Courbes et Surfaces: surfaces paramétrées (partie 2)

Florent Lafarge
Inria Sophia Antipolis - Mediterranee

La seconde forme fondamentale joue pour une surface le rôle que joue la courbure pour les courbes : elle contient l'information au deuxième ordre, indépendamment de tout choix de paramétrisation.

Dans tout ce qui suit X désigne une surface de $\mathbb{R}^3$ orientée normalement par $P \in X \mapsto \Gamma(P)$ où $\Gamma(P)$ est un vecteur unitaire orthogonal au plan tangent $T_P X$ au point P de X. Rappelons que si X est représentée (localement) par une équation implicite ou bien par une paramétrisation alors il existe une façon naturelle de définir une orientation normale de X, et donc de définir l'application Γ.

Application de Gauss.

Définition. L'application $X \to \mathbb{R}^3 : P \mapsto \Gamma(P)$ prend ses valeurs dans la sphère $S^2 := \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\}$. L'application co-restreinte $\Gamma : X \to S^2 : P \mapsto \Gamma(P)$ est différentiable et est appelée l'application de Gauss de X.

Soit P un point de X. Par construction les plans tangents $T_P X$ et $T_{\Gamma(P)} S^2$ coïncident, ainsi la différentielle de l'application de Gauss de X en P définit un endomorphisme linéaire sur $T_P X$, c'est-à-dire $d_P\Gamma : T_P X \to T_P X$. On peut alors définir la seconde forme fondamentale de X en P (voir les rappels sur les formes quadratiques) :

Proposition. La différentielle $d_P\Gamma : T_P X \to T_P X$ est un endomorphisme linéaire auto-adjoint.

Définition. La forme quadratique II_P définie sur le plan tangent $T_P X$ par $II_P(w) = -\langle d_P\Gamma(w), w\rangle$ est appelée la seconde forme fondamentale de X en P.

Cette forme quadratique permet de donner des informations géométriques sur la surface au point P.

Courbure normale. Soit C une courbe paramétrée par son abscisse curviligne $s \mapsto c(s)$ et tracée sur X. On suppose que $(P = c(0), \tau, \nu, b)$ est le repère de Frenet de $s \mapsto c(s)$ en P (et donc que P n'est pas un point d'inflexion). Alors $II_P(\tau)$ est appelée la *courbure normale* de C dans X en P. Cette terminologie est justifiée par le calcul suivant :

$$II_P(\tau) = -\langle d_P\Gamma(\tau), \tau\rangle = -\langle (\Gamma \circ c)'(0), c'(0)\rangle = \langle \Gamma(P), c''(0)\rangle,$$

la dernière égalité provenant de la dérivation de l'égalité $\langle (\Gamma \circ c)(s), c'(s)\rangle = 0$ (vraie car C est tracée sur X). En d'autres termes, $II_P(\tau)$ calcule la composante normale à X de l'accélération de la courbe C en P.

Si l'on pousse le calcul légèrement plus loin on obtient $II_P(\tau) = \kappa(P)\langle\Gamma(P), \nu\rangle$, où $\kappa(P)$ désigne la courbure de la courbe C de $\mathbb{R}^3$ au point P, qui nous conduit à l'interprétation géométrique suivante : la seconde forme fondamentale évaluée en un vecteur $t \in T_PX$ calcule, au signe près, la courbure de la section normale de direction t de X (i.e. la courbe plane obtenue en coupant X par un le plan $\langle t, \Gamma(P)\rangle$). Noter que cette courbure dépend par conséquent *quadratiquement* de t.

Courbures principales. Il existe une base orthonormée (voir les rappels sur les formes quadratiques) $\{e_1, e_2\}$ de T_PX dans laquelle $d_p\Gamma : T_PX \to T_PX$ admet pour matrice

$$\begin{pmatrix} -k_1 & 0 \\ 0 & -k_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } k_1 \geq k_2,$$

où k_1 et k_2 correspondent respectivement au maximum et au minimum de la seconde forme fondamentale II_P restreinte au cercle unité de T_PX. En fait k_1 et k_2 sont les valeurs extrémales de la courbure normale en P. On les appelle les *courbures principales* en P, et leurs directions propres correspondantes (données par les vecteurs e_1 et e_2 de T_PX) sont appelées les *directions principales*. Ainsi une courbe tracée sur X dont la vitesse en tout point est une direction principale s'appelle une *ligne de courbure*.

On définit également la *courbure moyenne* de X en P comme l'opposé de la trace de $d_P\Gamma$ et la *courbure de Gauss* comme le déterminant de $d_P\Gamma$ (noter que la trace et le déterminant sont des invariants de similitude, ils peuvent donc être calculer dans n'importe quelle base de T_PX).

Mentionnons deux résultats importants sur la courbure de Gauss :

- Un difféomorphisme isométrique (c'est-à-dire qui conserve les distances) entre 2 surfaces préserve la courbure de Gauss (en particulier il n'existe pas de carte plane isométrique de la terre, ni même d'une portion de la surface de la terre !).
- Le signe de la courbure de Gauss permet de positionner localement la surface par rapport à son plan tangent (voir ci-après).

Calcul des courbures. Nous donnons à présent des formules qui permettent, à partir d'une paramétrisation locale de X, de calculer la seconde forme fondamentale de X dans une base naturelle de $T_P X$.

Proposition. Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X au point $P = X(0,0)$. Dans la base $\langle \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \rangle$ de $T_P X$ la seconde forme fondamentale II_P en un point $w = a\frac{\partial X}{\partial u}(0) + b\frac{\partial X}{\partial v}(0)$ vaut

$$II_P(w) = II_P(a\frac{\partial X}{\partial u}(0) + b\frac{\partial X}{\partial v}(0)) = a^2 A + 2abB + b^2 C$$

où l'on a

$$\begin{aligned} A &= \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(0) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right\|^{-1} \det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(0), \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right), \\ B &= \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(0) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right\|^{-1} \det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(0), \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right), \\ C &= \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(0) \wedge \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right\|^{-1} \det\left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(0), \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right). \end{aligned}$$

Nous donnons maintenant des formules similaires pour la matrice de $d_P\Gamma$.

Proposition. Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X en $P = X(0,0)$. On note

$$I_P(du,dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \text{ et } II_P(du,dv) = Adu^2 + 2Bdudv + Cdv^2$$

les première et seconde formes fondamentales de X en P dans la base $\langle \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \rangle$, de coordonnées (du,dv), de $T_P X$. Alors la matrice de $-d_P\Gamma$ dans cette même base (matrice qui n'est pas nécessairement symétrique) est donnée par

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}.$$

Les courbures principales sont les valeurs propres de cette matrice et les droites propres les directions principales. En particulier la courbure de Gauss vaut $\frac{AC-B^2}{EG-F^2}$.

Distance du plan tangent à la surface. Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X au voisinage de $P = X(0,0)$. La distance d'un point $X(u,v)$ au plan tangent $T_P X = \langle \frac{\partial X}{\partial u}(0), \frac{\partial X}{\partial v}(0) \rangle$ de X au point P est donnée par

$$d := \langle X(u,v) - P, \Gamma(P) \rangle.$$

Or d'après la formule de développement limité de Taylor on a

$$X(u,v) = X(0,0) + \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial X}{\partial u}(0) \\ \frac{\partial X}{\partial v}(0) \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 X}{\partial u^2}(0) & \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(0) \\ \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}(0) & \frac{\partial^2 X}{\partial v^2}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + o(u^2+v^2).$$

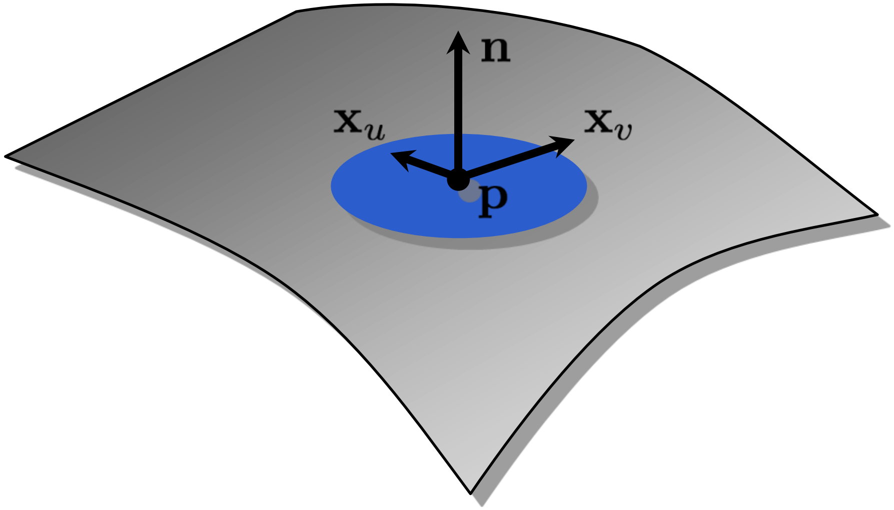
On en déduit donc (cf. proposition)

$$d = \frac{1}{2}\, II_P \left(u \frac{\partial X}{\partial u}(0) + v \frac{\partial X}{\partial v}(0) \right) + o(u^2+v^2).$$

Remarquer que cette formule permet de donner la position de X au voisinage de $T_P X$ suivant le signe de la seconde forme fondamentale. Ainsi si la courbure de Gauss (i.e. le déterminant de $d_P\Gamma$) est strictement positive alors II_P a un signe constant, et donc le plan tangent se trouve d'un même coté de la surface ; si la courbure de Gauss est strictement négative alors II_P change de signe et la surface traverse le plan tangent.

- Surface continue

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$



- vecteur normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$

- Hypothèse: paramétrisation régulière

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$$

Angles sur la surface

- courbe $[u(t), v(t)]$ dans le plan *uv* définie une courbe sur la surface x(u,v)

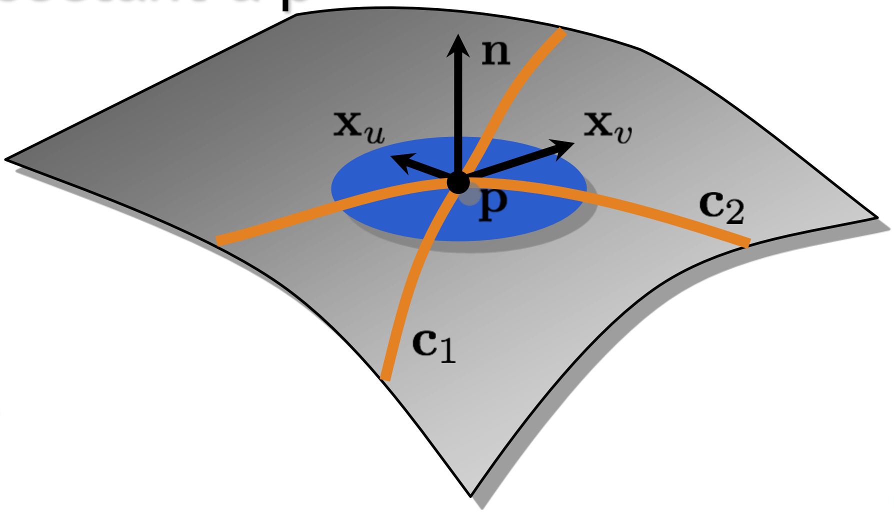
$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

- deux courbes c_1 et c_2 s'intersectant à p
  - Angle d'intersection?
  - deux tangentes t_1 et t_2

$$\mathbf{t}_i = \alpha_i \mathbf{x}_u + \beta_i \mathbf{x}_v$$

  - Calcul du produit scalaire

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 = \cos\theta \, \|\mathbf{t}_1\| \, \|\mathbf{t}_2\|$$



Angles sur la surface

- courbe $[u(t), v(t)]$ dans le plan *uv* définie une courbe sur la surface x(u,v)

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

- deux courbes c_1 et c_2 s'intersectant à p

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 &= (\alpha_1 \mathbf{x}_u + \beta_1 \mathbf{x}_v)^T (\alpha_2 \mathbf{x}_u + \beta_2 \mathbf{x}_v) \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v + \beta_1 \beta_2 \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \\
&= (\alpha_1, \beta_1) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v & \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Première forme fondamentale

- Définie le produit scalaire sur l'espace tangent

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v & \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}^T \mathbf{I} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Première forme fondamentale

- Première forme fondamentale $\mathbf{I}$ permet de mesurer:

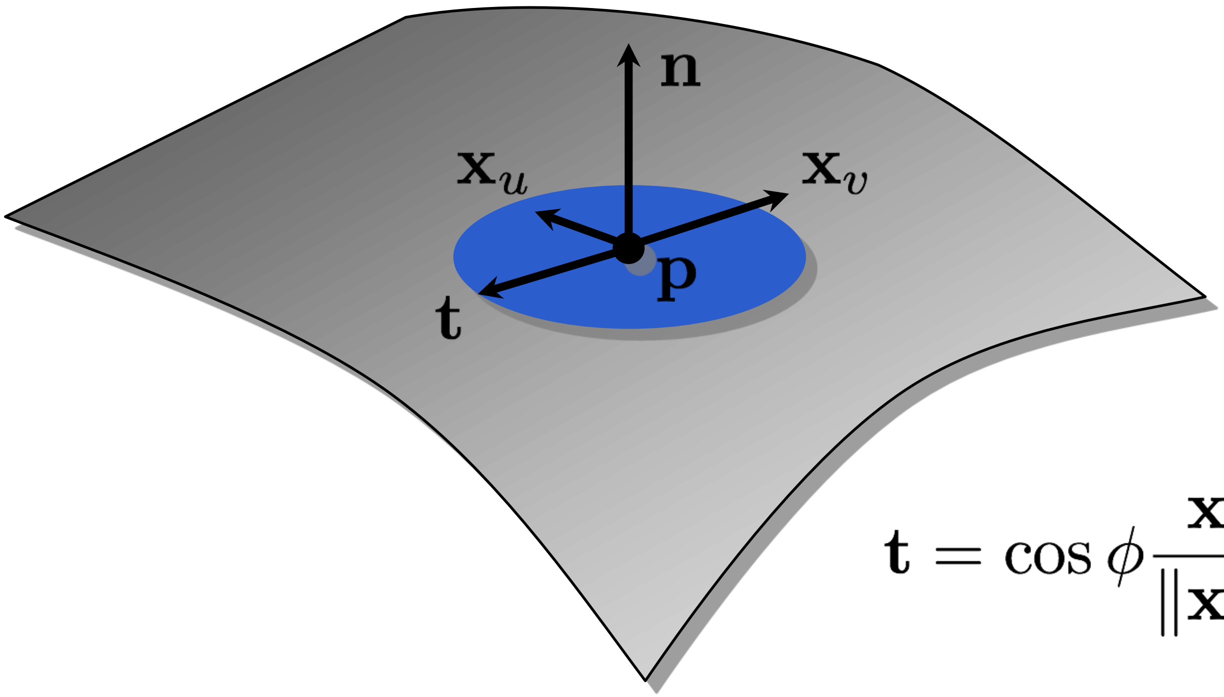
  - Angles
    $$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 = \langle (\alpha_1, \beta_1) \ , \ (\alpha_1, \beta_1) \rangle$$

  - Longeur
    $$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \langle (\mathrm{d}u, \mathrm{d}v), (\mathrm{d}u, \mathrm{d}v) \rangle \\ &= E \mathrm{d}u^2 + 2F \mathrm{d}u \mathrm{d}v + G \mathrm{d}v^2 \end{aligned}$$

  - Surface
    $$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\| \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \sqrt{\mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v - (\mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v)^2} \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \\ &= \sqrt{EG - F^2} \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v \end{aligned}$$

Courbure normale

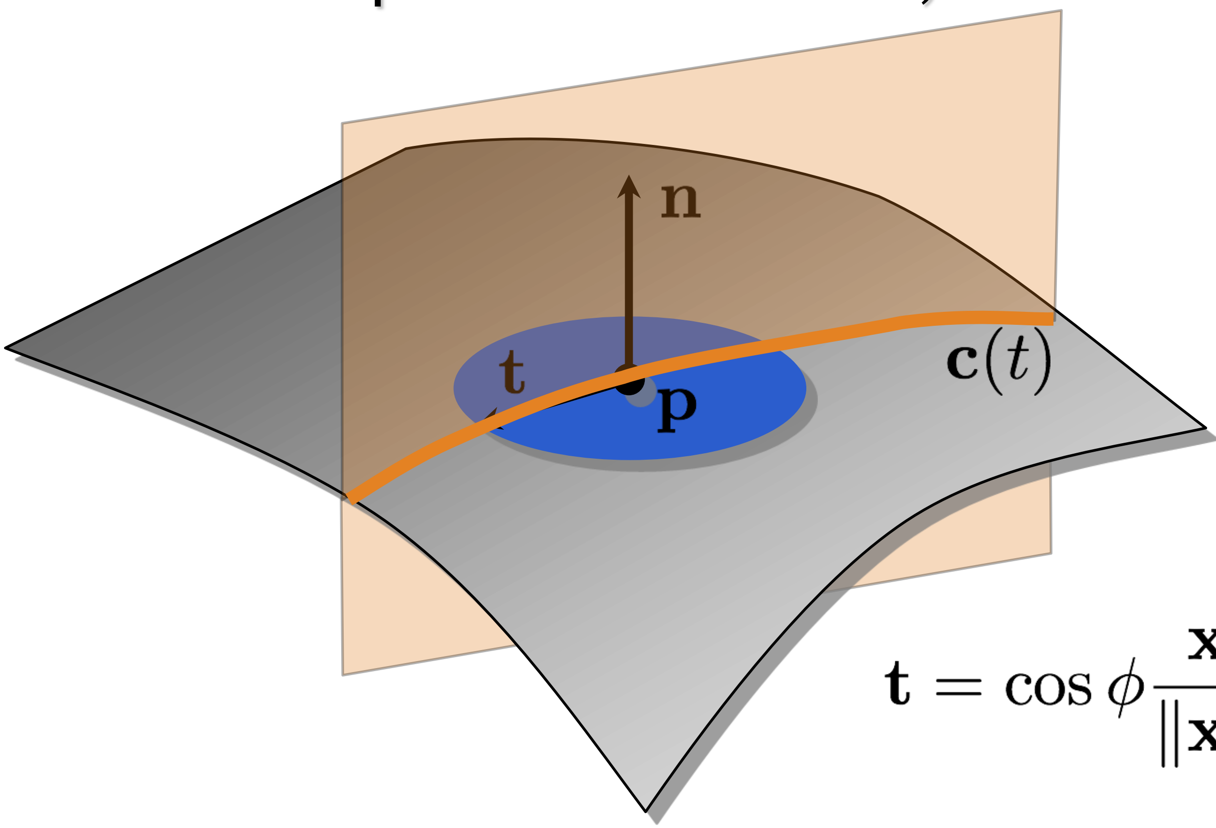
- Vecteur tangeur $\mathbf{t}$...



$$\mathbf{t} = \cos\phi \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} + \sin\phi \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|}$$

Courbure normale

- .. Définit le plan d'intersection, donnant la courbe $\mathbf{c}(t)$



$$\mathbf{t} = \cos\phi \frac{\mathbf{x}_u}{\|\mathbf{x}_u\|} + \sin\phi \frac{\mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_v\|}$$

Courbure normale

- Courbure normale $\kappa_n(\mathbf{t})$ est definie comme la courbure de la courbe c(t) au point p = x(u, v).

- Seconde forme fondamentale

$$\mathbf{II} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_{uu}^T\mathbf{n} & \mathbf{x}_{uv}^T\mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{uv}^T\mathbf{n} & \mathbf{x}_{vv}^T\mathbf{n} \end{pmatrix}$$

- Courbure normale peut etre calculer comme

$$\kappa_n(\bar{\mathbf{t}}) = \frac{\bar{\mathbf{t}}^T\,\mathbf{II}\,\bar{\mathbf{t}}}{\bar{\mathbf{t}}^T\,\mathbf{I}\,\bar{\mathbf{t}}} = \frac{ea^2 + 2fab + gb^2}{Ea^2 + 2Fab + Gb^2}$$

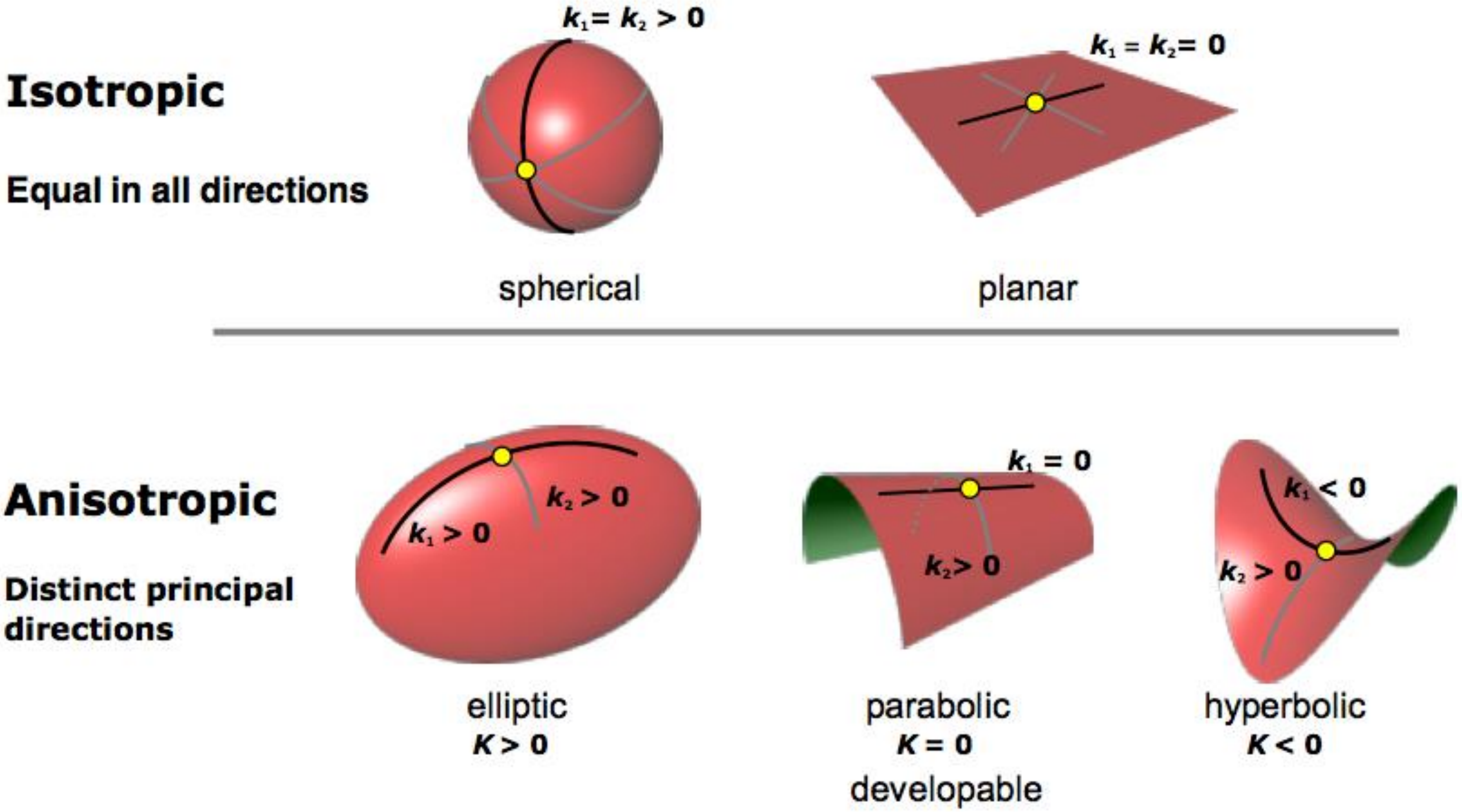
$$\boxed{\begin{aligned} \mathbf{t} &= a\mathbf{x}_u + b\mathbf{x}_v \\ \bar{\mathbf{t}} &= (a,b) \end{aligned}}$$

Surface curvatures

- *Principal curvatures*
  - Maximum curvature $\kappa_1 = \max_{\phi} \kappa_n(\phi)$
  - Minimum curvature $\kappa_2 = \min_{\phi} \kappa_n(\phi)$
  - Euler theorem: $\kappa_n(\phi) \; = \; \kappa_1 \cos^2 \phi + \kappa_2 \sin^2 \phi$
  - Corresponding *principal directions* e_1, e_2 are orthogonal

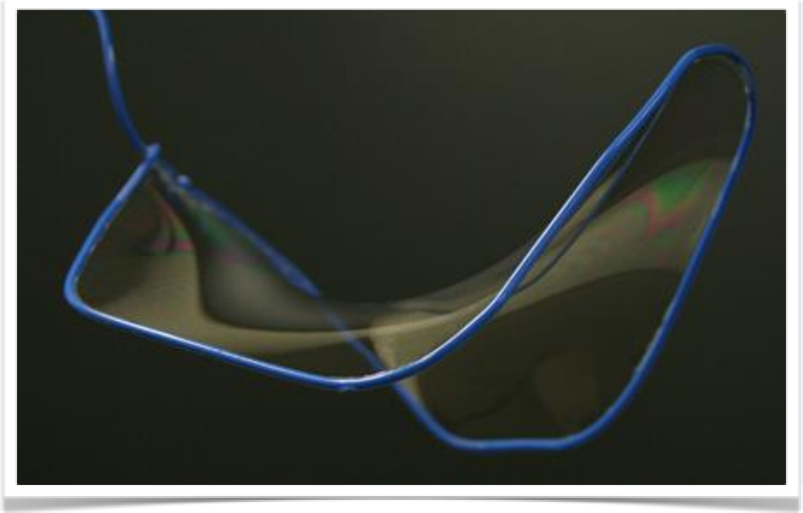
Classification

- A point $\mathbf{x}$ on the surface is called



Curvature of surfaces

- Mean curvature $H = \dfrac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}$
  - H = 0 everywhere → minimal surface



soap films

Curvature of surfaces

- Gaussian curvature $K = \kappa_1 \cdot \kappa_2$
  - K = 0 everywhere → developable surface

Disney Concert Hall, L.A.
Architects: Gehry Partners

Timber Fabric
IBOIS, EPFL

Classification

- A point $\mathbf{x}$ on the surface is called
  - *elliptic*, if $K > 0$
  - *hyperbolic*, if $K < 0$
  - *parabolic*, if $K = 0$
  - *umbilic*, if $\kappa_1 = \kappa_2$

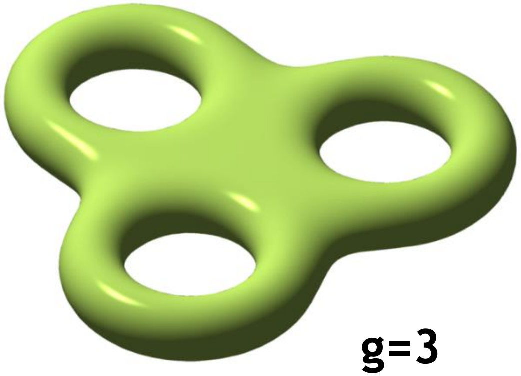
Genus of a surface

- largest number of nonintersecting simple closed curves that can be drawn on the surface without separating it

- It is equal to the number of holes in a surface

g=0

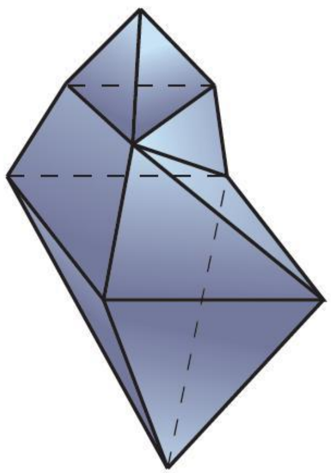
g=1



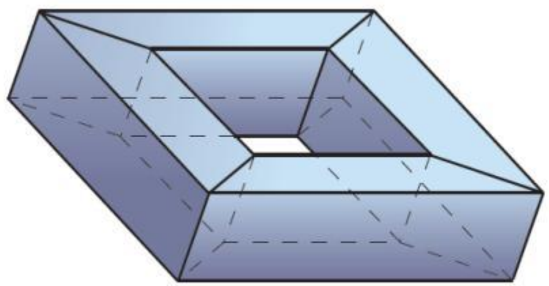
g=3

Euler characteristic

$$\chi = V - E + F$$



V – E + F = 2



V – E + F = 0

Gauss-Bonnet theorem

- For **any** closed manifold surface with Euler characteristic χ = 2-2g

$$\int K = 2\pi\chi$$

$\int K($  $) = \int K($  $) = \int K($  $) = 4\pi$