Résolution numérique d'équations différentielles
9 février 2006

Tout le monde connaît la formule des solutions de l'équation différentielle $x' = x$. Ce sont les fonctions $C \exp(t)$. Pour certaines équations différentielles, il est impossible de trouver une formule pour la solution. Par exemple, on peut prouver mathématiquement (théorie de galois différentielle) qu'il n'existe pas de formule (utilisant les fonctions élémentaires et leurs primitives) pour exprimer les solutions de l'ED suivante: $x'(t) = x^2(t) - t$. Pourtant ces solutions existent et on peut en calculer des approximations numériques.

1 La méthode d'Euler

On doit résoudre un problème de Cauchy, c'est-à-dire une équation différentielle avec une condition initiale fixée:

$$\begin{cases} x' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \tag{1}$$

On va calculer la solution de l'équation de proche en proche. On commence par discrétiser l'axe temporel en une suite d'instants régulièrement espacés $t_n = nh$ (h est appelé le *pas de temps*). On calcule alors une suite de valeurs $(x_n)_{n\geq 0}$ qui approximent la valeur en t_n de la véritable solution, $x(t_n)$ (c'est-à-dire $x_n \simeq x(t_n)$). Comment définir la suite (x_n)?
La méthode d'Euler repose sur l'approximation suivante (DL d'ordre 1):

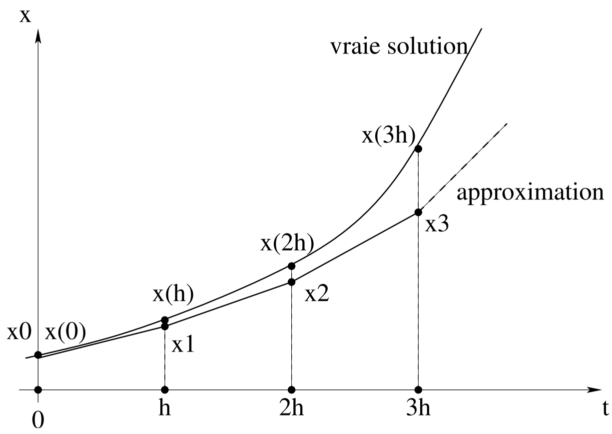
$$x(t+h) = x(t) + hx'(t) + O(h^2) \simeq x(t) + hf(x(t), t)$$

On va donc définir la suite x_n de la façon suivante:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + hf(x_n, t_n) \\ t_n = t_0 + nh \end{cases} \tag{2}$$

Graphiquement, notre solution est la ligne polygonale reliant les points (t_n, x_n) (voir figure).

1) Ecrivez une procédure `Euler` qui prend en argument la fonction à deux variables f, le temps d'intégration T, le pas de temps h et la condition initiale $(t0, x0)$, et dessine l' approximation de la solution sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$
2) Testez la procédure sur l'équation $x' = 2x$ avec $x(0) = 1$ en intégrant l'équation entre 0 et 1, et en prenant des pas de temps de plus en plus petits (h =0.5, 0.1, 0.01, etc...) et tracez le graphe de l'erreur $\log_{10}(|x(t_n) - x_n|)$.



2 Méthode du point milieu

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_{n+\frac{1}{2}}, x_{n+\frac{1}{2}})$$

avec

$$\begin{cases} x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2} f(x_n, t_n) \\ t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h}{2} \end{cases}$$

3 Méthode de Runge-Kutta

$$x_{n+1} = x_n + h\Big[\frac{1}{6} f(x_n, t_n) + \frac{2}{6} f(x_{n+\frac{1}{4}}, t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{2}{6} f(x_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) + \frac{1}{6} f(x_{n+\frac{3}{4}}, t_{n+1})\Big]$$

avec

$$\begin{cases} t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{h}{2} \\ x_{n+\frac{1}{4}} = x_n + \frac{h}{2} f(x_n, t_n) \\ x_{n+\frac{1}{2}} = x_n + \frac{h}{2} f(x_{n+\frac{1}{4}}, t_{n+\frac{1}{2}}) \\ x_{n+\frac{3}{4}} = x_n + hf(x_{n+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}) \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta est de loin la plus efficace. Elle est utilisée dans les logiciels de calcul numérique.

Remarque: Ces différentes méthodes peuvent êtres mises en parallèle avec les méthodes d'intégration numérique. En effet, intégrer revient à résoudre une équation du type $x'(t) = f(t)$. On trouve alors que la méthode d'Euler correspond au rectangle gauche et que Runge-Kutta correspond à Simpson.