# Chapitre 4

# Couplages dans les graphes

Deux arêtes sont *indépendantes* si elles n'ont pas d'extrémité en commun. Un ensemble $M$ d'arêtes indépendantes de $G$ est appelé *couplage*. Les sommets incidents à une arête de $G$ sont les sommets *couplés* ou *couverts* par $M$. Si $U$ est un ensemble des sommets couplés par $M$, on dit que $M$ *sature* $U$. Les sommets de $V(G) \setminus U$ sont dits *exposés*.

Dans ce chapitre, nous considérons le problème de la recherche d'un *couplage maximum* i.e. de cardinalité maximale. En particulier, nous essaierons de caractériser les graphes $G$ qui possèdent un *couplage parfait* ou *1-facteur*, i. e. un couplage pour lequel tous les sommets de $G$ sont couplés.

Soit $G$ un graphe et $M$ un couplage. Un chemin $M$*-alternant* dans $G$ est un chemin dont les arêtes sont alternativement dans $E \setminus M$ et de $M$. Un chemin $M$-alternant dont le début et la fin sont des sommets exposés est dit $M$*-augmentant*. On peut utiliser un chemin $M$-augmentant $P$ pour transformer $M$ en un couplage plus grand (voir Figure 4.1) : en effet, si $P$ est un chemin $M$-alternant alors la différence symétrique entre $M$ et $E(P)$

$$M' = M \triangle E(P) = (M \setminus (E(P) \cap M) \cup (E(P) \setminus M)$$

est aussi un couplage. Sa taille $|M'|$ vaut $|M| + 1$ si les deux extrémités de $P$ sont exposées, $|M|$ si une seule des extrémités est exposée et $|M| - 1$ si les deux extrémités sont couvertes.

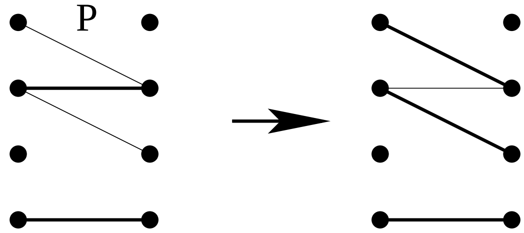



FIG. 4.1 – Augmentation d'un couplage à partir d'un chemin augmentant $P$. Les arêtes en gras sont celles du couplage.

**Théorème 4.1** (Berge 1957). *Soit $M$ un couplage dans un graphe $G$. $M$ est maximum si et seulement si il n'existe pas de chemin $M$-augmentant.*

*Démonstration.* Nous venons de voir que s'il y a un chemin $M$-augmentant, $M$ n'est pas maximum.

Supposons maintenant que $M$ n'est pas maximum et considérons un couplage maximum $M'$. La différence symétrique $Q$ de $M$ et $M'$ est un sous-graphe de degré maximum 2. Ses composantes connexes sont donc des cycles et des chemins où les arêtes de $M$ et $M'$ alternent. Les cycles sont donc de longueur paire et contiennent tous autant d'arêtes de $M$ que d'arêtes de $M'$. Comme $M'$ a plus d'arêtes que $M$, alors un des chemins $P$ contient plus d'arêtes de $M'$ que d'arêtes de $M$. Ainsi $P$ commence et termine par deux arêtes de $M'$ et est donc $M$-augmentant. □

## 4.1 Couplage dans les graphes bipartis

Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti. Si $|A| \leq |B|$, la taille maximale d'un couplage est au plus $|A|$. On cherche donc à savoir s'il existe ou non un couplage saturant $A$. S'il existe un tel couplage $M$, pour chaque sous-ensemble $S$ de $A$, les arêtes de $M$ relient les sommets de $S$ à autant de sommets de $B$.

Ainsi, nous avons une condition nécessaire pour l'existence d'un couplage saturant $A$ :

$$|N(S)| \geq |S| \qquad \text{pour tout } S \subset A \tag{4.1}$$

où $N(S)$ est l'ensemble des sommets de $G \setminus S$, voisins d'un sommet de $S$. L'ensemble $N(S)$ est appelé *voisinage de* $S$ : $N(S) = \bigcup_{s \in S} N(s) \setminus S$.

Une telle condition est en fait suffisante :

**Théorème 4.2** (Hall 1935)**.** *Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti. $G$ a un couplage saturant $A$ si et seulement si $|N(S)| \geq |S|$ pour tout $S \subset A$.*

Nous donnons deux preuves de ce théorème. La première utilise des principes élémentaires alors que la seconde est basée sur les chemins augmentants.

**Première preuve :** Par récurrence sur $|A|$. Pour $|A| = 1$ le résultat est vrai. Supposons que $|A| \geq 2$ et que la condition (4.1) soit suffisante pour un couplage saturant $A'$ lorsque $|A'| < |A|$.

**i)** Supposons que $|N(S)| \geq |S| + 1$ pour tout sous-ensemble strict ($\neq S$) non-vide $S$ de $A$. Prenons une arête $ab$ de $G$ et considérons le graphe $G' = G - \{a, b\}$. Alors tout ensemble $S \subset A \setminus \{a\}$ satisfait :

$$|N_{G'}(S)| \geq |N_G(S)| - 1 \geq |S|.$$

Donc par hypothèse de récurrence, $G'$ a un couplage $M'$ saturant $A \setminus \{a\}$. Le couplage $M' \cup \{ab\}$ est alors un couplage de $G$ saturant $A$.

**ii)** Supposons maintenant qu'il existe un sous-ensemble propre non-vide $A'$ de $A$ tel que $|N(A')| = |A'|$. Par hypothèse de récurrence, le sous-graphe $G'$ induit par $A' \cup N(A')$ admet un couplage $M'$ saturant $A'$.

Considérons maintenant le graphe $G'' = G - G'$. Pour tout ensemble $S \subset A \setminus A'$,

$$|N_{G''}(S)| \geq |N_G(S \cup A')| - |N_G(A')| \geq |S \cup A'| - |A'| \geq |S|.$$

Donc par hypothèse de récurrence, $G''$ admet un couplage $M''$ saturant $A \setminus A'$. L'union de $M'$ et $M''$ est un couplage de $G$ saturant $A$. □

**Seconde preuve :** La preuve est algorithmique : Etant donné un couplage de taille maximum $M$ qui ne couvre pas $a_0$ on retourne un ensemble $S \subset A$ tel que $|N(S)| < |S|$. Posons $A_0 = \{a_0\}$ et $B_0 = N(a_0)$. Notons que tous les sommets de $B_0$ sont couverts (si $b_0 \in B_0$ n'est pas couvert on peut ajouter l'arête $a_0b_0$ au couplage). Si $N(B_0) = \emptyset$, on a trouvé un ensemble $S = A_0$ tel que $|N(S)| < |S|$ et l'algorithme se termine. Sinon $N(B_0)$ est couplé avec au moins $|B_0|$ sommets de $A$ distincts de $a_0$. On considère $A_1 = N_M(B_0) \cup \{a_0\}$ avec $N_M(B_0)$ l'ensemble des sommets couplés aux sommets de $B_0$. On a $|A_1| = |B_0| + 1 \geq |A_0| + 1$. On considère alors $B_1 = N(A_1)$. A nouveau, aucun des sommets $B_1$ ne peut être exposé sinon il existe un chemin $M$-augmentant. Si $|B_1| < |A_1|$, l'algorithme se termine et conclut que $|N(A_1)| < |A_1|$ ; sinon on pose $A_2 = N_M(B_1) \cup \{a_0\}$ et $|A_2| \geq |B_1| + 1 \geq |A_1| + 1$. Et ainsi de suite. On applique donc l'algorithme suivant jusqu'à terminaison.

1. $A_0 = \{a_0\}$, $i = 0$ ;
2. Si $|B_i = N(A_i)| < |A_i|$ terminer et retourner $A_i$ ;
3. Sinon faire $A_{i+1} = A_i \cup N_M(B_i)$, $i = i + 1$ et aller Etape 2.

L'algorithme termine forcément, car la suite $|A_i|$ est strictement croissante. Il retourne donc un ensemble $S \subset A$ tel que $|N(S)| < |S|$. □

En fait, la condition de Hall peut être généralisée pour l'existence d'un couplage de taille quelconque :

**Théorème 4.3.** *Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti et $k \in \mathbb{N}$. $G$ a un couplage de cardinalité $k$ si et seulement si $|N(S)| \geq |S| - |A| + k$ pour tout $S \subset A$.*

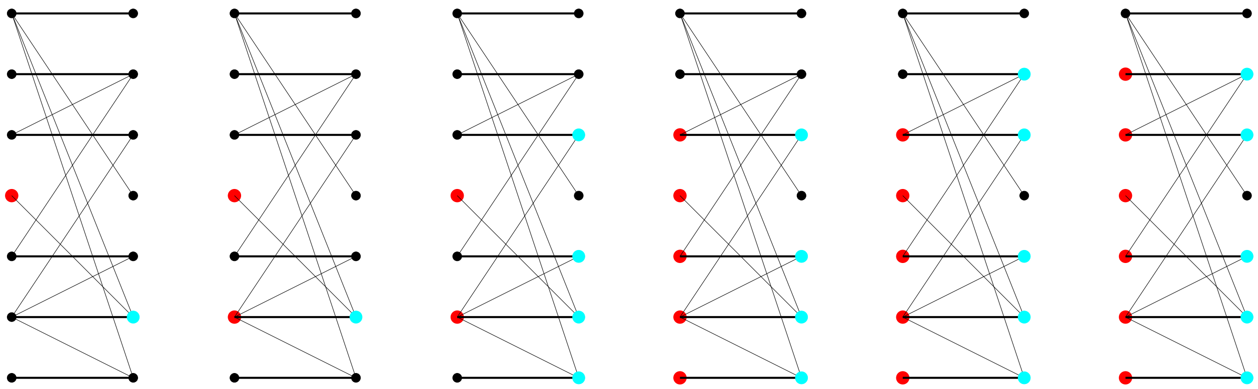


FIG. 4.2 – Algorithme retournant un ensemble tel que $|N(S)| < |S|$

*Démonstration.* Ajoutons $|A| - k$ nouveaux sommets à $B$, chacun étant relié à tous les sommets de $A$. Ainsi $|N(S)| \geq |S|$ pour tout $S \subset A$. D'après le théorème de Hall, le nouveau graphe a donc un couplage de $A$, et au plus $|A| - k$ arêtes (celles incidentes à un nouveau sommet) ne sont pas dans $G$. □

**Corollaire 4.4.** *Si $G$ est un graphe biparti $k$-régulier ($k \geq 1$) alors $G$ a un couplage parfait.*

*Démonstration.* Soit $(A, B)$ la bipartition de $G$. Si $G$ est $k$-régulier alors clairement $|A| = |B|$. Donc tout couplage de $A$ est un couplage parfait de $G$.

Considérons $S \subset A$. Il est incident à $k|S|$ arêtes. Et celles-ci font partie des $k|N(S)|$ arêtes incidentes à $N(S)$. Ainsi $k|S| \leq k|N(S)|$.

$G$ satisfait donc la condition du Théorème de Hall et admet donc un couplage de $A$ qui est un couplage parfait de $G$. □

En utilisant la méthode de la seconde preuve du Théorème de Hall, nous donnons maintenant un algorithme qui étant donné un graphe biparti $((A, B), E)$ rend soit un couplage saturant $A$, soit un ensemble $S$ tel que $|N(S)| < |S|$. Cet algorithme, connu comme la *méthode hongroise*, est basé sur la gestion de la suite $a_o, b_1, a_1, b_2, a_2, \ldots$ sous forme d'un arbre $T$.

**Algorithme 4.1** (Méthode hongroise)**.**
0. Commencer avec un couplage $M$ quelconque.
1. Si $M$ sature $A$, renvoyer $M$. Sinon soit $a_0$ un sommet exposé de $A$. Soit $T$ l'arbre réduit à $a_0$. On pose $A' = V(T) \cap A$ et $B' = V(T) \cap B$.
2. Si $N(A') = B'$ alors $|N(A')| < |A'|$ car $|A'| = |B'| + 1$. Renvoyer $S = A'$, $G$ n'admet pas de couplage saturant $A$. Sinon soit $b \in N(A') \setminus B'$ et $a'$ un de ses voisins dans $A'$.
3. Si $b$ est couplé par $M$ disons avec $a$, faire croitre $T$ en ajoutant les arêtes $a'b$ et $ba$. (Voir Figure 4.3). Alors $A'$ devient $A' \cup \{a\}$ et $B'$, $B' \cup \{b\}$. Aller Etape 2. Sinon $P$, le $(a_0, b)$-chemin dans $T$, est un chemin $M$-augmentant. Remplacer $M$ par $M \triangle E(P)$. Aller Etape 1.

## 4.2 Couplage et couverture

Nous allons maintenant présenter une sorte de dualité pour le couplage.

**Définition 4.5.** Soit $G = (V, E)$ un graphe. Un ensemble $K \subset V$ est une *couverture* de $E$ si toute arête de $G$ est incidente à un sommet de $K$.

Soit $K$ la couverture d'un graphe. Alors pour tout couplage $M$, $K$ contient au moins une extrémité de chaque arête de $M$. Donc $|M| \leq |K|$. Ainsi la cardinalité maximale d'un couplage est au plus égale à la cardinalité minimale d'une couverture. Pour un graphe biparti, il y a égalité.

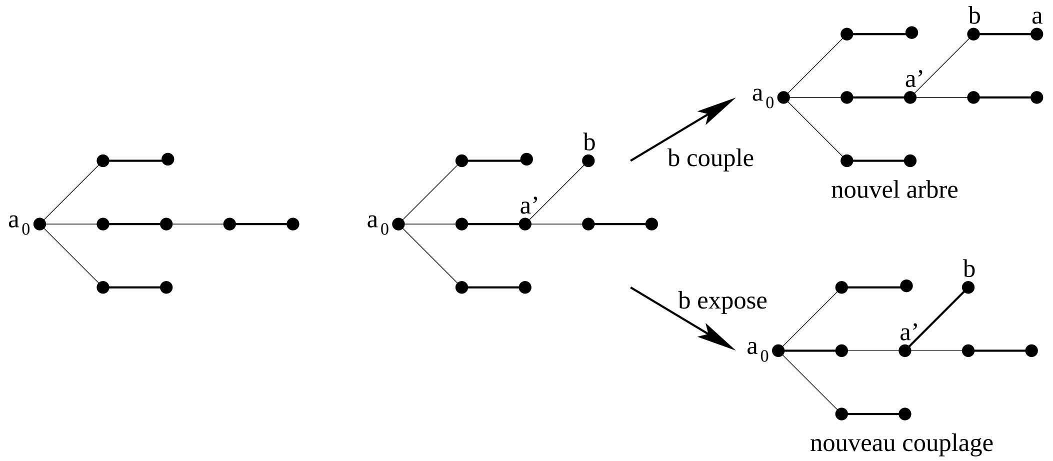



FIG. 4.3 – Etape 3 de la méthode hongroise

**Théorème 4.6** (König 1931, Egerváry 1931)**.** *Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti. La cardinalité maximum d'un couplage est égale à la cardinalité minimum d'une couverture.*

*Démonstration.* Soit $M$ un couplage maximum, $U$ l'ensemble des sommets exposés de $A$ et $V'$ l'ensemble des sommets de $G$ reliés à $U$ par des chemins $M$-alternants. Posons $A' = A \cap V'$ et $B' = B \cap V'$. Voir Figure 4.4. L'ensemble $B'$ est saturé par $M$. En effet, si un sommet $b \in B'$ n'est pas couplé alors le

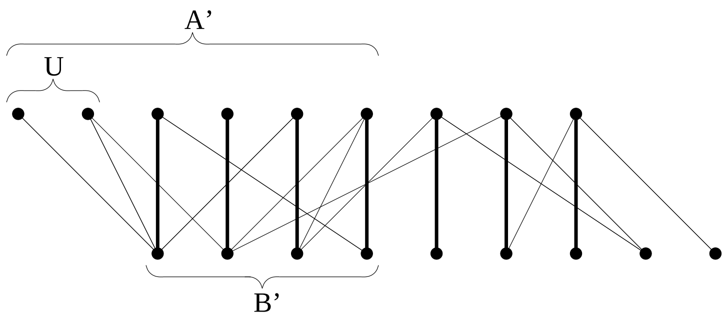



FIG. 4.4 –

chemin $M$-alternant qui le relie à un sommet de $U$ est un chemin $M$-augmentant et le Théorème 4.1 contredit la maximalité de $M$. De plus, $N(A') = B'$ par définition de $V'$. Soit $K = B' \cup (A \setminus A')$. Alors toute arête de $G$ a une extrémité dans $K$. Ainsi $K$ est une couverture de $G$ et $|K| = |M|$ car $A \setminus A'$ est l'ensemble des sommets de $A$ qui sont couplés avec des sommets dans $B \setminus B'$. □

On peut déduire le Théorème de Hall de ce théorème :

**Preuve du Théorème 4.2** : Si $G$ n'a pas de couplage saturant $A$, alors par le Théorème 4.6, il a une couverture $K$ avec moins de $|A|$ sommets. Posons $K = A' \cup B'$ avec $A' \subset A$ et $B' \subset B$. Alors $|A'| + |B'| = |K| < |A|$ donc

$$|B'| < |A| - |A'| = |A \setminus A'|$$

Par définition de couverture, il n'y a pas d'arêtes entre $A \setminus A'$ et $B \setminus B'$ donc

$$|N(A \setminus A')| \leq |B'| < |A \setminus A'|$$

L'ensemble $A \setminus A'$ contredit donc la condition de Hall. □

## 4.3 Couplage de poids maximum

Les résultats précédents sur la recherche d'un couplage maximum dans les graphes bipartis, se généralisent à la recherche d'un couplage de poids maximum dans les graphes bipartis valués. Notons que quitte à supprimer les arêtes de poids négatifs, nous pouvons supposer que toutes les arêtes sont valuées positivement.

La notion de couverture se généralise également au cas valué.

**Définition 4.7.** Soit $G$ un graphe valué, une *couverture (pondérée)* est une application $c : V(G) \to \mathbb{R}^+$ telle que pour toute arête $xy$ de $G$, $c(x) + c(y) \geq w(xy)$. Le *coût* d'une couverture $c$ de $G$ est $c(G) = \sum_{v \in V(G)} c(v)$.

Soit $M$ un couplage et $c$ une couverture d'un graphe valué $(G, w)$. Alors le poids de $c$ est au moins aussi grand que le poids de $M$. En effet, en sommant les inégalités $c(x) + c(y) \geq w(xy)$ sur toutes les arêtes de $M$, on obtient $c(G) \geq w(M)$.

Le Théorème de König-Egerváry se généralise au cas valué :

**Théorème 4.8.** *Dans un graphe biparti valué, le coût minimum d'une couverture est égal au poids maximum d'un couplage.*

Afin de prouver ce théorème nous allons donner un algorithme qui trouve un couplage $M$ et une couverture $c$ telle que $c(G) = w(M)$. Notons qu'alors pour toute arête $xy$ de $M$, on a $c(x)+c(y) = w(xy)$.

**Définition 4.9.** Soit $c$ une couverture d'un graphe biparti valué $(G, w)$. L'*excés* d'une arête $xy$ est $c(x) + c(y) - w(xy)$. Le *graphe d'égalité* de $c$, noté $G_c$, est le graphe dont les sommets sont ceux de $G$ et les arêtes les paires $xy$ d'excès nul.

Quitte à ajouter des sommets et des arêtes de poids nul, on peut supposer que le graphe biparti que nous considérons est le graphe est $K_{n,n}$.

**Algorithme 4.2.**

0. Initialisation : Prendre la couverture $c$ définie par $c(a) = \max\{w(ab), ab \in E\}$ si $a \in A$ et $c(b) = 0$ si $b \in B$.
1. Trouver un couplage maximum $M$ dans $G_c$.
2. Si $M$ est parfait rendre "Le couplage maximum est" $M$ "et la couverture minimum est" $c$.
3. Sinon soit $K$ une couverture de taille $|M|$ dans $G_c$. Posons $R = A \cap K$ et $T = B \cap K$. Soit $\epsilon = \min\{c(a) + c(b) - w(ab) \mid a \in A \setminus R, b \in B \setminus T\}$. Pour tout $a \in A \setminus R$, $c(a) := c(a) - \epsilon$ et pour tout $b \in B \setminus T$, $c(b) := c(b) + \epsilon$. Retourner en 1.

## 4.4 Couplage dans les graphes généraux

Etant donné un graphe $G$, on note $imp(G)$ le nombre de composantes connexes de $G$ d'ordre impair. On voit facilement que si $G$ admet un couplage parfait alors

$$imp(G - S) \leq |S| \qquad \text{pour tout } S \subset V(G).$$

En effet, s'il y a un couplage parfait, chaque composante impaire $C$ de $G - S$ contient au moins un sommet qui est couplé avec un sommet qui n'est pas dans $C$. Et ce sommet est forcément dans $S$ car il n'y a pas d'arêtes entre les différentes composantes de $G - S$.

Cette condition nécessaire est en fait également suffisante :

**Théorème 4.10** (Tutte 1947)**.** *Un graphe $G$ admet un couplage parfait si et seulement si $imp(G - S) \leq |S|$ pour tout $S \subset V(G)$.*

*Démonstration.* Soit $G = (V, E)$ un graphe n'ayant pas de couplage parfait. Nous allons montrer que $G$ a un ensemble $S$ pour lequel $imp(G - S) > |S|$.

Soit $G'$ le surgraphe de $G$ sans couplage parfait maximal pour le nombre d'arêtes. Pour tout $S$, une composante de $G' - S$ est l'union de composantes de $G - S$. Donc une composante d'ordre impair de $G' - S$ contient une composante d'ordre impair de $G$. Il suffit donc de trouver un *mauvais* ensemble $S$ i. e. pour lequel $imp(G' - S) > |S|$.

Si $G'$ contient un mauvais ensemble, clairement celui-ci vérifie la propriété $(\star)$.

**Propriété $(\star)$** : *$S$ est complet, toutes les composantes de $G' - S$ sont des complets et chaque sommet de $S$ est adjacent à tous les sommets de $G' - S$.*

A l'inverse, si un ensemble vérifie la propriété $(\star)$ alors $S$ ou $\emptyset$ est mauvais. En effet, si $\emptyset$ n'est pas mauvais alors $|V(G)|$ est pair. Si, de plus, $S$ n'est pas mauvais alors on peut coupler (de manière disjointe) un sommet de chaque composante impaire avec un sommet de $S$ et compléter ce couplage en un couplage parfait du graphe.

Soit $S$ l'ensemble des sommets qui sont adjacents à tous les sommets hormis eux-même. Nous allons montrer par l'absurde que $S$ satisfait $(\star)$ et donc est mauvais.

Si $S$ ne satisfait pas $(\star)$, alors une composante de $G - S$ contient deux sommets $a$ et $a'$ non adjacents. Soit $a$, $b$ et $c$ les trois premiers sommets sur un plus court $(a, a')$-chemin dans cette composante. Alors $ab, bc \in E(G')$ et $ac \notin E(G')$. Comme $b$ n'est pas dans $S$, un sommet de $G'$, disons $d$, n'est pas adjacent à $b$. Par maximalité de $G'$, $G' + ac$ contient un couplage parfait $M_1$ et $G' + bd$ a un couplage parfait $M_2$. Notons que $ac \in M_1$ et $bd \in M_2$.
Le graphe composé des arêtes de $M_1 \cup M_2$ est une union de cycles pairs alternant les arêtes de $M_1$ et $M_2$. Soit $C$ le cycle contenant $bd$. Si $C$ ne contient pas l'arête $ac$ alors en remplaçant les arêtes de $E(C) \cap M_2$ par les arêtes de $E(C) \cap M_1$ dans $M_2$, on obtient un couplage parfait de $G'$ ce qui est une contradiction. Si $C$ contient $ac$ alors soit $P$ le chemin dans $C - bd$ issu de $d$ et dont la dernière arête est $ac$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $a$ est la fin de $P$. Soit $C'$ le cycle obtenu à partir de $P - a$ en rajoutant les arêtes $bc$ et $bd$. Remplaçant les arêtes de $E(C') \cap M_2$ par les arêtes de $E(C) \setminus M_2$ dans $M_2$, on obtient un couplage parfait de $G'$, ce qui est une contradiction. □

## 4.5 Couverture en chemins

Revenons un instant sur le Théorème de König-Egerváry, Théorème 4.6. Si on prend un graphe biparti $G = ((A, B), E)$ et que l'on oriente ses arêtes de $A$ vers $B$, ce théorème nous dit combien de chemins (orientés) disjoints sont nécessaires pour couvrir tous les sommets de $G$ : en effet, tous les chemins sont de longueur 0 ou 1, et le nombre de chemins d'une telle "couverture" est le plus petit possible lorsqu'il contient le plus grand nombre de chemins de longueur 1, c'est à dire un couplage de cardinalité maximale.

Dans cette section, nous montrons traitons de la question plus gńérale suivante : étant donné un digraphe (pas nécessairement biparti), combien de chemins sont nécessaires pour couvrir tous ses sommets ?

**Définition 4.11.** Une *couverture en chemins* d'un graphe est un ensemble de chemins disjoints couvrant tous ses sommets. On peut voir cela comme une forêt couvrante dont toutes les composantes sont des chemins.

On note par $\alpha(G)$ la cardinalité maximale d'un stable de $G$.

**Théorème 4.12** (Gallai & Milgram 1960)**.** *Tout graphe orienté $G$ a une couverture en au plus $\alpha(G)$ chemins disjoints.*

*Démonstration.* Soit $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux couvertures en chemins d'un même digraphe. On dit que $\mathcal{P}_1 < \mathcal{P}_2$ si $\{fin(P) \mid P \in \mathcal{P}_1\} \subset \{fin(P) \mid P \in \mathcal{P}_2\}$ et $|\mathcal{P}_1| < |\mathcal{P}_2|$.

Nous allons montrer par récurrence, que si $\mathcal{P}$ est une couverture en chemins minimale pour $<$, alors il y a un stable avec un sommet dans chaque chemin de $\mathcal{P}$.

Soit donc $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_m\}$ une couverture en chemins minimale pour $<$. Posons $v_i = fin(P_i)$ pour $1 \leq i \leq m$. Si $\{v_i \mid 1 \leq i \leq m\}$ est un stable alors nous avons le résultat. Sans perte de généralité, nous pouvons donc supposer que $(v_2, v_1)$ est un arc. Comme $(P_2, v_1)$ est un chemin, par minimalité de $\mathcal{P}$, $v_1$ n'est pas l'unique sommet de $P_1$. Soit $v$ le sommet précédant $v_1$ dans $P_1$ et $P'_1 = P_1 - v_1$. Alors $\mathcal{P}' = \{P'_1, P_2, \dots, P_m\}$ est une couverture de $G - v$.

Montrons que $\mathcal{P}'$ est minimale pour $<$. Supposons qu'il existe une couverture $\mathcal{Q}' < \mathcal{P}'$. Si celle-ci contient un chemin $P$ qui finit en $v$ ou $v_2$ alors en remplaçant $P$ par $(P, v_1)$ on obtient une couverture en chemins $\mathcal{Q} < \mathcal{P}$, contradiction. Sinon $\mathcal{Q}'$ a au plus $m-2$ chemins et $\mathcal{Q}' \cup \{(v_1)\} < \mathcal{P}$, contradiction.

Ainsi $\mathcal{P}'$ est minimale et par hypothèse de récurrence, $G - v$ admet un stable ayant un sommet sur chaque chemin. Cet ensemble vérifie également la propriété pour $G$ et $\mathcal{P}$. □

**Définition 4.13.** Un *ensemble ordonné* est un couple $(P, \leq)$ tel que $P$ est un ensemble et $\leq$ une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive sur $P$. Un sous-ensemble de $(P, \leq)$ est une *chaîne* de $P$ si tous ses éléments sont comparables et une *antichaîne* si tous ses éléments sont incomparables.

**Corollaire 4.14** (Dilworth 1950)**.** *Pour tout ensemble ordonné $(P, \leq)$, le nombre minimal de chaînes couvrant $P$ est égal à la cardinalité maximale d'une antichaîne de $P$.*

*Démonstration.* Si $A$ est une antichaîne de cardinalité maximale dans $P$ alors il faut nécessairement $|A|$ chaînes pour couvrir $P$ : une chaîne ne peut en effet contenir qu'un seul élément de $A$. Pour montrer que $|A|$ chaînes suffisent, il suffit d'appliquer le Théorème 4.12 au graphe orienté $(P, E_<)$ avec $E_< = \{(x,y) | x \leq y, x \neq y\}$. □

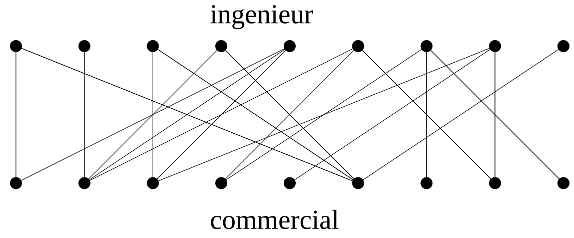
## 4.6 Exercices

**Exercice 4.1.** La fédération française de patinage artistique veut former des couples (une fille et un garçon) de danse sur glace afin de les préparer aux Jeux Olympiques. Six filles et six garçons de niveau suffisant sont volontaires. A cause d'incompatibilité d'humeur entre certaines filles et certains garçons ainsi que de critères esthétiques sensés déplaire aux juges (la fédération ne dispose pas d'assez d'argent pour acheter tous les juges), le tableau suivant d'incompatibilité a été dressé. Une croix dans une case signifie que les deux patineurs ne peuvent pas former de couples.

| | Fille 1 | Fille 2 | Fille 3 | Fille 4 | Fille 5 | Fille 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Garçon 1 | × | × | | × | × | |
| Garçon 2 | | | | | | × |
| Garçon 3 | × | | | × | × | × |
| Garçon 4 | × | | | | × | × |
| Garçon 5 | | × | × | | | |
| Garçon 6 | × | | × | × | × | |

Combien de couples la fédération peut-elle former au maximum ? Justifier votre réponse.

**Exercice 4.2.** Un PDG doit décider de la commercialisation d'un nouveau produit. Il dispose pour cela de plusieurs candidats et doit choisir le meilleur. Pour cela, il fait analyser chacun des produits candidats par une équipe composée d'un ingénieur et un commercial qui élabore un rapport commun. Les équipes sont composées suivant le graphe suivant, une arête correspondant à un produit et ses extrémités aux commercial et ingénieur l'analysant.




Combien de personnes au minimum le PDG doit-il réunir afin d'avoir un rapport sur chaque produit ? (Le rapport peut-être donné aussi bien par l'ingénieur que le commercial d'une équipe.)

**Exercice 4.3.**
1) Montrer qu'un arbre a au plus un couplage parfait.
2) Montrer qu'un arbre $T$ a un couplage parfait si et seulement si $imp(T - v) = 1$ pour tout sommet $v$.

**Exercice 4.4.** Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti.

1) Montrer que le nombre d'arêtes d'un couplage maximal est $|A| - \max_{A' \subset A}\{|A'| - |N(A')|\}$.

2) En déduire que si $|A| = |B| = n$ et $|E(G)| > (k-1)n$ alors $G$ a un couplage de cardinalité $k$.

**Exercice 4.5.** Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti tel que $|N(S)| > |S|$ pour tout sous-ensemble $S$ de $A$ distinct de $\emptyset$ et $A$. Montrer que toute arête de $G$ est un couplage saturant $A$.

**Exercice 4.6.** Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti. Supposons que $S \subseteq A$, $T \subseteq B$ et que $G$ contienne un couplage $M_1$ saturant $S$ et un couplage $M_2$ saturant $T$. Montrer qu'il existe un couplage qui sature à la fois $S$ et $T$.

**Exercice 4.7.** Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti tel que $|A| = |B| = n$ et $\delta(G) \geq n/2$.Montrer que $G$ contient un couplage parfait.

**Exercice 4.8.** Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe biparti et $W$ l'ensemble des sommets de $G$ de degré maximum.
1) Montrer que $G$ contient un couplage saturant $A \cap W$.
2) En déduire qu'il existe un couplage saturant $W$. (*On pourra utiliser l'exercice 4.6*).

**Exercice 4.9.** Un jeu de $m \times n$ cartes avec $m$ valeurs et $n$ couleurs consiste en une carte de chaque valeur dans chaque suite. Les cartes sont disposées sur un tableau à $n$ lignes et $m$ colonnes. Montrer qu'il existe un ensemble de $m$ cartes, une dans chaque colonne, ayant des valeurs distinctes.

**Exercice 4.10.** Montrer qu'un graphe biparti $G$ a un couplage de taille au moins $|E(G)|/\Delta(G)$.

**Exercice 4.11.** Soit $G = ((A, B), E)$ un graphe bipartie connexe tel que $|A| = |B| = 2k + 3$. Montrer que si tous les sommets ont degré $k$ ou $k + 1$ alors $G$ admet un couplage parfait sauf si c'est un graphe bien particulier. Ce graphe deux copies non pleines de $K_{k+2,k+1}$ reliée par une arête.

**Exercice 4.12** (Thérorème de Petersen)**.** 1) Montrer que tout graphe cubique 2-arête-connexe possède un couplage parfait.
2) Donner un exemple de graphe cubique sans couplage parfait.

**Exercice 4.13.** Soit $G$ un graphe connexe d'ordre au moins 4.
1) Montrer que si toute arête de $G$ est dans un 1-facteur de $G$ alors $G$ est 2-connexe.
2) Plus généralement, montrer que si $|V(G)| \geq 2k$ et tout ensemble de $k - 1$ arêtes indépendantes est contenu dans un 1-facteur alors $G$ est $k$-connexe.

**Exercice 4.14.** Soit $G$ un graphe d'ordre au moins $2k + 2$ ayant un 1-facteur.
Montrer que si tout ensemble de $k$ arêtes indépendantes est contenu dans un 1-facteur alors tout ensemble de $k - 1$ arêtes indépendantes est contenu dans un 1-facteur.

**Exercice 4.15.** Soit $D$ un digraphe.

Un *cycle-facteur* de $D$ est un sous-digraphe couvrant $F$ tel que $d^+_F(v) = d^-_F(v) = 1$ pour tout sommet $v \in V(D)$.

Le *biparti associé* à $D$, noté $B(D)$, est le graphe défini par
- $V(B(D)) = V(G) \times \{1, 2\}$ et
- $E(B(D)) = \{((u; 1), (v; 2)) \mid (u, v) \in E(D)\}$

1) Montrer que $D$ a un cycle-facteur si et seulement si $B(D)$ a un couplage parfait.

2) On suppose que pour tout sommet $v$ de $D$, $d^+(v) = d^-(v) = k > 0$. Montrer que $D$ a un cycle-facteur.

3) Soit $G$ un graphe (non-orienté) régulier de degré pair non nul. Un *2-facteur* de $G$ est un sous-graphe couvrant régulier de degré 2. Déduire de la question précédente que $G$ admet un 2-facteur.

**Exercice 4.16.** Deux personnes jouent le jeu suivant sur un graphe. Elles choisissent chacune leur tour des sommets $v_1, v_2, v_3, \dots$ de manière à ce que $v_i$ soit adjacent à $v_{i-1}$ pour $i \geq 0$. Le dernier joueur capable de choisir un sommet convenable gagne. Montrer que le premier joueur a une stratégie gagnante si et seulement si le graphe n'a pas de couplage parfait.

**Exercice 4.17.** Une *griffe* est le graphe $(\{x, y_1, y_2, y_3\}, \{xy_1, xy_2, xy_3\})$. Montrer qu'un graphe pair connexe sans griffe induite admet un couplage parfait.

**Exercice 4.18.** Soit $G$ un graphe connexe avec un nombre pair d'arêtes. Montrer que $E(G)$ se partitionne en $|E(G)|/2$ ensembles de deux arêtes incidentes. On pourra montrer qu'un "line graph" avec un nombre pair de sommets admet un couplage parfait.

**Exercice 4.19.** Soit $G$ un graphe. On note

$\alpha(G)$ la taille maximale d'un stable ;
$\nu(G)$ la taille minimale d'une couverture ;
$\mu(G)$ la taille maximale d'un couplage ;
$\eta(G)$ la taille minimale d'un ensemble d'arêtes couvrant tous les sommets.

1) Montrer $\alpha(G) + \nu(G) = |V(G)|$.
2) Montrer $\mu(G) + \eta(G) = |V(G)|$.
3) En déduire que pour un graphe biparti $\alpha(G) = \eta(G)$.

**Exercice 4.20.** Montrer qu'une suite de $rs+1$ entiers contient une sous-suite croissante de $r+1$ entiers ou une sous-suite décroissante de $s+1$ entiers.