Université Paris 7
IUP 2
Analyse de Performance et Simulation
Année 2003-2004

TD no 4
Simulation de distributions discrètes
Fin du TD 2 (Résoudre une récurrence linéaire et méthode congruentielle linéaire)
Générateur à un pas

Simulation de distributions discrètes à partir de la distribution uniforme.

Dans le cours ne sont étudiés que des générateurs aléatoires qui donnent des nombres selon une distribution uniforme. Pourquoi ? C'est parce qu'on peut les utiliser pour ensuite avoir des générateurs qui suivent d'autres distributions.

Exercice 1 [Simuler un dé pipé]

Comment faire pour modéliser un dé à 6 faces qui aurait 2 fois plus de chance de tomber sur 6 que sur 1,2,3,4 et 3 fois plus de chance de tomber sur 5 que sur 1,2,3,4 ?

Exercice 2 [Simuler une loi binomiale]

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et $p \in [0, 1]$ notée $\mathcal{B}(n, p)$ si :

1 X prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1, ..., n\}$
2 $P[X = k] = \binom{n}{k}\ p^k\ (1 - p)^{n-k}, \forall k = 0, ..., n.$

Le nombre d'occurrences d'un même événement au cours de n expériences indépendantes suit une loi binomiale.

a) Vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1.

b) Simuler une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ à l'aide d'une fonction qui renvoie un nombre aléatoire uniforme entre 0 et 1.

Exercice 3 [Simuler une loi géométrique]

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi géométrique de paramètre $p \in [0, 1]$ notée $\mathcal{G}(p)$ si :

1 X prend ses valeurs dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$
2 $P[X = k] = p\ (1 - p)^{k-1}, \forall k \geq 1.$

Le nombre d'expériences indépendantes nécessaires à la promière observation d'un événement suit une loi géométrique.

a) Vérifier que la somme des probabilités vaut bien 1.

b) Comment simuler $\mathcal{G}(p)$?

Exercice 4 [Résoudre une récurrence linéaire.] [Fin du TD 2]

Déterminer l'ensemble des solutions des relations de récurrence suivantes :

- a) $u_n = 4u_{n-1}$
- b) $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$
- c) $u_n = u_{n-1} + 2u_{n-2} + 3$
- d) $u_n = au_{n-1} + b$ avec a et b réels.

Exercice 5 [La Méthode congruentielle linéaire.] [Fin du TD 2]

Supposons que nous voulions générer une suite d'entiers X_0, X_1, ..., tels que $0 \leq X_n < m$. Soit $f(x)$ un fonction telle que $0 \leq x < m$ implique $0 \leq f(x) < m$. Considérons un suite formée selon la règle $X_{n+1} = f(X_n)$. (Un exemple est MSN).

a) Montrer que cette suite est ultimement périodique, c'est-à-dire qu'il existe des nombres λ et μ pour lesquels $X_0, X_1, ..., X_\mu, ..., X_{\mu+\lambda-1}$ sont distinctes, mais $X_{n+\lambda} = X_n$ quand $n \geq \mu$.

Que signifie le cas où $\mu = 0$ et $\lambda = m$?

Donner un exemple où $\mu = m - 1$ et $\lambda = 1$.

b) Montrer qu'il existe un $n > 0$ tel que $X_n = X_{2n}$; et que le plus petit n qui convient est tel que $\mu \leq n \leq \mu + \lambda$. Montrer de plus que cette valeur est unique, c'est-à-dire que si $X_n = X_{2n}$ et $X_r = X_{2r}$, alors $X_r = X_n$.

Exercice 6 [Orbite et paramètre d'un générateur à un pas]

Définition 0.1 *Soit F un ensemble fini, $x_0 \in F$ et $f : F \to F$ une application. On appelle générateur (à un pas) le triplet* (F, f, x_0).

Les caractéristiques d'un générateur sont données par la proposition démontrée en exercice 5. Les *paramètres du générateur sont μ et λ. L'*orbite est l'ensemble des valeurs de la suite $\{x_j\}_{0 \leq j \leq \mu+\lambda-1}$.

Donner les orbites et les paramètres des générateurs suivants :

$$x_0 = 1; x_{n+1} = 2x_n + 5 \bmod 17$$

$$x_0 = 0; x_{n+1} = x_n + 6 \bmod 18$$