Université Paris 7
IUP 2
Analyse de Performance et Simulation
Année 2004-2005

Interrogation écrite
mercredi 5 avril 2005
durée 2 heures

Les documents sont interdits. Les calculatrices ne sont pas autorisées.

La méthode et des explications claires et précises compteront plus que le résultat final. On prendra donc le temps de BIEN JUSTIFIER ses calculs.

Le sujet est en principe trop long pour le temps imparti, il est donc conseillé de traiter en priorité les questions que l'on sait faire en en indiquant clairement la référence.

Exercice 1[Questions de cours]

1. Qu'est-ce qu'un générateur à un pas ? Donner différents exemples.
2. Comment mesurer la performance d'un générateur à un pas ?
3. Que calcule l'algorithme de Floyd ? En quoi est-il efficace ?
4. Qu'est-ce qu'une 'suite de nombres pseudo-aléatoires' ?

Exercice 2

1. Convertir les nombres suivants :
   a) $(10110)_2$ en base 10,
   b) $(436)_7$ en base 3,
   c) $(\underbrace{110...110}_{3n \text{ chiffres}})_2$ en base 10.
2. Donnez le développement décimal illimité de $27/11$.
3. Convertir $(3, 43)_6$ en fraction décimale.
4. Convertir le développement $(4, (76)^\infty)_{10}$ en fraction en base 7.

Exercice 3

Soit n un entier écrit en base 8. On rappelle que l'on a $n = a_N...a_0 = \Sigma_{0\leq k\leq N} a_k 8^k$. Que vaut $n \bmod 4$? En déduire un critère de divisibilité par 4 pour un nombre écrit en base 8.

Tournez la page SVP.

Exercice 4

Déterminez l'ensemble des solutions des relations de récurrence suivantes en fonction des premiers termes de la suite :

1. $u_n = 7u_{n-1}$
2. $u_n = u_{n-1} + 12u_{n-2} + 5$

Exercice 5

1. Résoudre dans $\mathbb{Z}$
   $3x^2 + 4x - 1 = 0$.
2. Résoudre par la méthode vue en cours et discuter dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$
   $4x^2 + 3x + 2 = 0 \bmod 11$.
3. Résoudre par la méthode vue en cours et discuter dans $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$
   $2x^2 + x + m = 0 \bmod 5$.

Exercice 6

1. Donnez l'orbite et les paramètres du générateur suivant :
$$x_0 = 6; x_{n+1} = 3x_n + 7 \bmod 11$$
2. Donnez la pieuvre du générateur suivant :
$$x_{n+1} = 4x_n + 3 \bmod 13$$

Exercice 7

Trouvez tous les a qui rendent ce générateur de période maximale. Justifiez.

$$x_0 = 9; x_{n+1} = ax_n + 5 \bmod 12$$

Exercice 8

1. Trouvez, s'ils existent, le premier et le k^{eme} n (en fonction de k) tel que (on résoudra ici sans utiliser le Théorème des Restes Chinois) :
$$5^n = 2 \times 3^n \bmod 7$$
2. Trouvez, s'ils existent, le premier et le k^{eme} n (en fonction de k) tel que (on résoudra ici sans utiliser le Théorème des Restes Chinois) :
$$7^n = n \times 10^n \bmod 17$$

Changez de feuille SVP.

Exercice 9

Prouvez que si a divise b et c premier avec a, alors a est premier avec $b + c$.

Exercice 10

On rappelle que la suite des nombres de Fibonacci est définie par

$$F_0 = 0; F_1 = 1; F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Montrez que la somme des Fibonacci $u_n = \sum_{k=0}^{n} F_k$ vérifie la récurrence :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$$