Courbes et Surfaces: surfaces paramétrées

Florent Lafarge
Inria Sophia Antipolis - Mediterranee

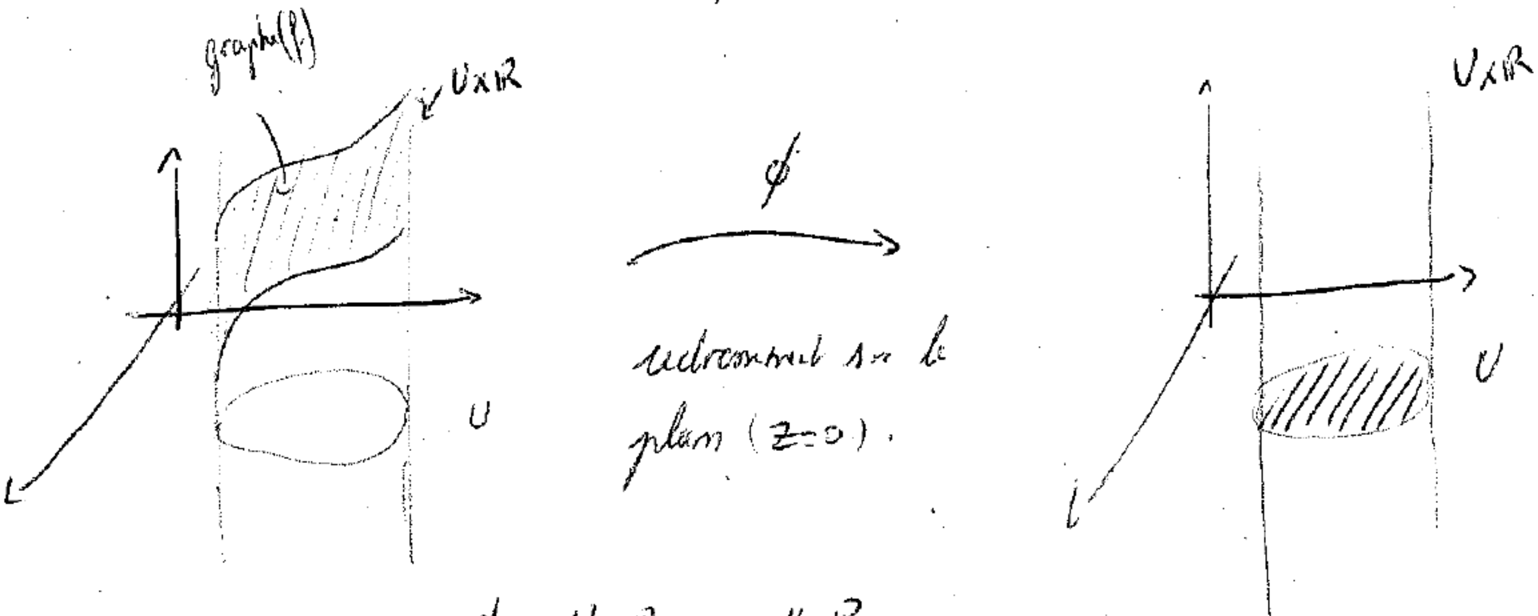
Définition. *Une partie X de $\mathbb{R}^3$ est une surface (lisse) de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ si pour tout $P \in X$ il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^3$ de P, un plan Π et un difféomorphisme $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^3$, V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, tels que $\phi(U \cap X) = V \cap \Pi$.*

Une telle définition des surfaces par redressement sur un espace affine est difficile à manipuler en pratique, mais elle fournit deux types de *représentations* des surfaces qui sont couramment utilisées : les représentations implicites et paramétrées.

<u>Exemple 1:</u> Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^1$ $\mathcal{C}^1$

$$\text{graphe}(f) = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \text{ tq } (x,y) \in U \text{ et } z = f(x,y) \} \subset U \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$$

C'est une surface $\mathcal{C}^1$. En effet :



$$\phi : U \times \mathbb{R} \longrightarrow U \times \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \longrightarrow (x,y,z-f(x,y)).$$

clairement un difféo

Définition. *Une partie X de $\mathbb{R}^3$ est une surface (lisse) de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ si pour tout $P \in X$ il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^3$ de P, un plan Π et un difféomorphisme $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^3$, V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, tels que $\phi(U \cap X) = V \cap \Pi$.*

Une telle définition des surfaces par redressement sur un espace affine est difficile à manipuler en pratique, mais elle fournit deux types de *représentations* des surfaces qui sont couramment utilisées : les représentations implicites et paramétrées.

Représentation implicite. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ telle que pour tout point $P \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $f(P) = 0$ la différentielle $d_P(f)$ est non nulle. Alors l'ensemble $f^{-1}(0)$ est une surface $\mathcal{C}^k$.*

Définition. *Une partie X de $\mathbb{R}^3$ est une surface (lisse) de classe $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ si pour tout $P \in X$ il existe un voisinage $U \subset \mathbb{R}^3$ de P, un plan Π et un difféomorphisme $\phi : U \to V \subset \mathbb{R}^3$, V un ouvert de $\mathbb{R}^3$, tels que $\phi(U \cap X) = V \cap \Pi$.*

Une telle définition des surfaces par redressement sur un espace affine est difficile à manipuler en pratique, mais elle fournit deux types de *représentations* des surfaces qui sont couramment utilisées : les représentations implicites et paramétrées.

Représentation implicite. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ telle que pour tout point $P \in \mathbb{R}^3$ vérifiant $f(P) = 0$ la différentielle $d_P(f)$ est non nulle. Alors l'ensemble $f^{-1}(0)$ est une surface $\mathcal{C}^k$.*

Représentation paramétrée. *Soit $(u, v) \mapsto X(u, v)$ une application $\mathcal{C}^k$ $(k \geq 1)$ définie sur un voisinage de l'origine de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. Si $\frac{\partial X}{\partial u}(0)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(0)$ sont linéairement indépendants alors il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^2$ contenant l'origine et tel que $X(U)$ est une surface $\mathcal{C}^k$.*

Plan tangent. *Soit X une surface. Son plan tangent en $P \in X$ est l'ensemble des vecteurs vitesses en P des courbes contenus dans X et passant par P. C'est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il est noté $T_P X$.*

Plan tangent. *Soit X une surface. Son plan tangent en $P \in X$ est l'ensemble des vecteurs vitesses en P des courbes contenus dans X et passant par P. C'est un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$, il est noté $T_P X$.*

Suivant la représentation de X que l'on se donne, c'est-à-dire par redressement, par équation implicite ou bien par paramétrisation, on peut calculer le plan tangent à X en un point P de la façon suivante :

Théorème. Le plan tangent à une surface X en un point $P \in X$ peut être défini par

(rep. paramétrique) Si $(u, v) \mapsto X(u, v)$ est une paramétrisation locale de X au voisinage de P telle que $X(0, 0) = P$, alors $T_P X$ est le plan vectoriel engendré par $\frac{\partial X}{\partial u}(0, 0)$ et $\frac{\partial X}{\partial v}(0, 0)$

Première forme fondamentale. Soit X une surface de $\mathbb{R}^3$. En tout point de X le plan tangent hérite d'une structure euclidienne (existence d'un produit scalaire) de l'espace ambiant $\mathbb{R}^3$.

Soit $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X. On sait que l'espace tangent à X est engendré par les vecteurs $\frac{\partial X}{\partial u}$ et $\frac{\partial X}{\partial v}$ (on omet volontairement de ne pas préciser le point de X que l'on considère pour alléger les notations). Tout vecteur w de l'espace tangent s'écrit donc

$$w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v},$$

où a et b sont des réels. Au produit scalaire sur l'espace tangent à X (qui est induit par celui de $\mathbb{R}^3$) est associée une forme quadratique (dépendant du point (u,v)) appelée *première forme fondamentale* de la surface X :

$$\|w\|^2 = a^2 \left\|\frac{\partial X}{\partial u}\right\|^2 + 2ab\frac{\partial X}{\partial u}.\frac{\partial X}{\partial v} + b^2 \left\|\frac{\partial X}{\partial v}\right\|.$$

Définition. La forme quadratique $I_P(w) := \|w\|^2$ sur $T_P X$, P étant un point de X et $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X telle que $X(0,0) = P$, s'appelle la première forme fondamentale de X en P. On note traditionnellement

$$E := \left\| \frac{\partial X}{\partial u}(0,0) \right\|^2, \; F := \frac{\partial X}{\partial u}(0,0) . \frac{\partial X}{\partial v}(0,0), \text{ et } G := \left\| \frac{\partial X}{\partial v}(0,0) \right\|^2 .$$

Ainsi si $w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}$, alors $I_P(w) = a^2 E + 2abF + b^2 G$.

Définition. La forme quadratique $I_P(w) := \|w\|^2$ sur T_PX, P étant un point de X et $(u,v) \mapsto X(u,v)$ une paramétrisation locale de X telle que $X(0,0) = P$, s'appelle la première forme fondamentale de X en P. On note traditionnellement

$$E := \left\|\frac{\partial X}{\partial u}(0,0)\right\|^2, \ F := \frac{\partial X}{\partial u}(0,0).\frac{\partial X}{\partial v}(0,0), \text{ et } G := \left\|\frac{\partial X}{\partial v}(0,0)\right\|^2.$$

Ainsi si $w = a\frac{\partial X}{\partial u} + b\frac{\partial X}{\partial v}$, alors $I_P(w) = a^2E + 2abF + b^2G$.

Il faut noter que les quantités E, F et G peuvent être les mêmes pour deux surfaces différentes. En voici une illustration :

- Un plan π passant par un point P et dirigé par les vecteurs orthonormaux w_1 et w_2 peut être paramétré par $(u,v) \mapsto P + uw_1 + vw_2$, et donc $E = 1$, $F = 0$ et $G = 1$.
- Un cylindre droit peut être paramétré par $(u,v) \mapsto X(u,v) := \begin{pmatrix} \cos(u) \\ \sin(u) \\ v \end{pmatrix}$, où (u,v) sont les points de $\mathbb{R}^2$ tels que $0 \leq u < 2\pi$. Ici encore on obtient $E = 1$, $F = 0$ et $G = 1$.

La première forme fondamentale d'une surface permet de répondre à des questions métriques sur une surface X, par exemple le calcul de la longueur d'un arc de courbe tracé sur X, ou bien encore le calcul de l'aire d'une région de X.

Calcul de la longueur d'un arc tracé sur une surface. Soit $X \subset \mathbb{R}^3$ une surface localement paramétrée par $(u,v) \mapsto X(u,v)$. Soit $t \in I \mapsto c(t) := (u(t), v(t))$ une courbe tracée dans le domaine des paramètres, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. La longueur de l'arc de courbe $t \in I \mapsto X(u(t), v(t)) = X \circ c(t)$ tracée sur X est donnée par

$$\begin{aligned} \text{longueur}(X \circ c) &= \int_I \|(X \circ c)'(t)\| dt = \int_I \left\| u'(t) \frac{\partial X}{\partial u} + v'(t) \frac{\partial X}{\partial v} \right\| dt \\ &= \int_I \sqrt{u'(t)^2 E + 2u'(t)v'(t)F + v'(t)^2 G} dt. \end{aligned}$$

Cette formule est souvent résumée par $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, où les différentielles sont prises par rapport à la variable t et s désigne l'abscisse curviligne de la courbe tracée sur X.

Calcul de la longueur d'un arc tracé sur une surface. Soit $X \subset \mathbb{R}^3$ une surface localement paramétrée par $(u,v) \mapsto X(u,v)$. Soit $t \in I \mapsto c(t) := (u(t), v(t))$ une courbe tracée dans le domaine des paramètres, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. La longueur de l'arc de courbe $t \in I \mapsto X(u(t), v(t)) = X \circ c(t)$ tracée sur X est donnée par

$$\begin{aligned}\text{longueur}(X \circ c) &= \int_I \|(X \circ c)'(t)\| dt = \int_I \left\| u'(t)\frac{\partial X}{\partial u} + v'(t)\frac{\partial X}{\partial v} \right\| dt \\ &= \int_I \sqrt{u'(t)^2 E + 2u'(t)v'(t)F + v'(t)^2 G}\, dt.\end{aligned}$$

Cette formule est souvent résumée par $ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$, où les différentielles sont prises par rapport à la variable t et s désigne l'abscisse curviligne de la courbe tracée sur X.

Calcul de l'aire d'une surface localement paramétrée.

Définition. L'aire d'une surface localement paramétrée par $(u,v) \mapsto X(u,v)$ où $(u,v) \in U \subset \mathbb{R}^2$ est donnée par l'intégrale

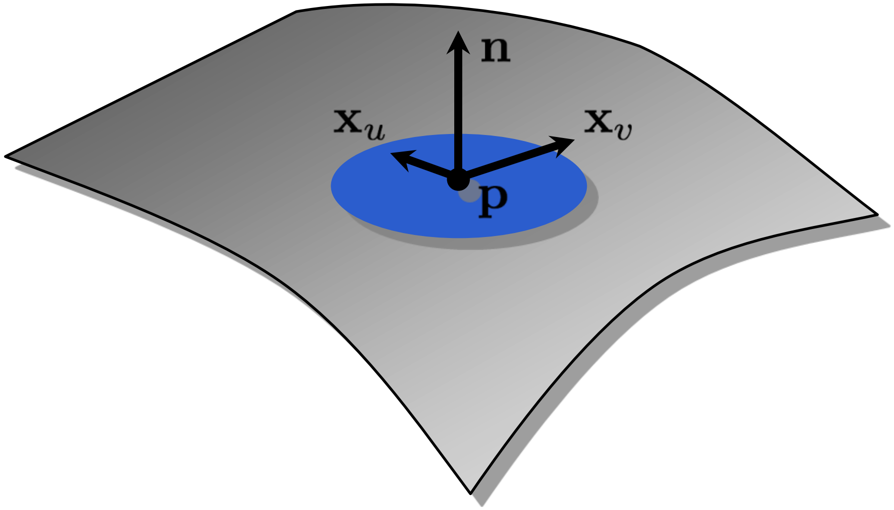
$$\text{Aire}(X) := \int_U \left\| \frac{\partial X}{\partial u} \wedge \frac{\partial X}{\partial v} \right\| dudv = \int_U \sqrt{EG - F^2}\, dudv.$$

- Surface continue

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$$

- vecteur normal

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v}{\|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|}$$



- Hypothèse: paramétrisation régulière

$$\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v \neq \mathbf{0}$$

Angles sur la surface

- courbe $[u(t), v(t)]$ dans le plan *uv* définie une courbe sur la surface x(u,v)

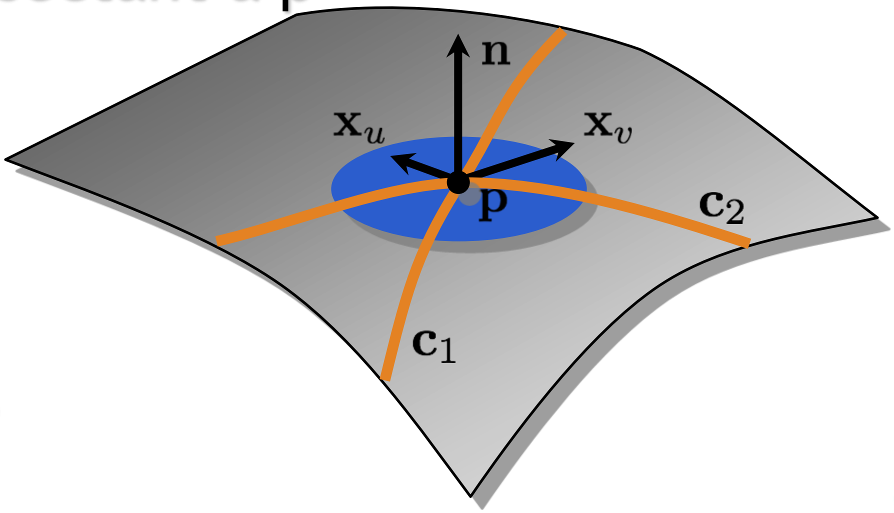
$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

- deux courbes c_1 et c_2 s'intersectant à p
  - Angle d'intersection?
  - deux tangentes t_1 et t_2

$$\mathbf{t}_i = \alpha_i \mathbf{x}_u + \beta_i \mathbf{x}_v$$

  - Calcul du produit scalaire

$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 = \cos\theta \, \|\mathbf{t}_1\| \, \|\mathbf{t}_2\|$$



Angles sur la surface

- courbe $[u(t), v(t)]$ dans le plan *uv* définie une courbe sur la surface x(u,v)

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{x}(u(t), v(t))$$

- deux courbes c_1 et c_2 s'intersectant à p

$$\begin{aligned}
\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 &= (\alpha_1 \mathbf{x}_u + \beta_1 \mathbf{x}_v)^T (\alpha_2 \mathbf{x}_u + \beta_2 \mathbf{x}_v) \\
&= \alpha_1 \alpha_2 \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u + (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v + \beta_1 \beta_2 \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \\
&= (\alpha_1, \beta_1) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v & \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Première forme fondamentale

- Définie le produit scalaire sur l'espace tangent

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_u & \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v \\ \mathbf{x}_u^T \mathbf{x}_v & \mathbf{x}_v^T \mathbf{x}_v \end{pmatrix}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \right\rangle := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix}^T \mathbf{I} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$$

Première forme fondamentale

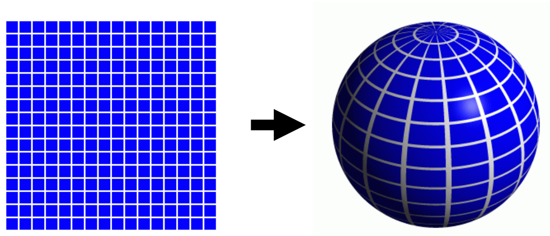
- Première forme fondamentale $\mathbf{I}$ permet de mesurer:

  - Angles
$$\mathbf{t}_1^T \mathbf{t}_2 = \langle(\alpha_1, \beta_1)\ ,\ (\alpha_1, \beta_1)\rangle$$

  - Longeur
$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 &= \langle(\mathrm{d}u, \mathrm{d}v), (\mathrm{d}u, \mathrm{d}v)\rangle \\ &= E\mathrm{d}u^2 + 2F\mathrm{d}u\mathrm{d}v + G\mathrm{d}v^2 \end{aligned}$$

  - Surface
$$\begin{aligned} \mathrm{d}A &= \|\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v\|\ \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \sqrt{\mathbf{x}_u^T\mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v^T\mathbf{x}_v - (\mathbf{x}_u^T\mathbf{x}_v)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \sqrt{EG - F^2}\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \end{aligned}$$

Exemple de la sphere



- parametrisation sphérique

$$\mathbf{x}(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \sin v \\ \sin u \sin v \\ \cos v \end{pmatrix}, \quad (u,v) \in [0,2\pi) \times [0,\pi)$$

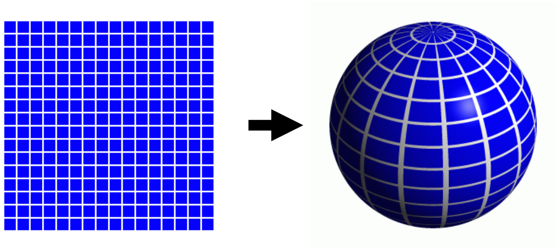
- Vecteurs tangent

$$\mathbf{x}_u(u,v) = \begin{pmatrix} -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}_v(u,v) = \begin{pmatrix} \cos u \cos v \\ \sin u \cos v \\ -\sin v \end{pmatrix}$$

- Première forme fondamentale

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} \sin^2 v & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exemple de la sphere



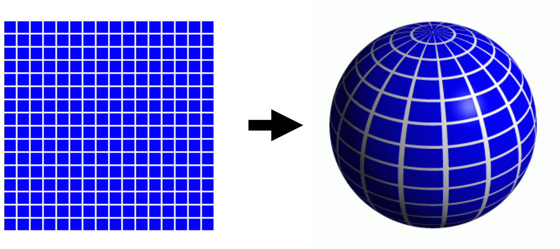
- Longueur de l'équateur $\mathbf{x}(t, \pi / 2)$

$$\int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}s \;=\; \int_0^{2\pi} \sqrt{E\left(u_t\right)^2 + 2F u_t v_t + G\left(v_t\right)^2}\,\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^{2\pi} \sin v \,\mathrm{d}t$$

$$= \; 2\pi \sin v \;=\; 2\pi$$

Exemple de la sphere



- Aire d’une sphère

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}A = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\sin v\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

$$= 4\pi$$