Courbes et Surfaces

Florent Lafarge
Inria Sophia Antipolis - Mediterranee

Plan du cours

12 séances (1h de cours + 2h TD)

Interpolation

- Courbes paramétrées: définitions, courbure, repère de Frenet.
- Courbes de Bézier: définitions, propriétés, manipulation algorithmique.
- Fonctions et courbes splines: définitions, propriétés, aspects numériques.
- Surfaces: définitions, espace tangent, représentations implicites et paramétriques.
- Surfaces paramétrées: formes fondamentales, courbures, géodésiques.
- Coordonnées barycentriques: définitions, propriétés, algorithmes, applications.
- Transport optimal: distance de Wasserstein, programmation linéaire, barycentres, applications.

Approximation

- Surfaces discrètes: maillages, estimation de mesures différentielles.
- Analyse en composante principale: définitions, optimalité, algorithmes, interprétation géométrique.
- Détection de structures: transformée de Hough, RANSAC, clustering, symétries et orbites.

Définition. Une courbe est dite plane lorsqu'elle est entièrement contenue dans un plan. Une courbe plane paramétrée s'identifie à la donnée d'une application

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2 : t \to \alpha(t) := (x(t), y(t))$$

où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x(t), y(t)$ sont des fonctions au moins continues, habituellement suffisamment différentiables (ce que nous supposerons dans toute la suite).

Définition. Une courbe est dite plane lorsqu'elle est entièrement contenue dans un plan. Une courbe plane paramétrée s'identifie à la donnée d'une application

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^2 : t \to \alpha(t) := (x(t), y(t))$$

où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x(t), y(t)$ sont des fonctions au moins continues, habituellement suffisamment différentiables (ce que nous supposerons dans toute la suite).

Noter qu'une courbe plane peut également être représentée sous la forme $F(x, y) = 0$, c'est-à-dire comme fonction de deux variables indépendantes. Cette représentation est souvent complémentaire de la représentation paramétrée.

Régularité. On dit qu'une courbe plane paramétrée est régulière en un point t_0, ou bien que t_0 est un point régulier pour cette courbe, si $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0)) \neq (0,0)$. Elle est dite régulière sur I si pour tout t dans I, $\alpha'(t) \neq (0,0)$. Un point t_0 tel que $\alpha'(t_0) = (0,0)$ est appelé point singulier pour la courbe.

Vecteur vitesse. Pour tout $y \in I$, le vecteur $\alpha'(t)$ est souvent appelé *vecteur vitesse* de la courbe au point $\alpha(t)$. Ainsi, la courbe est régulière au point $\alpha(t)$ si et seulement si elle possède une vitesse non nulle en ce point.

Reparamétrisation. Soient $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée, J un autre intervalle de $\mathbb{R}$ et $h : J \to I$ une fonction $\mathcal{C}^1$ telle que $h'(s) \neq 0$ pour tout $s \in J$. Alors

$$\beta = \alpha \circ h : J \to \mathbb{R}^2 : s \mapsto \alpha(h(s))$$

est appelée une *reparamétrisation* de α.

Si $h'(s) > 0$ pour tout $s \in J$, on parle de reparamétrisation positive : l'orientation (le sens des vecteurs vitesses) de la courbe est conservée.

Si $h'(s) < 0$ pour tout $s \in J$, on parle de reparamétrisation négative : l'orientation (le sens des vecteurs vitesses) de la courbe est inversée.

Longueur d'un arc. Soient $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $]a, b[\subset I$. La longueur de l'arc de courbe compris entre les points $A := \alpha(a)$ et $B := \alpha(b)$ est donnée par

$$L(A, B) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt.$$

La longueur est bien définie : elle est invariante par reparamétrisation.

Abscisse curviligne. Soient $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée et $t_0 \in I$. L'abscisse curviligne d'origine $\alpha(t_0)$ de α est la fonction

$$s : I \to \mathbb{R} : t \mapsto \int_{t_0}^{t} \|\alpha'(t)\| dt.$$

Si α est une paramétrisation régulière, alors on peut la reparamétrer à l'aide de l'abscisse curviligne

$$I \to \mathbb{R}^2 : t \mapsto \alpha(s^{-1}(t)).$$

On parle de paramétrisation par l'abscisse curviligne ; le vecteur vitesse est alors unitaire en tout point.

Repère de Frenet. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée régulière. Pour tout $t \in I$, on appelle *repère de Frenet* de la courbe au point $\alpha(t)$ le repère $(\tau(t), \eta(t))$ tel que

- $\tau(t)$ est le vecteur tangent unitaire $:= \alpha'(t)/\|\alpha'(t)\|$ et
- $\eta(t)$ est l'unique vecteur unitaire normal à $\tau(t)$, tel que le repère $(\tau(t), \eta(t))$ soit direct (c'est-à-dire tel que $\det(\tau(t), \eta(t)) = +1$).

Courbure. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée par l'abscisse curviligne. Alors, pour tout $t \in I$ le vecteur accélération $\alpha''(t)$ est perpendiculaire au vecteur tangent $\tau(t)$, c'est-à-dire $\tau(t).\alpha''(t) = 0$.

Définition. La courbure au point $P = \alpha(t)$, notée $\kappa(P) \in \mathbb{R}$, est définie par l'égalité

$$\alpha''(t) = \tau'(t) = \kappa(P)\eta(t).$$

Si $\kappa(P) \neq 0$ alors la quantité $\rho(P) = 1/|\kappa(P)|$ est appelée le *rayon de courbure* au point P (par convention, on pose $\rho(P) = +\infty$ si $\kappa(P) = 0$).

Noter que le signe de la courbure est sensible au changement d'orientation.

Théorème. Soit κ une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Soit $t_0 \in I$, P un point et v un vecteur unitaire dans le plan. Alors, il existe une unique courbe de classe $\mathcal{C}^2$ paramétrée par son abscisse curviligne $t \mapsto \alpha(t)$ telle que $\kappa(t)$ soit la courbure de la courbe au point $\alpha(t)$ pour tout $t \in I$, $\alpha(t_0) = P$ et $\alpha'(t_0) = v$.

Formulation générale de la courbure Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée régulière. Sa courbure au point $P := \alpha(t)$ est donnée par la formule

$$\kappa(P) := \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

Cercle osculateur. Étant donnée une courbe plane paramétrée $\mathcal{C}$, sa tangente au point régulier P fournit une approximation locale de la courbe en P à l'ordre 1, c'est-à-dire approche $\mathcal{C}$ par la meilleure droite possible : sa tangente. La courbure permet de fournir des approximations à l'ordre 2 ; la courbe est alors localement approchée par des arcs de cercles particuliers appelés cercles osculateurs.

Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe plane paramétrée régulière. En un point $P = \alpha(t)$ de courbure non nulle (donc pas point d'inflexion), on appelle *cercle osculateur*, le cercle de rayon le rayon de courbure $\rho(P)$ et de centre le point

$$\Omega(t) = \alpha(t) + \frac{1}{\kappa(P)}\eta(t)$$

qui est appelé centre de courbure au point $P = \alpha(t)$.

On notera que le cercle osculateur ne dépend pas de l'orientation de la courbe.

Définition. Lorsque t varie, le point $\Omega(t)$ décrit une courbe appelée la *développée* de la courbe initiale.