Courbes et Surfaces

Florent Lafarge
Inria Sophia Antipolis - Mediterranee

Définition. On appelle courbe gauche paramétrée la donnée d'une application

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3 : t \to \alpha(t) := (x(t), y(t), z(t))$$

où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions au moins continues, habituellement suffisamment différentiables (ce que nous supposerons dans toute la suite).

Définition. On appelle courbe gauche paramétrée la donnée d'une application

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^3 : t \to \alpha(t) := (x(t), y(t), z(t))$$

où I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ et $x(t), y(t), z(t)$ sont des fonctions au moins continues, habituellement suffisamment différentiables (ce que nous supposerons dans toute la suite).

Abscisse curviligne. Les notions de régularité, de reparamétrisation, de longueur d'arc et d'abscisse curviligne se définissent exactement comme pour les courbes planes et possèdent les mêmes propriétés. En particulier, toute courbe gauche régulière peut être reparamétrée par son abscisse curviligne (et donc possède une paramétrisation à vitesse constante unitaire).

Courbure. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne. On note $\tau(t) := \alpha'(t)$ le vecteur tangent unitaire à la courbe.

Définition. La courbure de la courbe α au point $\alpha(t)$ est la quantité $\kappa(\alpha(t)) := \|\tau'(t)\| = \|\alpha''(t)\|$. Elle est toujours positive.

Définition. Un point où la courbure s'annule est appelé un point d'inflexion.

Repère de Frenet. Soit toujours $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne. Pour tout point $\alpha(t)$ qui n'est pas un point d'inflexion (i.e. $\kappa(\alpha(t)) \neq 0$) on définit le *vecteur normal unitaire* à la courbe par

$$\eta(t) := \frac{\alpha''(t)}{\|\alpha''(t)\|} = \frac{\alpha''(t)}{\kappa(\alpha(t))}.$$

Afin d'obtenir un *plan* normal à la courbe, on introduit un troisième vecteur unitaire, appelé *vecteur binormal unitaire*

$$b(t) := \tau(t) \wedge \eta(t).$$

Définition. La repère mobile direct $(\tau(t), \eta(t), b(t))$ centré au point $\alpha(t)$ est appelé le repère de Frenet de la courbe α au point $\alpha(t)$.

Torsion. Soit encore $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne. Si $\alpha(t)$ n'est pas un point d'inflexion alors on montre que les vecteurs $b'(t)$ et $\eta(t)$ sont colinéaires et on pose la

Définition. Si $\alpha(t)$ n'est pas un point d'inflexion, la torsion de la courbe α au point $\alpha(t)$, notée $\theta(\alpha(t))$, est définie par l'égalité

$$b'(t) = -\theta(\alpha(t))\eta(t).$$

Théorème. "Une courbe gauche est déterminée par sa courbure et sa torsion à déplacement près."

Formules de Serret-Frenet. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ paramétrée par son abscisse curviligne et $\alpha(t)$ un point qui n'est pas un point d'inflexion. Alors, on a les relations suivantes

$$\begin{pmatrix} \tau'(t) \\ \eta'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \kappa(\alpha(t)) & 0 \\ -\kappa(\alpha(t)) & 0 & \theta(\alpha(t)) \\ 0 & -\theta(\alpha(t)) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau(t) \\ \eta(t) \\ b(t) \end{pmatrix}$$

Formulation générale pour une paramétrisation quelconque. Soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ paramétrée. On pose

$$\tau(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|}, \; b(t) = \frac{\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}, \; \eta(t) = b(t) \wedge \tau(t)$$

et alors

$$\kappa(\alpha(t)) = \frac{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}, \quad \theta(\alpha(t)) = \frac{(\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)).\alpha'''(t)}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2} = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t))}{\|\alpha'(t) \wedge \alpha''(t)\|^2}.$$