Chapitre 6

Coloration de graphes

6.1 Introduction et généralités

Une *coloration* d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : V \to S$. Les éléments de S sont appelés les *couleurs*. Comme la seule chose de S qui nous intéresse est sa taille, on considére souvent que $S = \{1, 2, \ldots, k\}$. Une *k-coloration* d'un graphe G (sans boucle) est une coloration de G à valeur dans $\{1, 2, \ldots, k\}$. Une coloration c est *propre* si pour toute arête $uv \in E(G)$, $c(u) \neq c(v)$. Un graphe est *k-colorable* s'il admet une k-coloration propre. Le plus petit entier k tel que G soit k-colorable est le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$.

Proposition 6.1. *Si H est un sous-graphe de G alors $\chi(H) \leq \chi(G)$.*

Démonstration. Si c est une coloration propre de G alors c est clairement une coloration propre de H. □

Proposition 6.2. $\chi(G) = \max\{\chi(C), C$ *composante connexe de* $G\}$.

Démonstration. D'après la Proposition 6.1, $\chi(G) \geq \max\{\chi(C), C$ composante connexe de $G\}$. Soit $C_1, C_2, \ldots, C_k$ les composantes connexes de G. Pour $1 \leq i \leq k$, soit c_i une coloration propre de C_i avec les couleurs $1, 2, \ldots, \chi(C_i)$. Considérons c définie par $c(v) = c_i(v)$ si $v \in C_i$. Comme il n' y a pas d'arêtes entre deux sommets de composantes connexes différentes, c est une coloration propre de G. Ainsi $\chi(G) \leq \max\{\chi(C), C$ composante connexe de $G\}$. □

Dans la suite, nous considérerons très souvent que les graphes sont connexes.

6.2 Bornes inférieures pour $\chi(G)$

La Proposition 6.1 appliquée à la plus grande clique de G, nous donne immédiatement :

Proposition 6.3.

$$\chi(G) \geq \omega(G)$$

La taille maximale d'une clique est une borne inférieure de $\chi(G)$. Malheureusement, ce n'est pas un bon indicateur du nombre chromatique.

Théorème 6.4. *Soit $k \geq 2$ un entier. Il existe un graphe G tel que $\omega(G) = 2$ et $\chi(G) = k$.*

Démonstration. Les *graphes de Mycielski* M_k, $k \geq 2$, sont définis de manière inductive comme suit :
Le graphe M_2 à deux sommets reliés par une arête. Il vérifie $\omega(M_2) = 2$ et $\chi(M_2) = 2$.
Pour $k \geq 2$, posons $V(M_k) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$. Le graphe M_{k+1} est défini par $V(M_{k+1}) = V(G_k) \cup \{w_1, w_2, \ldots, w_n, z\}$ et $E(M_{k+1}) = E(G_k) \cup \{w_i v_j, v_i v_j \in E(M_k)\} \cup \{w_i z, 1 \leq i \leq n\}$. Voir Figure 6.1.

Montrons par récurrence sur k que $\omega(M_k) = 2$ pour tout $k \geq 2$. Le résultat est vrai pour $k = 2$. Supposons maintenant que $\omega(M_k) = 2$. Montrons par l'absurde que $\omega(M_{k+1}) = 2$. Supposons que M_{k+1} ait une clique C_3 à trois sommets ou plus. Comme il n'y a pas d'arêtes entre les sommets w_i, C_3 contient au plus un des sommets w_i. Donc, z n'est pas un sommet de C_3 car ses voisins sont les sommets w_i. De plus, comme $\omega(M_k) = 2$, C_3 n'est pas contenu dans M_k. Comme les sommets W_i ne sont pas voisins

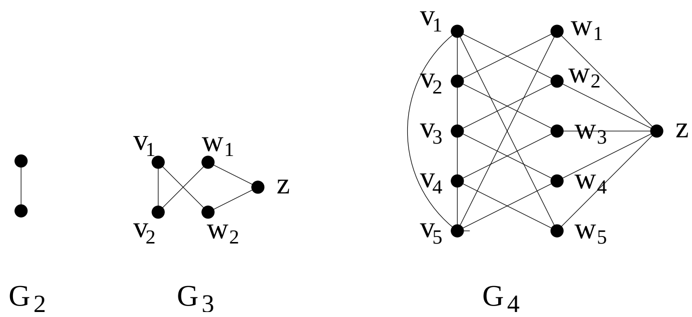


FIG. 6.1 – Les graphes M_2, M_3 et M_4.

entre eux, il y au plus un sommet w_i. Ainsi, C_3 est formé de deux sommets v_i et v_j dans M_k et d'un w_l. Alors v_iv_j, v_iw_l et v_jw_l sont des arêtes. Par construction de M_{k+1}, v_iv_l et v_jv_l sont aussi des arêtes. Les sommets v_i, v_j et v_l forment alors une clique dans M_k ce qui contredit $\omega(M_k) = 2$.

Montrons maintenant par récurrence sur k que $\chi(M_k) = k$ pour tout $k \geq 2$. Le résultat est vrai pour $k = 2$. Supposons maintenant que $\chi(M_k) = k$.
Soit c une k-coloration propre de M_k. Posons $c(w_i) = c(v_i)$ pour $1 \leq i \leq n$ et $c(z) = k+1$. Il est facile de voir que c ainsi étendue est une $(k+1)$-coloration propre de M_{k+1}. Donc $\chi(M_{k+1}) \leq k+1$.
Supposons maintenant qu'il existe une k-coloration propre f de M_{k+1}. Quitte à réindexer les couleurs, on peut supposer que $f(z) = k$. Soit c l'application de $V(M_k)$ dans $\{1, 2, \ldots, k-1\}$ définie par $c(v_i) = f(v_i)$ si $f(v_i) \neq k$ et $c(v_i) = f(w_i)$ sinon. (Notons que $f(w_i) \neq k$ pour tout $1 \leq i \leq n$ car w_iz est une arête.) c est alors une $(k-1)$-coloration propre de M_k. En effet, soit v_iv_j une arête de M_k, alors soit $f(v_i) \neq k$ et $f(v_j) \neq k$ et $c(v_i) = f(v_i) \neq f(v_j) = c(v_j)$ ou $f(v_i) = k$ et $f(v_j) \neq k$. Puisque w_iv_j est une arête, $c(v_i) = f(w_i) \neq f(v_j) = c(v_j)$. Ainsi $\chi(M_k) \leq k-1$ ce qui est une contradiction.
On a donc bien $\chi(M_{k+1}) = k+1$.

□

Il est clair que dans une coloration propre, les sommets de même couleur forment un ensemble indépendant.

Proposition 6.5.

$$\chi(G) \geq \frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$$

Démonstration. Soit c une coloration propre de G avec les couleurs $1, 2, \ldots, \chi(G)$ et $S_i = \{v \in V(G) : c(v) = i\}$ pour $1 \leq i \leq \chi(G)$. Chaque S_i est un ensemble indépendant donc $|S_i| \leq \alpha(G)$. On a donc

$$|V(G)| = \sum_{i=1}^{\chi(G)} |S_i| \leq \sum_{i=1}^{\chi(G)} \alpha(G) \leq \chi(G).\alpha(G)$$

□

Là encore si $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)}$ est une borne inférieure pour $\chi(G)$ mais n'est pas un bon indicateur en général. En effet, considérons le graphe G composé de n composantes connexes toutes réduites à un sommet sauf une qui est un graphe K_k (graphe complet à k éléments). Alors, $\chi(G) = k$ et $\frac{|V(G)|}{\alpha(G)} = \frac{n+k-1}{n}$ est inférieur à 2 si n est suffisamment grand.

6.3 Bornes supérieures pour $\chi(G)$

La plupart des bornes que nous allons établir sont obtenues en utilisant un **algorithme glouton**. On prend un ordre $\sigma = (v_1 < v_2 < \cdots < v_n)$ sur les sommets de G. On colore ensuite les sommets de manière séquentielle avec les entiers naturels de la façon suivante : le sommet v_i est coloré avec le plus petit entier non utilisé par ses voisins déjà colorés (i.e. d'indice plus petit).

Combien de couleurs cet algorithme glouton utilise-t-il ? Si pour tout i le nombre de couleurs déjà attribuées aux voisins de v_i parmi $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}$ est au plus D alors l'algorithme glouton utilise au plus $D+1$ couleurs. Comme un sommet a au plus $\Delta(G)$ voisins, on a alors :

Proposition 6.6.

$$\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

L'algorithme glouton n'utilise pas nécessairement $\Delta(G)+1$ couleurs. En particulier, il existe des ordres pour lesquels l'algorithme de coloration séquentielle est optimal, i. e. utilise $\chi(G)$ couleurs : soit c une coloration propre de G avec les couleurs $1, 2, \dots, \chi(G)$, tout ordre $\sigma_{opt} = (v_1 < v_2 < \cdots < v_n)$ tel que $c(v_i) \leq c(v_j)$ si $i \leq j$ convient. Cependant trouver un tel ordre parmi les $n!$ possibles est difficile.

On peut cependant trouver des ordres qui améliorent la borne $\Delta(G)+1$ ci-dessus.

Définition 6.7. Soit $\sigma = (v_1 < v_2 < \cdots < v_n)$ un ordre sur les sommets d'un graphe G. On définit $g(\sigma)$ comme le maximum sur $1 \leq i \leq n$ du degré du sommet v_i dans le sous-graphe induit par $\{v_1, v_2, \dots, v_i\}$. La *dégénérescence* de G, notée $\delta^*(G)$ est la valeur minimum de $g(\sigma)$ sur tout les ordres de sommets σ possibles. Notons que $\delta^*(G)$ et un ordre σ^* associé peuvent être facilement trouvés. Il suffit de prendre un sommet de plus petit degré dans G, de le mettre à la fin de l'ordre, de l'enlever de G, et de répéter l'opération. Clairement on a $\delta^*(G) \leq \Delta(G)$.

L'algorithme glouton suivant σ^*, nous donne alors :

Proposition 6.8.

$$\chi(G) \leq \delta^*(G) + 1$$

Proposition 6.9. *Soit G un graphe connexe. $\delta^*(G) = \Delta(G)$ si et seulement si G est régulier.*

Démonstration. Supposons que G soit régulier. Alors pour tout ordre $\sigma = (v_1 < v_2 < \cdots < v_n)$, le degré de v_n dans G est $\Delta(G)$ et donc $g(\sigma) = \Delta$. D'où $\delta^*(G) = \Delta(G)$.

Supposons que G ne soit pas régulier. Soit v un sommet de degré inférieur à Δ. Prenons un parcours en profondeur (ou en largeur) $(v_n, v_{n-1}, \dots, v_1)$ de G de racine $v_n = v$. Alors l'ordre $\sigma = (v_1 < v_2 < \cdots < v_n)$ vérifie $g(\sigma) < \Delta$. En effet, tout sommet v_i, $i < n$ est relié à un sommet $v_j > v_i$. Ainsi $\delta^*(G) < \Delta(G)$. □

On peut donc se demander pour quels graphes connexes $\chi(G) = \Delta(G)+1$. C'est clairement le cas pour les graphes complets K_n d'après la Proposition 6.3 car $\omega(K_n) = n = \Delta(K_n)+1$. Il est facile de voir que c'est aussi le cas pour les cycles impairs pour lesquels $\Delta = 2$ et qui ne sont pas 2-colorables. Le théorème de Brooks nous affirme que ce sont intrinsèquement les seuls cas.

Théorème 6.10 (Brooks 1941)**.** *Soit G un graphe connexe. Si G n'est ni un graphe complet ni un cycle impair alors $\chi(G) \leq \Delta(G)$.*

Nous donnerons deux preuves de ce théorème. La première peuve est basée sur l'algorithme glouton. On étudie tout d'abord le cas des graphes non 2-connexes puis le cas des graphes 2-connexes.

Rappel : un graphe G est 2-connexe, si pour tout couple de sommets u et v, il existe deux chemins disjoints allant de u en v.

Démonstration.
- Si G n'est pas $\Delta(G)$-régulier, on a le résultat par les Proposition 6.9 et 6.8. On peut donc désormais supposer que G est $\Delta(G)$-régulier. Si $\Delta(G) = 2$ alors G est un cycle pair. Il est donc 2-colorable. On peut donc supposer que $\Delta(G) \geq 3$.
- Si G n'est pas 2-connexe, alors il existe un sommet v tel que $G - v$ ait $k \geq 2$ composantes connexes $C_1, C_2, \dots, C_k$. Chaque graphe G_i induit par $V(C_i) \cup \{v\}$ vérifie $\Delta(G_i) \leq \Delta(G)$ et $d_{G_i}(v) < \Delta(G)$. Les graphes G_i ne sont pas réguliers. Ainsi par la Proposition 6.9, chaque G_i est $\Delta(G)$-colorable. Prenant pour chaque G_i une $\Delta(G)$-coloration propre c_i telle que $c_i(v) = 1$, l'union des c_i nous donne une Δ-coloration propre de G.
- Supposons maintenant que G soit 2-connexe. Comme G n'est pas le graphe complet, d'après l'exercice 2.12, il existe trois sommets u, v et w tels que $uv \in E(G)$, $vw \in E(G)$, $uw \notin E(G)$ et $G - \{u, w\}$ soit connexe. Il existe alors un ordre $\sigma = (v_1 = u < v_2 = w < v_3 < \cdots < v_n = v)$ de $V(G) \setminus \{u, w\}$ tel que pour $i < n$, le sommet v_i soit adjacent à un v_j avec $j > i$ (il suffit d'ordonner les sommets de $V(G) \setminus \{u, w\}$par rapport à leur distance par rapport à v). Colorons alors u et w avec 1. On peut ensuite colorer les sommets de $V(G) \setminus \{u, w\}$ suivant σ avec la première couleur disponible de

$\{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$. En effet, pour $i < n$, le sommet v_i à au plus $\Delta(G) - 1$ voisins déjà colorés, ainsi il peut être coloré par une des couleurs de $\{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$. Pour le sommet v, il a deux voisins colorés par 1, il est donc adjacent à au plus $\Delta(G) - 1$ autres couleurs et il peut donc être coloré par une couleur de $\{1, 2, \ldots, \Delta(G)\}$.

□

Nous donnons maintenant une preuve alternative du Théorème de Brooks qui se fait par récurrence sur le nombre de sommets :

Démonstration. Par récurrence sur $|V(G)|$. Si $\Delta(G) \leq 2$, alors G est un chemin ou un cycle et le résultat est trivial. On peut donc supposer que $\Delta(G) \geq 3$ et que le résultat est vrai pour les graphes ayant moins de sommets. Supposons que $\chi(G) > \Delta(G) = \Delta$.

Soit v un sommet de G et $H := G - v$. Alors $\chi(H) \leq \Delta$: par hypothèse de récurrence, chaque composante connexe H' de H vérifie $\chi(H') \leq \Delta(H') \leq \Delta$ sauf si H' est un graphe complet ou un cycle impair dans quel cas $\chi(H') \leq \Delta(H') + 1 \leq \Delta$.

Assertion 1 : *Toute Δ-coloration propre de H utilise toutes les couleurs $1, \ldots, \Delta$ sur les voisins de v ; en particulier $d(v) = \Delta$.*

[[Sinon on pourrait colorer v avec la couleur de $1, \ldots, \Delta$ non utilisée sur les voisins de v et on aurait une Δ-coloration propre de G, ce qui contredit $\chi(G) > \Delta$.]]

Étant donnée une Δ-coloration propre de H, notons par v_i le voisin de v coloré i, $1 \leq i \leq \Delta$. Pour tout $i \neq j$, soit $H_{i,j}$ le sous-graphe de H induit par tous les sommets colorés i ou j.

Assertion 2 : *Pour tout $i \neq j$, les sommets v_i et v_j sont dans la même composante connexe $C_{i,j}$ de $H_{i,j}$.*

[[Sinon on pourrait interchanger les couleurs i et j dans l'une des deux composantes et v_i et v_j seraient colorés de manière identique ce qui contredirait l'Assertion 1.]]

Assertion 3 : *$C_{i,j}$ est toujours un chemin d'extrémités i et j.*

[[Soit P un chemin de v_i à v_j dans $C_{i,j}$. Comme $d_H(v_i) \leq \Delta - 1$, les voisins de v_i sont tous de couleurs différentes. Sinon on pourrait recolorer v_i, ce qui contredirait l'Assertion 1. Ainsi le voisin de v_i dans P est le seul voisin de v_i dans $C_{i,j}$. De même, le voisin de v_j dans P est le seul voisin de v_j dans $C_{i,j}$. Donc si $C_{i,j} \neq P$, alors P a un sommet interne avec trois voisins dans H colorés identiquement ; soit u le premier de tels sommets sur P. Au plus $\Delta - 2$ couleurs sont utilisées par les voisins de u qui peut donc être recoloré. Alors Q le sous-chemin de P allant de v_i au prédécesseur de u est une composante de $H_{i,j}$ pour cette nouvelle coloration. Cela contredit l'Assertion 2.]]

Assertion 4 : *Pour des entiers i, j, k distincts, les chemins $C_{i,j}$ et $C_{i,k}$ ne se rencontrent qu'en v_i.*

[[Si $v_i \neq u \in C_{i,j} \cap C_{i,k}$ alors u possède deux voisins colorés j et deux voisins colorés k. On peut donc recolorer u. Pour cette nouvelle coloration i et j sont alors dans deux composantes différentes de $H_{i,j}$ ce qui contredit l'Assertion 2.]]

Si G n'est pas le graphe complet, deux voisins de G, disons v_1 et v_2, ne sont pas adjacents. Soit $u \neq v_2$ le voisin de v_1 dans $C_{1,2}$. Interchangeons les couleurs 1 et 3 dans $C_{1,3}$. Seules les premières couleurs de $C_{1,2}$ et de $C_{3,2}$ seront échangés. On obtient alors une nouvelle coloration c' de H. Afin d'éviter les confusions notons v'_i, $H'_{i,j}$ et $C'_{i,j}$, les nouveaux v_i, $H_{i,j}$ et $C_{i,j}$, pour c'.

- Comme $c'(u) = c(u) = 2$, u appartient à $H'_{2,3}$. De plus u est un voisin de $v_1 = v'_3$, donc u appartient à la composante connexe $C'_{2,3}$.
- Comme $c(u) = 2$, alors u appartient à $H'_{1,2}$. De plus, les couleurs de $C_{1,2} - v_1$ sont inchangées, car d'après l'Assertion 4 $C_{1,2}$ n'a aucun sommet commun avec $C_{1,3}$. Donc $C_{1,2} - v_1$ fait parti de la composante connexe $C'_{1,2}$. Le sommet u est donc inclus dans $C'_{1,2}$.
- Ainsi, nous avons $u \subset C'_{1,2} \cap C'_{2,3}$ ce qui contredit l'Assertion 4.

□

La borne supérieure Δ pour χ est loin d'être optimale et elle peut être améliorée pour de nombreuses classes de graphes. Par exemple, pour les graphes sans triangle (pour lesquels $w = 2$).

Proposition 6.11. *Soit G un graphe sans triangle. Alors $\chi(G) \leq 3 \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{4} \right\rceil$.*

Démonstration. Posons $k = \left\lceil \frac{\Delta(G)+1}{4} \right\rceil$. Soit $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ la partition de $V(G)$ en k ensembles telle que le nombre d'arêtes internes (i.e. avec les deux extrémités dans une même partie) est minimum. Pour tout i, le graphe G_i induit par V_i est de degré maximum au plus 3. En effet, supposons qu'un sommet x d'une des parties, disons V_1, ait 4 voisins dans V_1. Alors une autre partie, disons V_2, contient au plus 3 voisins de x, sinon x aurait au moins $4k \geq \Delta(G) + 1$ voisins ce qui est impossible. Ainsi la partition $(V_1 - x, V_2 + x, \ldots, V_k)$ a moins d'arêtes internes que $(V_1, V_2, \ldots, V_k)$ ce qui contredit la minimalité de celle-ci.

Ainsi $\Delta(G_i) \leq 3$ et G_i ne contient pas de complet à trois éléments car c'est un sous-graphe de G. Donc par le Théorème de Brooks, $\chi(G_i) \leq 3$.

Ainsi en colorant les G_i avec des ensembles de couleurs distinctes, on obtient une $4k$-coloration propre de G. □

En fait, on pense que la borne supérieure adéquate est la suivante :

Conjecture 6.12 (Reed 1998). *Pour tout graphe G alors $\chi(G) \leq \left\lceil \frac{\Delta(G)+\omega(G)+1}{2} \right\rceil$.*

Dans le cas où $w \in \{\Delta, \Delta + 1\}$, cette conjecture est triviale. Le Théorème de Brooks établit cette conjecture pour $\omega = \Delta - 1$.

Cette conjecture a été prouvé par Johansson pour $w = 2$ et Δ suffisamment grand. En fait, Johansson a montré qu'il existe une constante c telle que si $w(G) = 2$ alors $\chi(G) \leq \frac{c\Delta(G)}{\log(\Delta(G))}$.

6.4 Coloration des graphes planaires

Un graphe est *plongeable* sur une surface $\mathcal{S}$ si ses sommets peuvent être envoyer en des points distincts de $\mathcal{S}$ et ses arêtes en des courbes simples de $\mathcal{S}$ joignant les points de ses extrémités de telle façon que deux courbes d'arêtes ne ne s'intersectent pas à part en leurs éventuelles extrémités communes. Une *face* d'un plongement de G est une composante connexe de la surface $\mathcal{S}$ à laquelle on a oté G. Un graphe est *planaire* s'il est plongeable dans la sphère. Comme le plan est topologiquement équivalent à la sphère avec un trou, tout graphe planaire est également plongeable dans le plan et la face contenant le trou est appelée *face externe* ou *face infinie*. Etant donné un plongement d'un graphe planaire, on note $F(G)$ l'ensemble des faces. Par abus de notation, nous appellerons $F(G)$ l'ensemble des faces d'un graphe planaire G dans un plongement quelconque implicite. La *taille* ou *degré* d'une face f, noté $d(f)$, est son nombre de sommets, ou plus rigoureusement le nombre de sommets incidents à f.

Une propriété essentielle des graphes planaires est donnée par la Formule d'Euler qui relie la somme de son nombre de faces et de sommets à son nombre d'arêtes.

Formule d'Euler *Soit G un graphe planaire connexe.*

$$|V(G)| + |F(G)| - |E(G)| = 2.$$

La démonstration de cette formule se fait aisément par récurrence et est laissée en exercice (Exercice 6.16).

Définition 6.13. Un graphe planaire est *triangulé* si toutes ses faces sont des triangles. On appelle *triangulation* d'un graphe planaire G tout graphe planaire triangulé T tel que $V(T) = V(G)$ et $E(G) \subset E(T)$.

Proposition 6.14. *Tout graphe planaire admet une triangulation.*

Démonstration. Soit G un graphe planaire. Pour chaque face de G, $(x_1, x_2, \ldots, x_l, x_1)$ qui n'est pas un triangle, rajouter les arêtes x_1x_i pour $3 \leq i \leq l - 1$. On vérifie aisément que le graphe ainsi obtenu est une triangulation de G. □

Proposition 6.15. *Soit G un graphe planaire.*

$$|E(G)| \leq 3|V(G)| - 6$$

Démonstration. D'après la Proposition 6.14, il suffit de le montrer pour les graphes planaires triangulés. Soit G un tel graphe. Chaque face de G contient trois arêtes et chaque arête est dans deux faces. Ainsi $2|E(G)| = 3|F(G)|$. Remplaçant $|F(G)|$ par sa valeur dans la formule d'Euler, il vient $|V(G)| + 2|E(G)|/3 = |E(G)| + 2$ soit $3|V(G)| - 6 = |E(G)|$. □

Corollaire 6.16. *Un graphe planaire possède un sommet de degré au plus* 5.

Démonstration. Soit G un graphe planaire. On a $\sum\{d(v) : v \in G\} = 2|E(G)| \leq 6|V(G)| - 12$. Le degré minimum de G est au plus égal au degré moyen qui vaut $\frac{6|V(G)|-12}{|V(G)|} < 6$. Il y a donc un sommet de degré inférieur à 6. □

Corollaire 6.17. *Un graphe planaire est* 6*-colorable.*

Démonstration. Puisque tout sous-graphe d'un graphe planaire est planaire, tout sous-graphe possède un sommet de degré au plus 5. La dégénérescence d'un graphe planaire est donc au plus 5. La Proposition 6.8 donne le résultat. □

Théorème 6.18. *Tout graphe planaire est* 5*-colorable.*

Démonstration. Par récurrence sur le nombre de sommets du graphe G, le résultat étant trivialement vrai si G a un seul sommet. Par Proposition 6.16, un sommet v est de degré au plus 5 dans G. Par hypothèse de récurrence, le graphe $G - v$ est 5-colorable. Soit c une 5-coloration propre de $G - v$. A partir de c nous allons construire une 5-coloration propre de G.

Si une des couleurs, disons i, n'est attribuée à aucun voisin de v alors on peut étendre c en posant $c(v) = i$. (C'est en particulier le cas si $d(v) \leq 4$.)

Nous pouvons donc désormais supposer que v a cinq voisins v_1, v_2, v_3, v_4 et v_5 dans l'ordre trigonométrique autour de v. Ceux-ci sont tous colorés d'une couleur différente ; quitte à renommer les couleurs on peut supposer que $c(v_i) = i$.

Soit $C_{1,3}$ la composante de v_1 dans le sous-graphe de G induit par les sommets colorés 1 et 3. Si v_3 n'est pas dans $C_{1,3}$, alors on peut permuter les couleurs 1 et 3 dans $C_{1,3}$ et colorer v avec 1. Si $v_3 \in C_{1,3}$, alors il existe un chemin P de v_1 à v_3 dans C_1 qui avec les arêtes vv_1 et vv_3 forment un cycle C. Et v_2 et v_4 sont séparés par C. Alors la composante $C_{2,4}$ de v_2 dans le sous-graphe de G induit par les sommets colorés 2 et 4 ne contient pas v_4, sinon une arête du chemin de v_2 à v_4 dans $C_{2,4}$ couperait une des arêtes de C (voir Figure 6.2). On peut donc permuter les couleurs 2 et 4 dans $C_{2,4}$ et colorer v avec 2. □

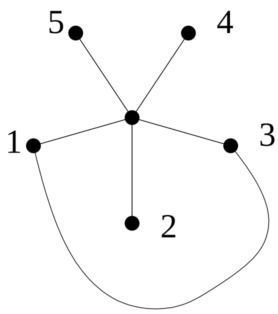


FIG. 6.2 – .

Le résultat ci-dessus n'est pas le meilleur possible. En effet, Appel et Haken ont montré la 4-colorabilité des graphes planaires.

Théorème 6.19 (Appel et Haken 1977)**.** *Tout graphe planaire est* 4*-colorable.*

La preuve de ce théorème est très compliquée. Elle consiste en une réduction à l'aide de la Méthode de Déchargement (voir Chapitre 8) à un certain nombre de graphes (plus de 1000) pour lesquels le théorème a été prouvé à l'aide de l'ordinateur.

Remarquons que la preuve du Théorème 6.18, ne fonctionne pas pour la 4-coloration. En effet, si nous sommes dans la configuration de la Figure 6.3, pour toute paire de couleurs i, j, les sommets i et j sont dans la même composante du sous-graphe induit par les sommets colorés i et j.

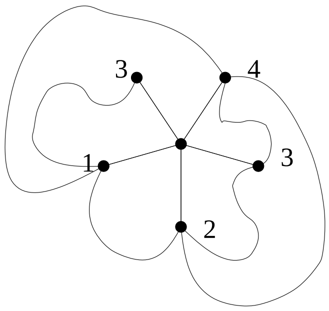


Fig. 6.3 – La configuration problématique : la courbe de i à j représente un chemin de sommets colorés alternativement i et j.

6.5 Coloration des arêtes

Une *arête-coloration* d'un graphe $G = (V, E)$ est une application $c : E \to S$ telle que pour deux arêtes e et f adjacentes $c(e) \neq c(f)$. Une *k-arête-coloration* d'un graphe G est une arête-coloration dans $\{1, 2, \dots, k\}$. Un graphe est *k-arête-colorable* s'il admet une k-arête-coloration. Le plus petit entier k tel que G soit k-arête-colorable est l'*indice chromatique* de G, noté $\chi'(G)$.

Par définition, $\chi'(G) = \chi(L(G))$, où $L(G)$ est le-line graphe de G.

Il est évident que que tout graphe G vérifie $\chi'(G) \geq \Delta(G)$. Nous allons voir que pour les graphes bipartis, $\Delta(G)$ couleurs suffisent.

Théorème 6.20 (König 1916)**.** *Si G est un graphe biparti alors $\chi'(G) = \Delta(G)$.*

Démonstration. Par récurrence sur le nombre d'arêtes. Si $|E(G)| = 0$, le théorème est trivialement vrai. Supposons maintenant que $|E(G)| \geq 1$ et que le résultat est vrai pour les graphes ayant moins d'arêtes. Posons $\Delta(G) = \Delta$. Soit xy une arête de G. Par hypothèse de récurrence, $G - xy$ admet une Δ-arête-coloration.

Dans $G - xy$, les sommets x et y sont chacun incident à au plus $\Delta - 1$ arêtes. Ainsi il existe $c_x, c_y \in \{1, 2, \dots, \Delta\}$ tels que x (resp. y) ne soit pas adjacent à une arête colorée c_x (resp. c_y). Si $c_x = c_y$, alors on peut colorer xy avec cette couleur et on obtient une Δ-arête-coloration de G. Nous pouvons donc supposer que $c_x \neq c_y$ et que le sommet x est incident à une arête e colorée c_y.

Étendons cette arête en une marche maximale P dont les arêtes sont colorées c_y et c_x alternativement. Comme un sommet est adjacent à au plus une arête d'une couleur, P est un chemin. De plus, P ne contient pas y. Sinon P terminerait en y avec une arête colorée c_x et P serait un chemin pair. Mais alors $P + xy$ formerait un cycle impair, ce qui est impossible d'après la Proposition 1.6. On peut donc recolorer P en intervertissant les couleurs c_x et c_y. Par maximalité de P, deux arêtes adjacentes sont toujours de couleurs différentes. En colorant xy par c_y, on obtient alors une Δ-arête-coloration de G. □

Ce théorème n'est cependant pas vrai lorsque le graphe n'est pas biparti. Par exemple, pour un cycle impair, $\Delta = 2$ mais $\chi' = 3$.

Théorème 6.21 (Vizing 1964)**.** *Pour tout graphe G, $\Delta(G) \leq \chi'(G) \leq \Delta(G) + 1$.*

Démonstration. Nous allons prouver la deuxième inégalité par récurrence sur $|E(G)|$. Pour $|E(G)| = 0$, le résultat est trivialement vrai. Supposons maintenant que $|E(G)| \geq 1$ et que le résultat est vrai pour tout graphe avec moins d'arêtes que G. Posons $\Delta(G) = \Delta$. Soit xy_0 une arête de G. Par hypothèse de récurrence, $G - xy_0$ admet une $(\Delta+1)$-arête-coloration. Comme y_0 est incident au plus $\Delta - 1$ arêtes dans $G - xy_0$, il existe $c_1 \in \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ tel qu'aucune arête incidente à y_0 ne soit colorée c_1. Si aucune arête incidente à x n'est colorée c_1 alors, en colorant xy_0 par c_1, on obtient une $(\Delta + 1)$-arête-coloration de G. On peut donc supposer qu'il existe une arête xy_1 colorée c_1. Comme y_1 est incident au plus Δ arêtes, il existe $c_2 \in \{1, 2, \dots, \Delta + 1\}$ tel qu'aucune arête incidente à y_1 ne soit colorée c_2. Si aucune arête incidente à x n'est colorée c_2, en recolorant xy_1 par c_2 et en colorant xy_0 par c_1 on obtient une $(\Delta + 1)$-arête-coloration de G. On peut donc supposer qu'il existe une arête xy_2 colorée c_2. Et ainsi de suite on construit une suite $y_1, y_2, \dots$ de sommets et une suite de couleurs $c_1, c_2, \dots$ telles que :

(i) xy_i est colorée c_i, et
(ii) c_{i+1} ne colore aucune arête incidente à y_i.

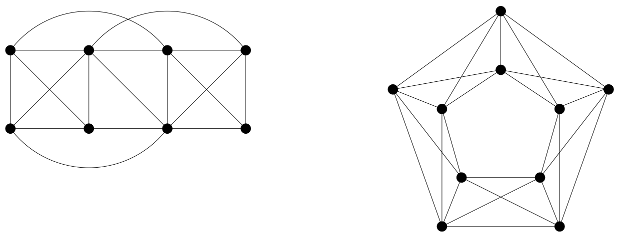
Comme le degré de x est fini, il existe un plus petit entier l tel que pour un entier $k < l$,
(iii) $c_{l+1} = c_k$.

Maintenant, pour $0 \leq i \leq k-1$, recolorons l' arête xy_i avec c_{i+1}.

Il existe une couleur $c_0 \in \{1, 2, \ldots, \Delta + 1\}$ qui n'est attribuée à aucune des arêtes incidentes à x. En particulier, $c_0 \neq c_k$. Soit P le chemin maximal issu de y_{k-1} coloré alternativement c_0 et c_k. Intervertissons les couleurs c_0 et c_k sur $P + xy_{k-1}$. Si P ne contient pas y_k, nous avons une $(\Delta + 1)$-arête-coloration de G. Si P contient (et termine en) y_k, en recolorant l'arête xy_i avec c_{i+1} pour $k \leq i \leq l$, on obtient une $(\Delta + 1)$-arête-coloration de G. □

6.6 Exercices

Exercice 6.1. Trouver le nombre chromatique des graphes suivants :



Exercice 6.2. Soit G un graphe k-régulier biparti. Montrer que pour toute 2-coloration propre de G, il y a autant de sommets colorés 1 que de sommets colorés 2.

Exercice 6.3. Montrer qu'un graphe $G = (V, E)$ est 2^k-colorable si et seulement si E se partitionne en k ensembles $E_1, \ldots, E_k$ tel que pour tout $1 \leq i \leq k$, (V, E_i) soit un graphe biparti.

Exercice 6.4. Si un graphe k-chromatique G admet une coloration pour laquelle toute couleur est assignée à deux sommets alors G a une k-coloration avec la même propriété.

Exercice 6.5. Soit c une coloration propre partielle d'un graphe G avec $\Delta(G) - k$ couleurs telle que chaque sommet non coloré ait au moins $c + 1$ couleurs qui apparaissent au moins deux fois sur son voisinage. Montrer que c peut s'étendre en une $(\Delta(G) - k)$-coloration propre.

Exercice 6.6. 1) Montrer que si G est biparti alors $\chi(G) = w(G)$.

2) Montrer que si G est le complément d'un graphe biparti alors $\chi(G) = \omega(G)$. On pourra utiliser le Théorème 4.6.

Exercice 6.7. 1) Montrer que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leq |V(G)| + 1$. On pourra procéder par récurrence sur $|V(G)|$.
2) Montrer que $\chi(G) + \chi(\overline{G}) \geq 2\sqrt{|V(G)|}$.

Exercice 6.8. Un *graphe d'intervalles* à pour ensemble de sommets $\{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$, tel que chaque I_j est un intervalle $[a_i, b_i] \subset \mathbb{R}$ et deux intervalles I_j et I_k sont reliés par une arête si et seulement s'ils s'intersectent. Montrer que si G est un graphe d'intervalles alors $\chi(G) = \omega(G)$.

Exercice 6.9. Montrer que si G est un graphe de comparabilité alors $\chi(G) = \omega(G)$. Montrer que si G est le complément d'un graphe de comparabilité alors $\chi(G) = \omega(G)$. On pourra utiliser le Corollaire 4.14.

Exercice 6.10. Montrer que pour tout k, le graphe de Mycielski M_k est k-critique, i.e. pour tout sommet $v \in V(M_k)$, $\chi(G - v) < k$.

Exercice 6.11. En 1947, Tutte a construit la suite de graphes $G_3, G_4, \ldots$ par récurrence comme suit : G_3 est le cycle à 5 sommets. Supposons que nous ayons construit G_k avec n_k sommets. Posons $m_k = k(n_k - 1)$. Soit W un ensemble de m_k sommets et pour tout sous-ensemble U de W de cardinalité n_k, soit G_U une copie de G_k tels que W et les $V(G_U)$ soient tous disjoints. Le graphe G_{k+1} et alors obtenu en ajoutant pour chaque $U \subset W$ de cardinalité n_k un couplage parfait entre U et $V(G_U)$. On a alors $|V(G_{k+1})| = n_{k+1} = \binom{m_k}{n_k} n_k + m_k$.
Montrer que pour tout k, G_k est sans triangle ($\omega(G_k) = 2$) et $\chi(G_k) = k$.

Exercice 6.12. Un *cographe* est un graphe sans sous-graphe isomorphe à P_4, le chemin à 4 sommets. Montrer que pour n'importe quel ordre σ sur les sommets, l'algorithme glouton donne une coloration propre optimale (i.e. avec $\chi(G)$ couleurs). (*Indication :* Supposons que l'algorithme glouton utilise k couleurs avec l'ordre $(v_1 < \cdots < v_n)$ et soit i plus petit entier tel qu'il existe une clique composée de $k-i+1$ sommets colorés de i à k. Montrer que $i = 1$.)

Exercice 6.13. Soient G_1 et G_2 deux graphes disjoints et $x_1y_1 \in E(G_1)$ et $x_2y_2 \in E(G_2)$. La *somme d'Hajós* $G = (G_1, x_1y_1) + (G_2, x_2y_2)$ est le graphe obtenu à partir de $G_1 \cup G_2$ en identifiant x_1 et x_2, supprimant x_1y_1 et x_2y_2, et ajoutant y_1y_2.

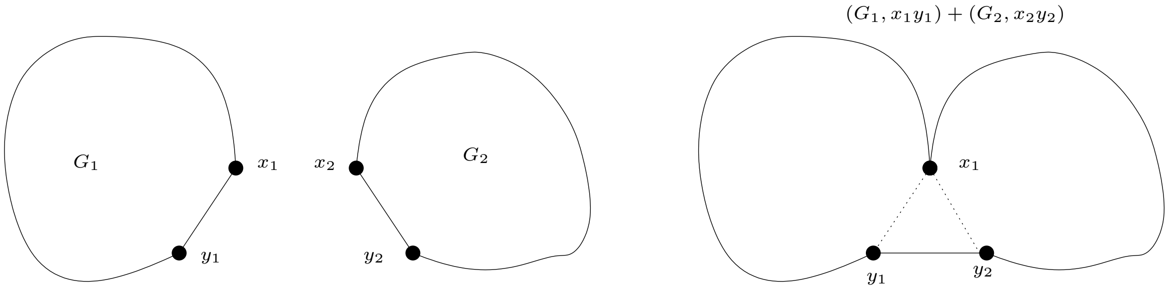


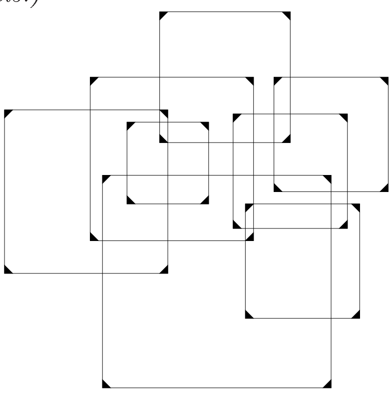
FIG. 6.4 – Somme de Hajós

Montrer que $\chi(G) \geq \min\{\chi(G_1), \chi(G_2)\}$.

Exercice 6.14. Dans le plan, on considère un ensemble de carrés $\mathcal{C}$ alignés sur les axes et de côté variable. Le *graphe d'intersection* de $\mathcal{C}$ noté $G_\mathcal{C}$ est défini comme suit :

- les sommets de $G_\mathcal{C}$ sont les carrés de $\mathcal{C}$;
- deux sommets sont reliés si et seulement si les carrés correspondant s'intersectent.

1) Considérons l'ensemble $\mathcal{C}_1$ de carrés dessiné ci -dessous. *(Pour une meilleure lisibilité, les coins des carrés ont été noircis.)*



a) Dessiner le graphe d'intersection $G_{\mathcal{C}_1}$.
b) Quel est son nombre chromatique ?

2) Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de carrés quelconques et C le plus petit carré de $\mathcal{C}$.
a) Montrer que le voisinage de C dans $G_\mathcal{C}$ est contenu dans l'union de 4 ensembles N_i, $1 \leq i \leq 4$, tels que pour tout $1 \leq i \leq 4$, $N_i \cup \{C\}$ soit une clique. *(On pourra considérer les carrés contenant un coin de C.)*
b) En déduire que $\chi(G_\mathcal{C}) \leq 4\omega(G_\mathcal{C}) - 3$.

3) On suppose maintenant que les carrés de $\mathcal{C}$ sont tous identiques.
a) Montrer que $\chi(G_\mathcal{C}) \leq 2\omega(G_\mathcal{C}) - 1$. *(On pourra considérer le carré le plus haut.)*
b) Donner un exemple de graphe G pour lequel $\chi(G_\mathcal{C}) = 3$ et $\omega(G_\mathcal{C}) = 2$.

Exercice 6.15. Soit G un graphe de degré maximum $k \geq 3$ distinct de K_{k+1}.

1) Montrer que G admet une k-coloration propre telle que pout tout $1 \leq i \leq k-1$, tous les sommets colorés k aient au plus deux voisins colorés i.

2) Montrer que G admet une k-coloration propre telle que tous les sommets colorés k aient au plus 2-voisins colorés 1 et tous les sommets colorés 1 aient au plus deux voisins colorés k.

Exercice 6.16. Montrer la formule d'Euler : pour un graphe planaire connexe avec n sommets, m arêtes et f faces,

$$n - m + f = 2$$

Exercice 6.17. Montrer que si G est un graphe régulier avec un nombre impair de sommets, alors $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$.

Exercice 6.18. Montrer que $\chi'(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n - 1$.

Exercice 6.19. Soit G un graphe r-régulier biparti et E_0 un ensemble de $r - 1$ arêtes. Montrer que $G - E_0$ possède un couplage parfait.

Exercice 6.20. Le *produit* de deux graphes G et H est le graphe $G \times H$ ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et tel que deux sommets (u, v) et (u', v') sont adjacents si et seulement si $u = u'$ et $vv' \in E(H)$ ou $v = v'$ et $uu' \in E(G)$.

(a) Montrer que $\chi'(G \times K_2) = \Delta(G \times K_2)$.

(b) En déduire que si H est non trivial avec $\chi'(H) = \Delta(H)$ alors $\chi'(G \times H) = \Delta(G \times H)$.