

## TD4 : Arbres

### Exercice 1 (Arbres).

On utilisera la structure suivante pour les arbres :

```
Structure Arbre :  
    valeur , un entier  
    nbFils , un entier  
    Fils , un tableau de taille nbFils contenant des Arbres
```

1. Donnez un algorithme calculant le nombre d'éléments dans l'arbre.
2. Donnez un algorithme calculant la valeur maximale de l'arbre.
3. Donnez un algorithme donnant la somme des valeurs de l'arbre.
4. Donnez un algorithme calculant la distance minimale entre une feuille et la racine.
5. Donnez un algorithme calculant le nombre de fils maximal des nœud de l'arbre.

### Exercice 2 (Arbres binaires).

On utilisera la structure suivante pour les arbres binaires :

```
Structure ArbreBinaire :  
    valeur , un entier  
    filsGauche , un ArbreBinaire  
    filsDroit , un ArbreBinaire
```

Si l'un des fils est vide, on supposera que la valeur filsGauche (ou filsDroit) est égale à `None` (de façon équivalente on pourrait supposer que filsGauche et filsDroit sont des pointeurs en C et dans ce cas, l'arbre vide serait un pointeur NULL).

1. Donnez un algorithme de parcours préfixe.
2. Donnez un algorithme de parcours en largeur.
3. Donnez un algorithme testant si deux arbres binaires sont égaux (même forme et même valeurs)

### Exercice 3 (Expressions algébriques).

On utilise une structure d'arbre binaire localement complet  $A$  pour représenter une expression algébrique faisant intervenir l'ensemble des opérateurs binaires  $\{+, -, \times, /\}$ . Chaque feuille de  $A$  contient une valeur numérique, et chaque nœud interne contient un opérateur.

Étant donné un opérateur  $op \in \{+, -, \times, /\}$ , on a accès aux fonctions `op.print()` qui affiche le symbole correspondant, et `op.apply(x,y)` qui renvoie le résultat de l'opérateur appliqué aux valeurs  $x$  et  $y$ .

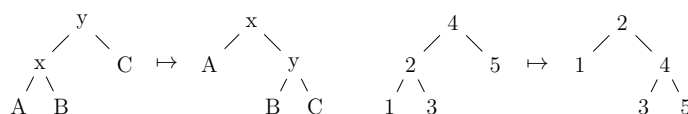
1. Donnez un algorithme qui affiche l'expression algébrique bien parenthésée représentée par  $A$ .
2. Donnez un algorithme qui calcule la valeur numérique de  $A$ .
3. (Difficile) Donnez un algorithme qui lit une expression algébrique bien parenthésée et qui construit l'arbre  $A$  la représentant.

**Exercice 4** (Arbre binaire de recherche).

1. Construisez les arbres binaires de recherche obtenus en insérant un par un les nombres des listes suivantes  $\{4, 2, 5, 1, 3, 4, 5, 6\}$  et  $\{4, 5, 6, 5, 2, 3, 1, 4\}$ .
2. Quel parcours de l'arbre binaire donne la liste triée ?
3. Cherchez des exemples de listes de taille 7 telles que l'insertion donne un arbre binaire de profondeur 7.
4. Même question mais cette fois on veut un arbre binaire de profondeur 3.

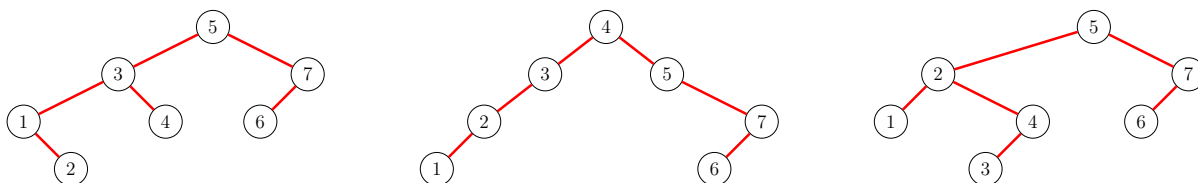
**Exercice 5** (Rotation).

L'opération suivante, (dont on donne un exemple sur la droite) s'appelle *la rotation droite*. L'opération inverse s'appelle *la rotation gauche*.



Ici,  $x$  et  $y$  sont des noeuds de l'arbre, et  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont des sous-arbres qui peuvent contenir plusieurs neuds.

1. Effectuez une rotation droite à la racine des arbres suivants :



2. Même question avec une rotation gauche.
3. La rotation peut s'appliquer sur n'importe quel noeud. Appliquez une rotation droite sur le noeud 3 dans les 2 premiers arbres exemples.
4. Prouvez que la rotation (droite ou gauche) préserve la structure d'arbres binaires de recherche.

**Exercice 6** (Équilibrage).

Les opérations de rotation peuvent servir à "équilibrer" des arbres binaires de recherche. On dit qu'un arbre binaire est équilibré si pour chacun de ses noeuds la différence de profondeur entre son sous-arbre gauche et son sous-arbre droit est strictement inférieure en valeur absolue à 2. Dans la suite, on appellera cette différence la *valeur d'équilibre* du noeud.

1. Calculez les valeurs d'équilibre pour tous les noeuds des 3 arbres donnés en exemple dans l'exercice précédent.
2. Lesquels sont des arbres binaires équilibrés ?
3. Parmi les 5 arbres binaires de taille 3, lesquels sont équilibrés ?
4. Quelles opérations sont nécessaires pour "équilibrer" les autres ?
5. Dans la figure décrivant la rotation droite, on suppose que  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont équilibrés et que les valeurs d'équilibre de  $x$ , et  $y$  sont respectivement 1 et 2. Prouvez que l'arbre obtenu après rotation est équilibré.
6. Étudiez les autres cas (utilisez les résultats obtenus pour les arbres de taille 3).