Chapitre 2

Connexité

2.1 Connexité dans les graphes non orientés

Trouver la composante connexe d'un sommet v dans un graphe est facile à faire. Il suffit pour cela de parcourir un arbre couvrant de cette composante en commençant par v. Pour cela, on gère une liste des arêtes à explorer, et une liste des sommets découverts. À chaque étape, on explore une arête ab avec a découvert et on ajoute le sommet b (s'il n'a pas été auparavant découvert) à la liste des sommets découverts. Quand toutes les arêtes ont été explorées, on obtient un arbre qui couvre la composante connexe de v.

Algorithme 2.1 (Parcours)**.**
1. Marquer v et initialiser L à l'ensemble des paires $\{v, u\} \in E$, $S := \{v\}$, $T := \emptyset$.
2. Si L est vide, terminer ; sinon tirer une paire $\{a, b\}$ de L. $L : L \setminus \{\{a, b\}\}$.
3. Si b n'est pas marqué, $S := S \cup \{b\}$, $T := T \cup \{a, b\}$ et ajouter les paires $\{b, u\} \in E$ à L.
4. Aller en 2.

Il existe deux parcours particuliers, qui correspondent à deux ordres sur les arêtes :
- celui qui s'effectue en largeur (Algorithme 2.2) explore en priorité les fils (voisins) de v, puis ses petits-fils ;
- celui qui s'effectue profondeur et explore une branche de l'arbre (Algorithme 2.3) issue de v.

La différence entre les deux est que les sommets sont stockés les uns après les autres soit dans une file (FIFO) soit dans une pile (LIFO). Les algorithmes suivant calculent la composante connexe C de v ainsi qu'un arbre T qui la couvre.

Algorithme 2.2 (Parcours en largeur)**.**
1. Marquer v, $C := \{v\}$ et initialiser une file F à v, $T := \emptyset$.
2. Si F est vide terminer. Sinon retirer le premier sommet u de la file F.
3. Pour tout sommet w adjacent à u qui n'est pas marqué, ajouter w à C, $\{u, w\}$ à T, w à la queue de F, et marquer w.
4. Aller en 2.

Algorithme 2.3 (Parcours en profondeur).
0. Pour tous les sommets, $L(v) := N(v)$.
1. Marquer un sommet v , $C := \{v\}, T := \emptyset$ et initialiser une pile P à v.
2. Si P est vide terminer ; sinon soit u le sommet en haut de la pile.
3. Si $L(u)$ est vide retirer u de P et aller en 2.
4. Sinon retirer un sommet w de $L(u)$.
5. Si w est marqué aller en 3. Sinon ajouter w à C et en haut de la pile P, marquer w, $T := T \cup \{u, w\}$ et aller en 2.

Complexité des algorithmes 2.1, 2.2 et 2.3

Chaque arête du graphe est examinée au plus deux fois (une pour chaque extrémité). A chaque fois que l'on examine une arête, on effectue un nombre constant d'opérations (test, ajout dans C, ajout dans F, un marquage). La complexité est donc $O(|E|)$.

Ces deux algorithmes peuvent être modifiés afin de calculer toutes les composantes connexes d'un graphe en temps $O(|E|)$. Pour cela, il suffit tant qu'un sommet n'a pas été pris dans une composante connexe (c'est-à-dire marqué) de chercher sa composante connexe. Pour cela, on utilise une structure de donnée qui permet d'accéder à un sommet dont on connait le nom en temps $O(1)$, tout en pemettant de choisir un sommet quelconque en temps $O(1)$.

2.2 Forte connexité dans les graphes orientés

Un digraphe est *fortement connexe* si pour toute paire de sommet $\{u, v\}$, il existe un (u, v)-chemin et un (v, u)-chemin. Les *composantes fortement connexes* d'un graphe G sont ses sous-graphes fortement connexes maximaux.

Nous allons donner un algorithme qui teste si un digraphe est fortement connexe ou pas. Pour cela, on peut tester pour chaque sommet u s'il existe des chemins reliant u à tous les autres sommets. Cependant cela nécessite $|V(D)|$ parcours en largeur ou profondeur (une par sommet). La complexité est alors de $O(|V||E|)$.

Proposition 2.1. *Soit D un digraphe et v un sommet de D. D est fortemet connexe si et seulement si pour tout sommet $u \neq v$, il existe un (u, v)-chemin et un (v, u)-chemin.*

Démonstration. Si D est fortement connexe, par définition, pour tout sommet $u \neq v$, il existe un (u, v)-chemin et un (v, u)-chemin.

Supposons maintenant que pour tout sommet $u \neq v$, il existe un (u, v)-chemin et un (v, u)-chemin. Montrons que D est fortement connexe.

Soit u et w deux sommets distincts de D. Il existe un (u, v)-chemin P et un (v, w) chemin Q dont la concaténation nous donne une (u, w)-marche. Par la Proposition 1.3, il existe alors un (u, w)-chemin. □

2.2.1 Algorithme de calcul des composantes fortement connexes

Nous allons maintenant donner un algorithme qui donne la composante fortement connexe d'un sommet v dans un digraphe. Celui-ci est basé sur deux parcours issus de v, l'un dans D et l'autre dans son graphe inverse $\bar{D}$. Lors du premier parcours, les sommets u tels qu'il existe un (v, u)-chemin sont marqués 1. Ensuite, la deuxième recherche s'effectue : les sommets u tels qu'il existe un (u, v)-chemin sont marqués 2 et inclus dans la composante fortement connexe de v, s'ils sont déjà marqués 1. (Voir Figure 2.1).

Algorithme 2.4.
1. Effectuer un parcours dans D depuis v en marquant les sommets 1.
2. Effectuer un parcours dans $\bar{D}$ depuis v en marquant les sommets 2.
3. Retourner les sommets marqués 1 et 2.

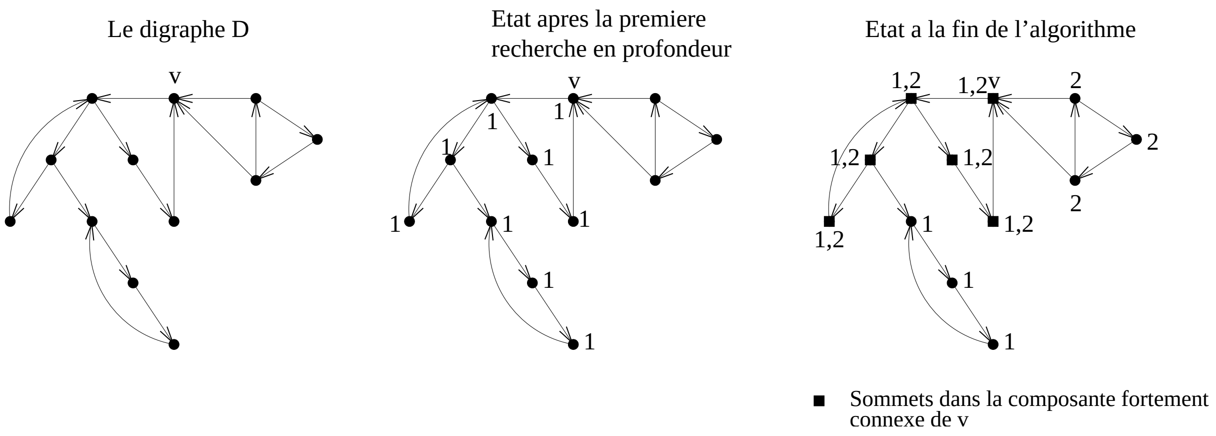


Fig. 2.1 – Déroulement de l'algorithme 2.4

Complexité de l'algorithme 2.4 : Comme l'algorithme 2.1, cet algorithme fonctionne en $O(|E|)$.
Cependant à l'inverse de l'algorithme 2.1, cet algorithme ne donne pas un algorithme en $O(|E|)$ rendant toutes les composantes fortement connexes de D. En effet, considérons le digraphe D tel que $V(D) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et $E(D) = \{(v_i, v_j) \mid i < j\}$. Les composantes sont les $\{v_i\}$. Il nous faudra donc effectuer $|V|$ fois l'algorithme 2.4. Et à chacune des itérations toutes les arêtes seront examinées. Ainsi la complexité sera $O(|V|.|E|)$.

Nous allons maintenant donner un algorithme en $O(|E|)$ qui donne toutes les composantes fortement connexes d'un digraphe.

Pour tout sommet u, l'algorithme explore l'ensemble des sommets v tels qu'il existe un (u, v)-chemin, en effectuant un parcours en profondeur. Nous appelons de tels sommets v, *successeurs* de v. On numérote les sommets avec un numéro $l(u)$ selon l'ordre de parcours, de manière à ce qu'à chaque étape de l'algorithme $l(v) \geq l(u)$ implique que v soit un successeur de u. On conserve également un second numéro $b(u)$ qui est le plus petit numéro que l'on sait atteindre depuis u. Au fur et à mesure que des composantes fortement connexes sont detectées, leurs sommets sont desactivés.

Algorithme 2.5 (Composantes fortement connexes)**.**

0. Initialiser i à 0.
1. Si tous les sommets sont marqués, terminer.
2. Prendre un sommet non marqué s.
3. $i := i + 1$; initialiser $l(s)$, $b(s)$ à i et u à s.
4. Si au moins un des arcs sortants de u, (u, v), n'est pas marqué,
   - 4.1 Marquer cet arc.
   - 4.2 Si v à déjà été exploré et est actif, mettre à jour $b(u)$: $b(u) := \min(b(u), b(v))$.
   - 4.3 Sinon v est un nouveau sommet. $i := i + 1$; $l(v) := i$; $b(v) := l(v)$; et $u := v$.
   - 4.4 Aller Etape 4.
5. Sinon tous les arcs sortants de u ont été marqués , l'exploration de u est terminée :
   - 5.1 Si $b(u) = l(u)$ alors les successeurs de u actifs forment une composante fortement connexe : retourner celle-ci et rendre tous ses sommets inactifs ; Aller Etape 1.
   - 5.2 Sinon $b(u) < l(u)$. Soit w depuis lequel u a été exploré. Mettre à jour $b(w)$: $b(w) := \min(b(w), b(u))$; $u := w$; Aller Etape 4.

Validité de l'algorithme 2.5 :

Nous allons montrer par induction les points suivants :

1) Si $l(u) < l(v)$, et si u et v sont actifs alors v est un sucesseur de u ;
2) A chaque étape, pour tout sommet v (actifs) il existe un chemin de v vers le sommet w de label $l(w) = b(v)$.

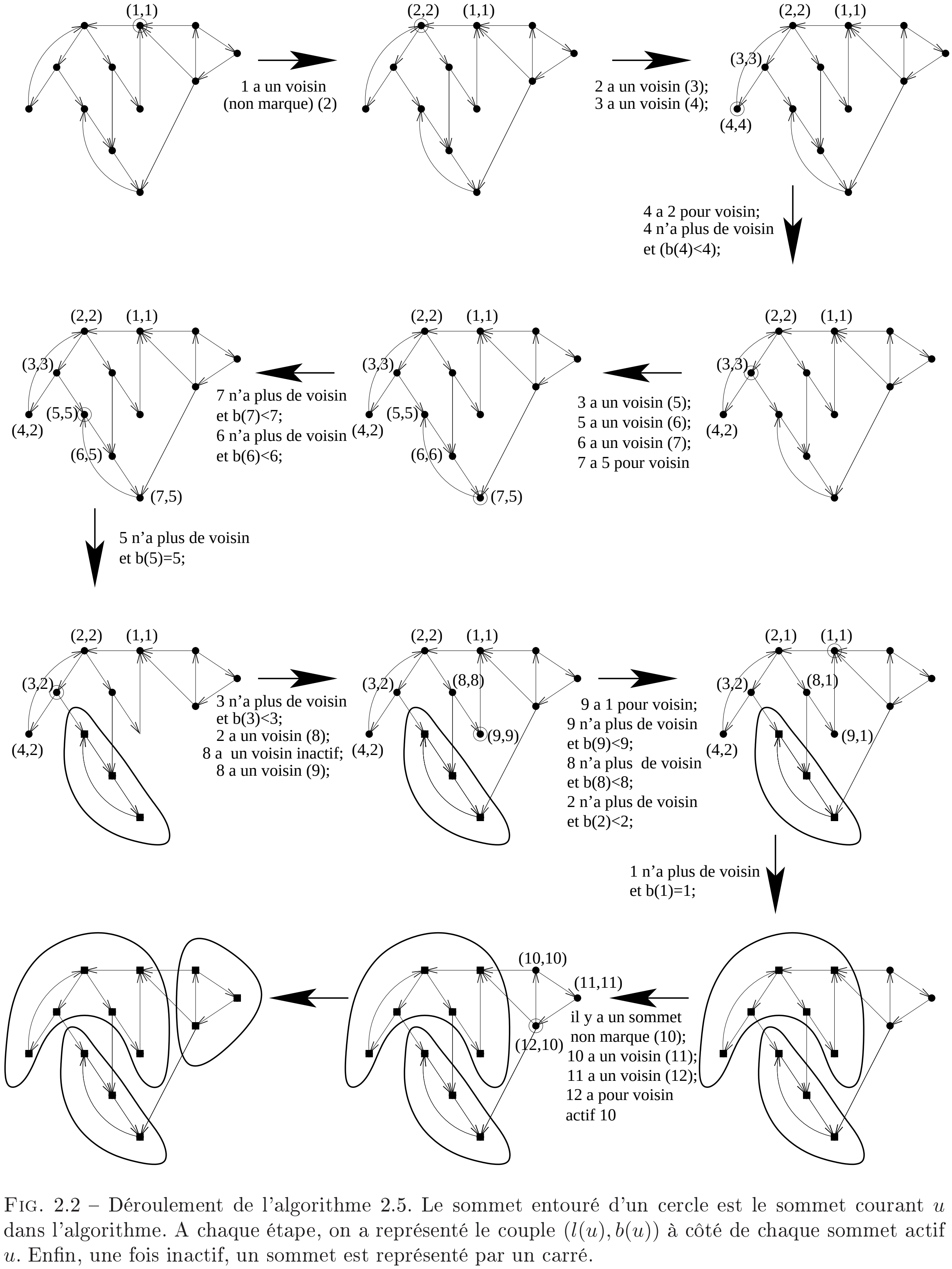


FIG. 2.2 – Déroulement de l'algorithme 2.5. Le sommet entouré d'un cercle est le sommet courant u dans l'algorithme. A chaque étape, on a représenté le couple $(l(u), b(u))$ à côté de chaque sommet actif u. Enfin, une fois inactif, un sommet est représenté par un carré.

3) Quand l'exploration de u se termine (Etape 5), tous les sommets actifs de $S(u) = \{v \text{ actifs } \mid b(u) \leq l(v) \leq l(u)\}$ sont dans la même composante fortement connexe que u.
4) $b(u) = l(u)$ si et seulement si $S(u)$ est une composante fortement connexe.

1) et 2) Laissé au lecteur.

3) D'après la Proposition 2.1, il sufit de montrer que pour tout v de $S(u)$, il existe un (u, v)-chemin et un (v, u)-chemin. Soit v un sommet de $S(u)$.
Supposons d'abord que $l(v) < l(u)$. Alors par 1), il existe un (v, u)-chemin. Soit w le sommet tel que $l(w) = b(u)$. Par 2), il existe un chemin (u, w)-chemin et d'après 1), il existe un (w, v)-chemin. La concaténation de ces deux chemins donne une (u, v)-marche. Par la Proposition 1.3 (i), il y a donc un (u, v)-chemin.
Supposons maintenant que $l(v) > l(u)$. Alors par 1), il existe un (u, v)-chemin. De plus, $b(v) < l(v)$, sinon le sommet v serait devenu inactif à l'Etape 5. Soit v_1 le sommet de label $l(v_1) = b(v)$. Par 2), il existe un (v, v_1)-chemin P_1. Si $l(v_1) \leq l(u)$, alors par 1), il existe un (v_1, u)-chemin dont la concaténation avec P_1 donne une (v, u)-marche et donc un (v, u)-chemin d'après la Proposition 1.3 (i). Si $l(v_1) > l(u)$ alors $b(v_1) < l(v_1)$ sinon le sommet v_1 (et donc également v) serait devenu inactif à l'Etape 5. Soit v_2 le sommet tel que $l(v_2) = b(v_1)$. En faisant le même raisonnement, tant que $l(v_i) > l(u)$, on a $l(v_i) > b(v_i)$ et on prend v_{i+1} tel que $l(v_{i+1}) = b(v_i)$. Comme le label de v_i décroit strictement, la suite des v_i est finie. On a donc $v = v_0, v_1, \ldots, v_k$ et $l(v_k) \leq l(u)$. Par 2), pour tout $1 \leq i \leq k$, il existe un (v_{i-1}, v_i)-chemin. De plus, par 1), il existe un (v_k, u)-chemin. La concaténation de tous ces chemins est une (v, u)-marche et donc par la Proposition 1.3 (i), il existe un (v, u)-chemin.

4) Maintenant si $b(u) = l(u)$, tous les arcs qui sortent de $S(u)$ vont vers des sommets inactifs (ceux ci appartiennent à une composante fortement connexe distincte par hypothèse d'induction 3)), $S(u)$ est donc une composante fortement connexe.
Si $b(u) < l(u)$, le sommet étiqueté $b(u)$ est actif, c'est donc un prédecesseur de u. Ainsi u et v sont dans la même composante connexe.

Complexité de l'algorithme 2.5 : Cet algorithme fonctionne en $O(|E|)$.

2.2.2 Structure des graphes fortement connexes

Définition 2.2. Soit D un digraphe et H un sous-digraphe de D. Une *H-anse* est une marche dont les deux extrémités sont dans $V(H)$ (et possiblement identiques) et les autres sommets sont distincts et dans $V(D) \setminus V(H)$.

Théorème 2.3. *Un digraphe D est fortement connexe si et seulement si il peut être construit à partir d'un cycle en ajoutant successivement au graphe H déjà construit une H-anse.*

Démonstration. Clairement, tout digraphe ainsi construit est fortement connexe.

Considérons maintenant un digraphe fortement connexe D. Alors D contient un cycle. Soit H le sous-graphe de D construit comme ci-dessus avec le nombre maximum d'arcs. Comme tout arc xy de $E(D) \setminus E(H)$ avec ses deux extrémités dans $V(H)$ est une H-anse, H est un sous-digraphe induit de D. Ainsi si $H \neq D$, $V(H) \neq V(D)$ et par forte connexité de D, il existe une arc vw avec $v \in V(D)$ et $w \in V(D) \setminus V(H)$. Comme D est fortement-connexe, D contient un (w, H)-chemin P. Alors (v, w, P) est une H-anse dans D, ce qui contredit la maximalité de H. □

2.3 k-connexité et thérorème de Menger

La connexité (ou forte connexité) correspond à l'existence d'un (u, v)-chemin pour deux sommets quelconques u et v.

Soit G un graphe. Soit W un ensemble d'arêtes ou de sommets. Si $G - W$ est non-connexe, on dit que W ***sépare*** G ou W est un séparateur de G. Si dans $G - W$, deux sommets u et v sont dans deux composantes connexes différentes, on dit que W ***sépare*** u de v ou W est un (u, v)-séparateur.

Pour $k \geq 1$, on dit que G est *k-connexe* s'il a au moins $k + 1$ sommets et aucun ensemble de $k - 1$ sommets ne le sépare. En particulier, le graphe complet à $k + 1$ sommets K_{k+1} est le seul graphe k-connexe avec $k + 1$ sommets. De façon analogue, un graphe est *k-arête-connexe*, s'il a au moins deux sommets et aucun ensemble de $k - 1$ arêtes ne le sépare. La valeur maximale k pour laquelle une graphe

G est k-connexe est appelée *connexité* de G et notée $\kappa(G)$. De même, la valeur maximale k pour laquelle une graphe G est k-arête-connexe est appelée *arête-connexité* de G et notée $\kappa'(G)$.

D'après les définitions, il est clair que pour tout sommet x et toute arête uv, nous avons :

$$\kappa(G) - 1 \leq \kappa(G - x) \qquad \text{et} \qquad \kappa'(G) - 1 \leq \kappa'(G - xy) \leq \kappa'(G).$$

Par définiton, être 1-connexe ou 1-arête-connexe correspond exactement à être connexe. La proposition suivante découle facilement des définitions :

Proposition 2.4. *Soit G un graphe ayant au moins 2 sommets. Alors*

$$\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta(G).$$

Démonstration. Si on ôte toutes les arêtes incidentes à un sommet le graphe n'est plus connexe donc $\kappa'(G) \leq \delta(G)$.

Supposons maintenant que $\kappa'(G) = k$. Soit $\{x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ky_k\}$ un séparateur de G. Si $G - \{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ n'est pas connexe alors $\kappa(G) \leq k$. Sinon chaque sommet x_i a degré au moins k et donc exactement k. Le voisinage de x_1 sépare alors G. □

Si l'arête-connexité d'un grapheest inférieure ou égale à sa connexité, la connexité ne peux pas être bornée par une en fonction l'arête-connexité. Voir Exercice 2.3.

Lemme 2.5. *Soit G un graphe k-connexe. Si G' est obtenu à partir de G en ajoutant un nouveau sommet x relié à au moins k sommets de G alors G' est k-connexe.*

Démonstration. Montrons qu'un séparateur S de G' doit contenir au moins k sommets. Si S contient x alors $S \setminus \{x\}$ doit être un séparateur de G donc $|S| \geq k + 1$. Supposons maintenant que x ne soit pas dans S. Si $N(x) \subset S$ alors $|S| \geq k$. Sinon $N(x) \setminus S$ est non vide et dans une unique composante de $G' \setminus S$ (celle de x). Alors S est un séparateur de G donc $|S| \geq k$. □

2.3.1 Graphes 2-arête-connexes

Pour les graphes 2-arête-connexes, il existe un théorème de structure similaire en tous points au Théorème 2.3 pour les digraphes fortement connexes.

Définition 2.6. Soit G un graphe et H un sous-graphe de G. Une *H-anse* est une marche dont les deux extrémités sont dans $V(H)$ (et possiblement identiques) et les autres sommets sont distincts et dans $V(G) \setminus V(H)$.

Théorème 2.7. *Un graphe G est 2-arête-connexe si et seulement si il peut être construit à partir d'un cycle en ajoutant successivement au graphe H déjà construit une H-anse.*

Démonstration. Clairement, tout graphe ainsi construit est 2-arête-connexe.

Considérons maintenant un graphe 2-arête-connexe G. Alors G contient un cycle. Soit H le sous-graphe de G construit comme ci-dessus avec le nombre maximum d'arêtes. Comme toute arête xy de $E(G) \setminus E(H)$ avec ses deux extrémités dans $V(H)$ est une H-anse, H est un sous-graphe induit de G. Ainsi si $H \neq G$, $V(H) \neq V(G)$ et par connexité de G, il existe une arête vw avec $v \in V(G)$ et $w \in V(G) \setminus V(H)$. Comme G est 2-arête-connexe, $G - vw$ contient un (w, H)-chemin P. Alors (v, w, P) est une H-anse dans G, ce qui contredit la maximalité de H. □

Corollaire 2.8 (Robbins, 1939). *Un graphe admet une orientation fortement connexe si et seulement si il est 2-arête connexe.*

Démonstration. Nécessité : Si un graphe G n'est pas connexe, alors il n'y aura aucun chemin (orienté) entre deux sommets de composantes connexes distinctes quelle que soit l'orientation. Si G a une arête uv telle $G - uv$ ne soit pas connexe. Soit C_u et C_v les composantes connexes de u et v dans $G - uv$. Alors si on oriente uv de u vers v, il n'y aura pas de (v, u)-chemin dans cette orientation.

Suffisance : Supposons que G soit 2-arête-connexe. D'après le Théorème 2.7, il peut être construit à partir d'un cycle C en ajoutant successivement des anses H_1, $_2$, $\dots H_l$. En orientant C et chacune des anses de manière directe (deux arcs adjacents n'ont pas même début), le digraphe obtenu est fortement connexe d'après le Théorème 2.3. □

2.3.2 Graphes 2-connexes

Pour les graphes 2-connexes, il existe un théorème de structure analogue au Théorème 2.3 pour les digraphes fortement connexes.

Définition 2.9. Soit G un graphe et H un sous-graphe de G. Un *H-chemin* est un chemin dont les deux extrémités sont dans $V(H)$ (et distinctes) et les autres sommets dans $V(G) \setminus V(H)$.

Théorème 2.10. *Un graphe G est 2-connexe si et seulement si il peut être construit à partir d'un cycle en ajoutant successivement au graphe H déjà construit un H-chemin.*

Démonstration. Clairement, tout graphe ainsi construit est 2-connexe.

Considérons maintenant un graphe 2-connexe G. Alors G contient un cycle. Soit H le sous-graphe de G construit comme ci-dessus avec le nombre maximum d'arêtes. Comme toute arête xy de $E(G) \setminus E(H)$ avec ses deux extrémités dans $V(H)$ est un H-chemin, H est un sous-graphe induit de G. Ainsi si $H \neq G$, $V(H) \neq V(G)$ et par connexité de G, il existe une arête vw avec $v \in V(G)$ et $w \in V(G) \setminus V(H)$. Comme G est 2-connexe, $G - v$ contient un (w, H)-chemin P. Alors (v, w, P) est un H-chemin dans G, ce qui contredit la maximalité de H. □

2.3.3 Graphes 3-connexes

Définition 2.11. Soit $e = xy$ une arête d'un graphe $G = (V, E)$. On note G/e le graphe obtenu à partir de G en *contractant* l'arête e en un nouveau sommet v_e, qui devient adjacent à tous les anciens voisins de x et y. Formellement, le graphe G/e est le graphe d'ensemble de sommets $V' = (V \setminus \{x, y\}) \cup \{v_e\}$ (avec v_e un nouveau sommet, i.e. $v_e \notin V$. et ensemble d'arêtes $E' = \{vw \in E \mid \{v, w\} \cap \{x, y\} = \emptyset\} \cup \{v_e w \mid w \in (N_G(x) \cup N_G(y)) \setminus \{x, y\}\}$.

Lemme 2.12. *Si G est 3-connexe et $|V(G)| > 4$ alors G a une arête e telle que G/e est 3-connexe.*

Démonstration. Supposons qu'il n'existe pas de telle arête e. Alors pour toute arête xy de G, le graphe G/xy contient un ensemble séparateur S d'au plus 2 sommets. Puisque $\kappa(G) \geq 3$, le sommet contracté v_{xy} de G/xy est dans S et $|S| = 2$. Soit z le sommet de S distinct de v_{xy}. Alors $\{x, y, z\}$ est un séparateur de G/xy. Comme aucun sous-ensemble propre de $\{x, y, z\}$ n'est un sépl rateur de G, tout sommet de $\{x, y, z\}$ a un sommet dans chaque composante de $G - \{x, y, z\}$.

Prenons x, y et z tel qu'une composante C de $G - \{x, y, z\}$ soit la plus petite possible. Soit v un sommet de z dans C. Par hypothèse, G/zv n'est pas 3-connexe donc il existe un sommet w tel que $\{z, v, w\}$ sépare G. Comme précédemment chaque sommet de $\{z, v, w\}$ a un voisin dans chaque composante de $G - \{z, v, w\}$.

Comme x et y sont adjacents, il y a une composante D de $G - \{z, v, w\}$ qui ne contient ni x ni y. Ainsi tout voisin de v dans D est nécessairement dans D car $v \in C$. Ainsi D et C s'intersecte et donc $D \subsetneq C$ d'après la définition de D. Ceci contredit la minimalité de C. □

Ainsi tous les graphes 3-connexes peuvent être réduits à K_4 par une succession de contraction d'arêtes. Nous allons voir qu'en fait tous les graphes qui peuvent l'être sont 3-connexes.

Théorème 2.13 (Tutte, 1961). *Un graphe G est 3-connexe si et seulement si il existe une suite de graphes $G_0, \ldots, G_n$ telle que :*

(i) $G_0 = K_4$ et $G_n = G$;

(ii) pour tout $i < n$, G_{i+1} a une arête xy telle que $d(x), d(y) \geq 3$ et $G_i = G_{i+1}/xy$.

Démonstration. Si G est 3-connexe, alors une suite comme ci-dessus existe d'après le Lemme 2.12.

Inversement si G_{i+1} est 3-connexe alors $G_i = G_{i+1}/xy$ l'est aussi. La preuve est laissée en Exercice 2.17. □

2.3.4 Théorème de Menger

Un séparateur d'un graphe G est nécessairement un (u, v)-séparateur pour deux sommets. Ces deux sommets sont nécessairement non-adjacents si le séparateur est un ensemble de sommets. Soit u et v deux sommets. Notons $\kappa'(u, v))$ la cardinalité minimale d'un ensemble de sommets d'arêtes (u, v)-séparateur et si u et v ne sont pas adjacents, notons $\kappa(u, v)$ la cardinalité minimale d'un ensemble de sommets

(u, v)-séparateur. Clairement $\kappa(G) = \min\{\kappa(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$ et $\kappa'(G) = \min\{\kappa'(u, v) \mid u, v \in V(G)\}$. Ainsi pour déterminer $\kappa(G)$ (resp. $\kappa'(G)$), il suffit de déterminer $\kappa(u, v)$ (resp. $\kappa'(u, v)$) pour toute paire de sommets u et v.

Deux chemins sont *indépendants* s'ils n'ont aucun sommet en commun à part éventuellement leurs extrémités. En particulier, deux (s, t)-chemins sont *indépendants* s'ils n'ont que s et t en commun. Si $W \subset V(G)$ est un (s, t)-séparateur alors deux chemins indépendants intersectent W en des sommets distincts. Donc si $\kappa(s, t) = k$ alors il existe au plus k (s, t)-chemins indépendants.
De même, si $\kappa'(s, t) = k$ alors il existe au plus k (s, t)-chemins arête-disjoints.
En fait, dans les deux cas, il y a exactement k tels chemins comme le montre le théorème de Menger.

Théorème 2.14 (Menger, 1927)**.** *Soit G un graphe.*

(i) Soient s et t deux sommets distincts non adjacents de G. Alors la cardinalité minimum d'un ensemble de sommets (s, t)-séparateur $\kappa(s, t)$ est égale au nombre maximum de (s, t)-chemins indépendants.

(ii) Soient s et t deux sommets distincts de G. Alors la cardinalité minimum d'un ensemble d'arêtes (s, t)-séparateur $\kappa'(s, t)$ est égale au nombre maximum de (s, t)-chemins arête-disjoints.

Démonstration. (i) Supposons que le théorème soit faux et prenons le plus petit $k = \kappa(s, t)$ pour lequel ce soit faux. Clairement $k \geq 2$. Soit G un contrexemple (pour ce k minimal) qui soit minimum pour le nombre d'arêtes. Alors il y a au plus $k - 1$ (s, t)-chemins indépendants.

Il n'y a pas de sommet x adjacent à la fois à s et t sinon $G - x$ serait un contrexemple pour $k - 1$. Soit W un (s, t)-séparateur de cardinalité k.

Supposons tout d'abord que ni s ni t ne sont adjacents à tous les sommets de W. Soit G_s le graphe obtenu à partir de G en remplaçant la composante de $G - W$ contenant s par un unique sommet s' relié à tous les sommets de W. Dans G_s, nous avons besoin de k sommets pour séparer s' et t. Comme la composante de s avait au moins 2 sommets alors G_s a moins d'arêtes que G. Par minimalité de G, il y a donc k (s', t)-chemins indépendants. En ôtant, s' à chacun de ces sommets, on obtient des chemins de W à t, un (et un seul) d'origine w pour tout $w \in W$. En effectuant la même transformation pour t à la place de s, on obient k chemins indépnedants, un (s, w)-chemin pour chaque $w \in W$. Ces deux ensembles de chemins peuvent être mis bout à bout pour obtenir k (s, t)-chemins indépnendants, une contradiction.

On peut donc supposer que pour tout (s, t)-séparateur W de cardinalité k alors soit s soit t est adjacent à tous les sommets de W. Soit $P = (s, x_1, x_2, \ldots, x_l, t)$ un plus court (s, t)-chemin. Alors $l \geq 2$. Par minimali'e de G, dans $G - x_1x_2$, il existe un (s, t)-séparateur W_0 de cardinalité $k - 1$. Ainsi $W_1 = W \cup x_1$ et $W_2 = W \cup x_2$ sont tous deux des (s, t)-séparateurs (dans G). Comme s n'est pas adjacent à x_2 apr minimalité de la longueur de P, alors t est adjacent à tous les sommets de W_2. De même, s est adjacent à tous les sommets de W_1. Donc tous les sommets de W_0 (qui n'est pas vide) sont des voisins communs à s et t ce qui est une contradiction. □

Corollaire 2.15 (Menger, 1927)**.** *Soit G un graphe à au moins deux sommets.*

(i) G est k-connexe si et seulement si deux sommets quelconques peuvent être joints par k chemins indépendants.

(ii) G est k-arête connexe si et seulement si deux sommets quelconques peuvent être joints par k chemins arête-disjoints.

Démonstration. (i) Le Théorème 2.14-(i) implique directement que G est k-connexe si et seulement si deux sommets non-adjacents peuvent être joints par k chemins indépendants. Il nous faut donc montrer que si G est k-connexe alors deux sommets adjacents u et v peuvent être joints par k chemins arête-disjoints.

Soit G' le graphe obtenu à partir de G en ajoutant un sommet x' relié à tous les voisins de x et un sommet y' relié à tous les voisins de y. Comme $\delta(G) \geq \kappa(G) \geq k$, par le Lemme 2.5, G' est k-connexe. Comme x' et y' ne sont pas adjacents, il existe k (x', y')-chemins indépendants $P_1, \ldots, P_k$ dans G'. Pour tout $1 \leq i \leq k$, soit P'_i le chemin obtenu de a manière suivante :

- si $\{x, y\} \subset V(P_i)$ alors $P_i = (x, y)$;
- si $\{x, y\} \cap V(P_i) = \{x\}$, on prend le (x, y')-chemin inclus ans P_i et on remplace y' par y ;
- si $\{x, y\} \cap V(P_i) = \{y\}$, on prend le (x', y)-chemin inclus ans P_i et on remplace x' par x ;
- si $\{x, y\} \cap V(P_i) = \emptyset$, P'_i est obtenu en remplaçant x' par x et y' par y.

On obtient ainsi k (x, y)-chemins indépendants.

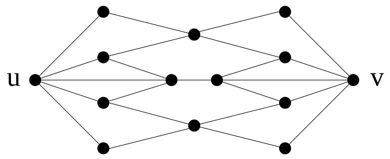
(ii) C'est une conséquence immédiate du Théorème 2.14-(ii). □

Corollaire 2.16. *Soit G un graphe k-connexe et A et B deux sous-ensembles de $V(G)$. Si $|A| \geq k$ et $|B| \geq k$, alors il existe k (A, B)-chemins disjoints.*

Démonstration. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en ajoutant deux sommets a et b de voisinages respectifs A et B. D'après le Lemme 2.5, G' est k-connexe. Ainsi $\kappa_{G'}(a, b) \geq k$ donc par le théorème de Menger, il existe k (a, b)-chemins indépendants dans G'. En supprimant a et b de ces chemins, on obtient k (A, B)-chemins disjoints. □

2.4 Exercices

Exercice 2.1. Déterminer $\kappa(u, v)$ et $\kappa'(u, v)$ dans le graphe ci-dessous :



Exercice 2.2. Prouver l'assertion suivante ou donner un contre-exemple : Si P est un (u, v)-chemin dans un graphe 2-connexe G, alors il existe un (u, v)-chemin Q indépendant de P.

Exercice 2.3. Soient k et l des entiers avec $1 \leq k < l$. Construire des graphes G_1, G_2 et G_3 tels que :
- (i) $\kappa(G_1) = 1$ et $\kappa'(G_1) = l$;
- (ii) $\kappa(G_2) = k$ et $\kappa(G_2 - x) = l$ pour un sommet x particulier ;
- (iii) $\kappa'(G_3 - x) = k$ et $\kappa'(G_3 - xy) = l$ pour une arête xy particulière.

Exercice 2.4. Soit G un graphe d'ordre au moins 2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
- (i) G est 2-connexe ;
- (ii) deux sommets quelconques sont dans un cycle ;
- (iii) deux arêtes quelconques sont dans un cycle et $\delta(G) \geq 2$;
- (iv) quels que soient trois sommets x,y et z, il y a un (x, z)-chemin contenant y.

Exercice 2.5. Soit G un graphe d'ordre au moins 3. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :
- (i) G est 2-arête-connexe ;
- (ii) toute arête est dans un cycle ;
- (iii) deux arêtes quelconques sont dans un tour et $\delta \geq 1$;
- (iv) deux sommets quelconques sont dans un tour.

Exercice 2.6. Soit $d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_n$ la suite des degrés d'un graphe. On suppose que $d_j \geq j + k - 1$ pour $1 \leq j \leq n - 1 - d_{n-k+1}$.
Montrer que G est k-connexe.

Exercice 2.7. Montrer que si $\kappa'(G) = k \geq 2$, alors en supprimant k arêtes de G on obtient au plus 2 composantes. Existe-t-il un résultat similaire pour $\kappa(G)$?

Exercice 2.8. Soit G un graphe biparti régulier de degré au moins 2. Montrer que $\kappa(G) \neq 1$.

Exercice 2.9. Donner un exemple de graphe non 2-connexe qui admet une orientation fortement connexe.

Exercice 2.10. En s'inspirant de l'Algorithme 2.5, donner un algorithme en $O(|E|)$ qui calcule les composantes 2-connexes d'un graphes.

Exercice 2.11. Soit G un graphe connexe dont tous les sommets sont de degré pair. Montrer que G est 2-arête-connexe.

Exercice 2.12.
Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ qui n'est pas un graphe complet.
1) Montrer que G contient 3 sommets u, v, et w tels que $uv \in E(G)$, $vw \in E(G)$ et $uw \notin E(G)$.
2) Montrer que si G est 2-connexe, non complet et que tous les sommets sont de degré au moins 3 alors il existe un tel triplet u, v, w tel que $G - \{u, w\}$ soit connexe.

Exercice 2.13. Soient a et b deux sommets d'un graphe G. Soient X et X' deux (a,b)-séparateurs. Notons C_a (resp. C'_a) la composante de a dans $G - X$ (resp. $G - X'$) et C_b (resp. C'_b) la composante de b dans $G - X$ (resp. $G - X'$).

Montrer que les deux ensembles $Y_a = (X \cap C'_a) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_a)$ et $Y_b = (X \cap C'_b) \cup (X \cap X') \cup (X' \cap C_b)$ sont des (a,b)-séparateurs.

Exercice 2.14 (Dirac, 1960)**.** Soit x un sommet d'un graphe G et U un ensemble de sommets de G ne contenant pas x. Un (x,U)-*éventail* est un ensemble de (x,U)-chemins qui n'ont que x en commun. Montrer qu'un graphe G est k-connexe si et seulement si il a au moins $k+1$ sommets et pour tout choix de x et U tel que $x \notin U$ et $|U| \geq k$ alors il y a un (x,U)-éventail de taille k.

Exercice 2.15. Montrer que si G est k-connexe ($k \geq 2$) alors tout ensemble de k sommets est contenu dans un cycle. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.16. Soit G un graphe cubique. Montrer que si $\kappa'(G) = 3$ et $\kappa(G) \geq 2$ alors $\kappa(G) = 3$.

Exercice 2.17. Soient x et y deux sommets adjacents de degré au moins k d'un graphe G. Montrer que si G/xy est k-connexe alors G l'est aussi.

Exercice 2.18. Soit $k \geq 3$. Soit G un graphe k-connexe et xy une arête de G. Montrer que G/xy est k-connexe si et seulement si $G - \{x,y\}$ est $(k-1)$-connexe.

Exercice 2.19. Soit G un graphe 2-connexe d'ordre au moins 4. Montrer que pour toute arête e, $G - e$ ou G/e est 2-connexe.

Exercice 2.20. Soit v un sommet d'un graphe 2-connexe G. Montrer que v possède un voisin u tel que $G - \{u,v\}$ est connexe.

Exercice 2.21. Soit xy une arête d'un graphe 2-connexe G. Montrer que $G - xy$ est 2-connexe si et seulement si x et y sont dans un cycle de $G - xy$.