chaque examen un nombre constant d'opérations est effectué.

1.5 Graphes Eulériens

Définition 1.7. Dans un graphe G, un parcours est dit *Eulérien* s'il passe une fois et une seule par chaque arête de G. Un graphe est *Eulérien* s'il contient un tour Eulérien.

Théorème 1.8 (Euler 1736)**.** *Un graphe connexe est Eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.*

Démonstration. La condition est évidemment nécessaire. Un sommet apparaissant k fois (ou $k + 1$ si c'est le début et la fin) dans un tour Eulérien doit avoir degré $2k$.

Montrons qu'elle est suffisante. Nous utilisons l'algorithme suivant :

Algorithme 1.2.
1. Initialiser $W := v$ pour un sommet v quelconque.
2. Si toutes les arêtes de G sont dans W terminer.
3. Sinon une arête n'est pas dans $W = v_0 e_1 v_1 \dots e_l v_l$,
4. Si une arête $e = v_l v_{l+1}$ n'est pas dans W, $W := v_0 e_1 v_1 \dots e_l v_l e v_{l+1}$; aller en 2.
5. Sinon toutes les arêtes incidentes à v_l sont dans W. Comme il y en a un nombre pair, $v_0 = v_l$. G a alors une arête $e \notin W$ incident à un sommet v_i de G, disons $e = v_i u$. $W := v_i e_{i+1} v_{i+1} \dots e_l v_l e_1 v_1 \dots e_i v_i e u$; aller en 2.

□

Complexité de l'algorithme 1.2

Le cycle Eulérien sera représenté à l'aide d'une fonction $next$ telle qu'à la fin de l'algorithme, $next(e)$ soit l'arête qui suit immédiatement e dans le tour. A chaque fois que l'on insère une arête e, on change la valeur de $next$ pour au plus 2 arêtes : celle de l'arête $e_l = v_{l-1}v_l$ si $e = v_l v_{l+1}$ n'est pas dans W, ou celles de $v_{i-1}v_i$ et $e_l = v_{l-1}v_l$ quand $e = v_i u$.

De plus une arête est insérée une seule fois donc la complexité est en $O(E)$.

1.6 Exercices

Exercice 1.1. Construire un graphe cubique à 11 sommets. (*cubique :* $d(v) = 3$ pour tout sommet v.)

Exercice 1.2. Montrer que tout graphe à $n \geq 2$ sommets possède deux sommets de même degré.

Exercice 1.3. Soient u et v deux sommets d'un graphe G. Montrer que si u et v sont de degré impair et tous les autres sommets de degré pair, alors il existe un (u, v)-chemin.

Exercice 1.4. Soit G un graphe à au moins 4 sommets tel que le graphe obtenu en enlevant n'importe quel sommet est régulier. Montrer que G est soit le graphe complet K_n soit le graphe vide à n sommets.

Exercice 1.5. Soit H un graphe à $n > k$ sommets. Montrer que si $|E(H)| > (k-1)(n-k/2)$ alors H a un sous-graphe de degré minimum au moins k.

Exercice 1.6. Montrer la Proposition 1.3.

Exercice 1.7. Montrer la Proposition 1.4.

Exercice 1.8. Soit G un graphe connexe. Montrer qu'il existe une orientation de G tel que le degré externe de chaque sommet soit pair si et seulement si G a un nombre pair d'arêtes.

Exercice 1.9.

1) Soit G un graphe tel que $d(v) \geq 2$ pour tout $v \in V(G)$. Montrer que G contient un cycle.

2) En déduire qu'un arbre d'ordre au moins 2 a toujours une feuille. Montrer que pour tout arbre T, $|E(T)| = |V(T)| - 1$.

3) Montrer qu'un arbre d'ordre au moins 2 a toujours deux feuilles et que s'il n'a pas de sommet de degré 2 alors il a au moins $|V(T)|/2 + 1$ feuilles.

Exercice 1.10 (Propriété de Helly pour les arbres)**.** Soit $T_1, \dots, T_k$ des sous-arbres d'un arbre T. Montrer que si $T_i \cap T_j \neq \emptyset$ pour tout i, j, alors $\bigcap_{i=1}^{k} T_i \neq \emptyset$.

Exercice 1.11. Soit D un digraphe sans cycle. Montrer que D a un sommet v tel que $d^-(v) = 0$.

Exercice 1.12. Soit $G = (V, E)$ un graphe. Montrer que :
(1) Si $|E| \geq |V|$ alors G contient un cycle.
(2) Si $|E| \geq |V| + 4$ alors G contient deux cycles arêtes-disjoints.

Exercice 1.13. Soit G un graphe dont les sommets sont de degré au moins 3. Montrer que G contient un cycle pair.

Exercice 1.14 (Maris jaloux).
Trois maris jaloux et leurs femmes veulent traverser une rivière. Pour cela, ils ne disposent que d'un petit bateau qui ne transporter qu'au plus deux personnes à la fois. Aucun des maris n'autorise sa femme à être en compagnie d'un autre homme à moins qu'il ne soit lui même présent. Dessiner le graphe des distributions permises et conseiller les promeneurs sur la manière de traverser la rivière.

Exercice 1.15 (Chien, chèvre, chou).
Un homme veut traverser la rivière avec son chien, sa chèvre et son (énorme) chou. Malheureusement, l'homme ne peut traverser la rivière qu'avec un seul de ceux-ci. De plus, pour des raisons évidentes, l'homme ne peut laisser seuls ni le chien avec la chèvre ni la chèvre avec le chou sur une rive. Dessiner le graphe biparti des situations permises. Comment l'homme doit-il s'y prendre pour traverser la rivière ?

Exercice 1.16. Montrer que deux chemins de longueur maximale dans un graphe connexe ont un sommet en commun.

Exercice 1.17.
Le complémentaire d'un graphe non connexe est-il toujours connexe ?
Le complémentaire d'un graphe connexe est-il toujours non connexe ?

Exercice 1.18.
1) Soit G un graphe connexe, montrer qu'il existe au moins un sommet x tel que le sous-graphe $G - x$ obtenu en supprimant x est connexe.
2) Le résultat reste-t-il vrai pour fortement connexe dans un digraphe ?

Exercice 1.19. Un graphe est dit *sans cerise* s'il n'a pas deux sommets de degré 1 ayant leur voisin commun. Montrer qu'un graphe connexe sans cerise possède deux sommets adjacents u et v tel que le graphe induit par $V(G) \setminus \{u, v\}$ soit connexe.
Ind : On pourra considérer un chemin de longueur maximale

Exercice 1.20. Soit G un graphe connexe et $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ une partition de $V(G)$ telle que $G[V_i]$ soit connexe pour tout $1 \leq i \leq n$. Montrer qu'il existe deux indices i et j tels que $G - V_i$ et $G - V_j$ soient connexes.

Exercice 1.21. Le but de cet exercice est de montrer que pour un graphe à n sommets, m arêtes et k composantes connexes, on a $n - k \leq m \leq \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$.

Soit G un graphe à n sommets et m arêtes.

1) a) Montrer que si G est connexe alors $m \geq n - 1$.
   b) En déduire que si G a k composantes connexes alors $m \geq n - k$.

2) On suppose maintenant que G est le graphe à n sommets et k composantes connexes ayant le plus grand nombre d'arêtes.
   a) Montrer que toutes les composantes connexes de G sont des graphes complets (i.e. forment des cliques).
   b) Montrer que si G a deux composantes connexes (ou plus) alors l'une d'entre elles n'a qu'un seul sommet.
   c) En déduire que G a $\frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$ arêtes.

Exercice 1.22. Soit a le sommet d'un graphe connexe G. Montrer que G est biparti si et seulement si $dist(a, b) \neq dist(a, c)$ pour toute arête bc.

Exercice 1.23.
1) Montrer que les arbres sont bipartis.
2) Prouver que chaque arbre a une feuille dans la partie de sa bipartition de plus grande cardinalité.

Exercice 1.24. Montrer qu'un graphe biparti G possède au plus $|V(G)|^2/4$ arêtes et donner un graphe atteignant cette borne.

Exercice 1.25. Montrer qu'un graphe est biparti si et seulement si tout sous-graphe H de G a un ensemble indépendant taille au moins $|V(H)|/2$.

Exercice 1.26. Montrer qu'un graphe connexe admet un parcours Eulérien si et seulement si il a zéro ou deux sommets de degré impair.

Exercice 1.27. Montrer qu'un graphe orienté connexe tel que $\forall x \in V, d^+(x) = d^-(x)$ admet un tour Eulérien.