

Courbes et Surfaces: Courbes de Bézier

Florent Lafarge

Inria Sophia Antipolis - Mediterranee

Supposons que l'on veuille représenter une courbe sous forme paramétrique par une fonction polynomiale :

$$\mathbf{x} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^d.$$

Si \mathbf{x} est exprimée dans la base canonique

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{a}_i t^i, \quad \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^d, \quad i = 0, \dots, n,$$

- il est très difficile de prévoir l'allure de la courbe $(\mathcal{C}) = \mathbf{x}([a, b])$ en fonction de la position des points $\mathbf{a}_0, \dots, \mathbf{a}_n$.
- De même si l'on bouge l'un des points \mathbf{a}_i , il est pratiquement impossible de prévoir le déplacement de la courbe qui va en résulter.

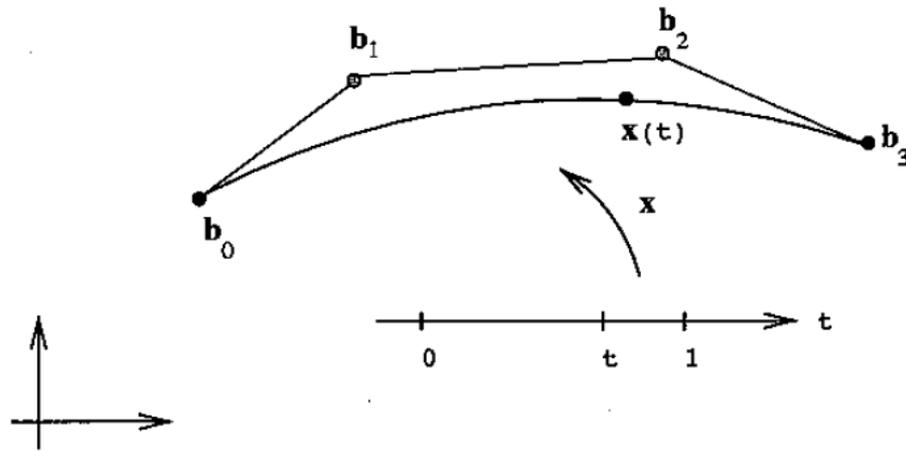
Par contre si on change de base, par exemple si l'on prend la *base de Bernstein* :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i, \quad \text{où } \binom{n}{i} = \frac{n!}{(n-i)!i!};$$

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{b}_i B_i^n(t)$$

s'appelle *courbe de Bézier* et le polygone défini par les points \mathbf{b}_i donne une bonne idée intuitive de la courbe $(\mathcal{C}) = \mathbf{x}([0, 1])$.

Exemple : $n = 3, d = 2$



Les points $\mathbf{b}_i, i = 0, \dots, n$ s'appellent points de Bézier (ou points de contrôle) et forment le polygone de contrôle.

Propriétés

Sans restriction, supposons $t \in [0, 1]$.

(1) **Partition de l'unité** : $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1, \forall t \in [0, 1]$.

Propriétés

Sans restriction, supposons $t \in [0, 1]$.

(1) **Partition de l'unité** : $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1, \forall t \in [0, 1]$.

Preuve : On obtient ce résultat par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} 1 &\equiv [(1-t) + t]^n \equiv (1-t)^n + \binom{n}{1}(1-t)^{n-1}t + \dots + \binom{n}{i}(1-t)^{n-i}t^i + \dots + t^n \\ &\equiv \sum_{i=0}^n B_i^n(t). \end{aligned}$$

Propriétés

Sans restriction, supposons $t \in [0, 1]$.

(1) **Partition de l'unité** : $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1, \forall t \in [0, 1]$.

(2) **Positivité** : $B_i^n(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1], 0 \leq i \leq n$.

Propriétés

Sans restriction, supposons $t \in [0, 1]$.

(1) **Partition de l'unité** : $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1, \forall t \in [0, 1]$.

(2) **Positivité** : $B_i^n(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1], 0 \leq i \leq n$.

(3) **Symétrie** : $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

Propriétés

Sans restriction, supposons $t \in [0, 1]$.

(1) **Partition de l'unité** : $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) \equiv 1, \forall t \in [0, 1]$.

(2) **Positivité** : $B_i^n(t) \geq 0, \forall t \in [0, 1], 0 \leq i \leq n$.

(3) **Symétrie** : $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$

$$\begin{aligned} B_i^n(t) &= \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i = \binom{n}{n-i} (1 - (1-t))^{n-(n-i)} (1-t)^{n-i} \\ &= B_{n-i}^n(1-t). \end{aligned}$$

Propriétés

(4) Formule de récurrence :

$$B_0^0(t) = 1, \quad B_i^n(t) = 0 \text{ si } i \notin \{0, \dots, n\}$$

et

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$B_n^n(t) = tB_{n-1}^{n-1}(t)$$

Propriétés

(4) Formule de récurrence : $B_0^0(t) = 1$, $B_i^n(t) = 0$ si $i \notin \{0, \dots, n\}$

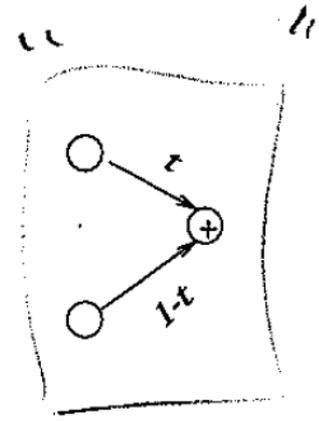
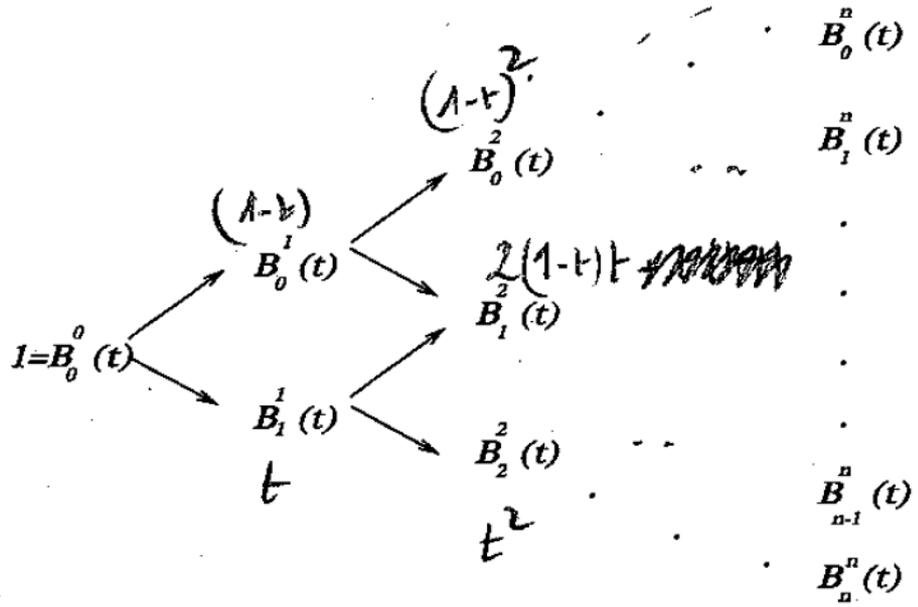
et

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t) \quad i = 1, \dots, n-1$$

$$B_0^n(t) = (1-t)B_0^{n-1}(t)$$

$$B_n^n(t) = tB_{n-1}^{n-1}(t)$$

La formule de récurrence permet de calculer les $B_i^n(t)$ avec le *tableau triangulaire*, dit "d'Aitken/Mansfield" suivant :



Les $B_i^n(t)$ peuvent ainsi être construits par interpolation linéaire répétée.

Propriétés

- (5) le maximum : $\max_{t \in [0,1]} B_i^n(t) = \frac{i}{n}$. (ex 3)
- (6) Valeurs aux extrémités : $B_i^n(0) = \delta_{i,0}$, $B_i^n(1) = \delta_{i,n}$.

Propriétés

(7) **Base polynomiale** : $\{B_i^n, i = 0, \dots, n\}$ constitue une base pour \mathcal{P}_n . *ds pol. de degré $\leq n$.*
 $B_i^n(t)$ est un polynôme de degré n a une racine $i^{\text{ème}}$ en $t = 0$ et une racine $(n - i)^{\text{ème}}$ en $t = 1$, donc

$$\begin{cases} (B_i^n)^{(j)}(0) = 0, \text{ pour } j = 0, \dots, i - 1 \\ (B_i^n)^{(i)} \neq 0. \end{cases}$$

Propriétés

(7) **Base polynomiale** : $\{B_i^n, i = 0, \dots, n\}$ constitue une base pour \mathcal{P}_n .

$B_i^n(t)$ est un polynôme de degré n a une racine $i^{\text{ème}}$ en $t = 0$ et une racine $(n - i)^{\text{ème}}$ en $t = 1$, donc

$$\begin{cases} (B_i^n)^{(j)}(0) = 0, \text{ pour } j = 0, \dots, i - 1 \\ (B_i^n)^{(i)} \neq 0. \end{cases}$$

Supposons $f(t) = \sum_{i=0}^n \alpha_i B_i^n(t) = 0$, on a

$$\begin{aligned} f(0) &= \alpha_0 B_0^n(0) + \alpha_1 B_1^n(0) + \dots + \alpha_n B_n^n(0) \\ &= \alpha_0 \underbrace{B_0^n(0)}_{\neq 0} = 0 \implies \alpha_0 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'(0) &= \alpha_1 (B_1^n)'(0) + \dots + \alpha_n (B_n^n)'(0) \\ \alpha_1 (B_1^n)'(0) + 0 + \dots + 0 &= 0 \implies \alpha_1 = 0 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} f^{(r)}(0) &= \alpha_r (B_r^n)^{(r)}(0) + \dots + \alpha_n (B_n^n)^{(r)}(0) \\ \alpha_r (B_r^n)^{(r)}(0) + 0 + \dots + 0 &= 0 \implies \alpha_r = 0 \end{aligned}$$

Propriétés

(8) Dérivée :

$$(B_i^n)'(t) = \begin{cases} -nB_i^{n-1}(t) & i=0 \\ n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) & i=1, \dots, n-1 \\ nB_{i-1}^{n-1}(t) & i=n \end{cases}$$

$$(B_0^n)'(t) = -n B_0^{n-1}(t)$$

$$(B_n^n)'(t) = n B_{n-1}^{n-1}(t)$$

Propriétés

(8) Dérivée :

$$(B_i^n)'(t) = \begin{cases} -nB_i^{n-1}(t) & i=0 \\ n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) & i=1, \dots, n-1 \\ nB_{i-1}^{n-1}(t) & i=n \end{cases}$$

$$(B_0^n)'(t) = -n B_0^{n-1}(t)$$

$$(B_n^n)'(t) = n B_{n-1}^{n-1}(t)$$

Preuve :

calcul

$$(B_i^n)'(t) = i \binom{n}{i} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - (n-i) \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-1-i}$$

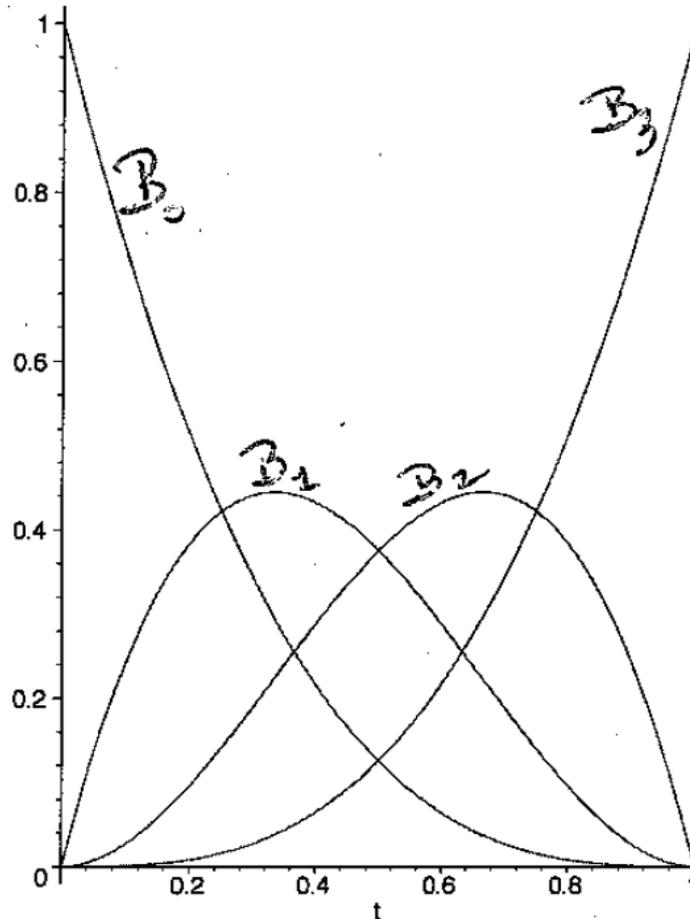
(exo?)

$$= \frac{i \cdot n!}{i!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-i} - \frac{(n-i) \cdot n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-1-i}$$

$$= n \frac{(n-1)!}{(i-1)!(n-i)!} t^{i-1} (1-t)^{n-1-(i-1)} - n \frac{(n-1)!}{i!(n-1-i)!} t^i (1-t)^{n-1-i}$$

$$= n(B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)).$$

Exemple : $n = 3$



$$B_0^3 = (1 - t)^3$$

$$B_1^3 = 3(1 - t)^2 t$$

$$B_2^3 = 3(1 - t) t^2$$

$$B_3^3 = t^3$$

L'algorithme de de Casteljau sert à évaluer $x(t)$ en un paramètre t donné avec les points auxiliaires de la manière suivante :

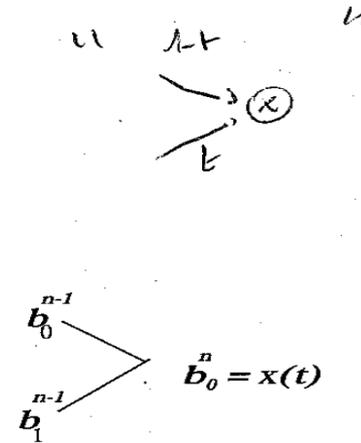
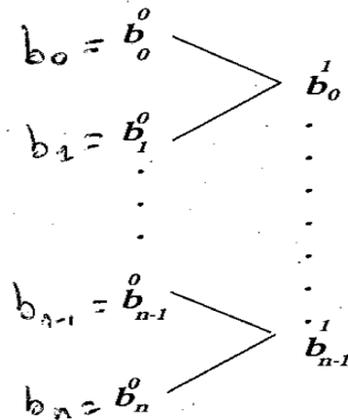
$$\begin{aligned} \mathbf{b}_i^k &= (1-t)\mathbf{b}_i^{k-1} + t\mathbf{b}_{i+1}^{k-1} \\ \mathbf{b}_i^0 &= \mathbf{b}_i, \quad i = 0, \dots, n \end{aligned}$$

$$k = 1, \dots, n, \quad i = 0, \dots, n-k.$$

Il est facile à démontrer que $x(t) = \mathbf{b}_0^n$.

L'algorithme de de Casteljau est un algorithme triangulaire à n niveau

Schéma :



Démonstration :

$$x(t) = \mathbf{b}_0 B_0^n(t) + \mathbf{b}_1 B_1^n(t) + \dots + \mathbf{b}_n B_n^n(t), \quad t \in [0, 1]$$

(Aitken/Mansfield ont exprimé B_i^n en fonction des B_j^{n-1})

$$= \mathbf{b}_0(1-t)B_0^{n-1}(t) + \mathbf{b}_1((1-t)B_1^{n-1}(t) + tB_0^{n-1}(t)) + \dots + \mathbf{b}_n t B_{n-1}^{n-1}(t)$$

(trier par rapport à B_i^{n-1})

$$= \underbrace{[(1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1]}_{=:\mathbf{b}_0^1} B_0^{n-1}(t) + \dots + \underbrace{[(1-t)\mathbf{b}_{n-1} + t\mathbf{b}_n]}_{=:\mathbf{b}_{n-1}^1} B_{n-1}^{n-1}(t)$$

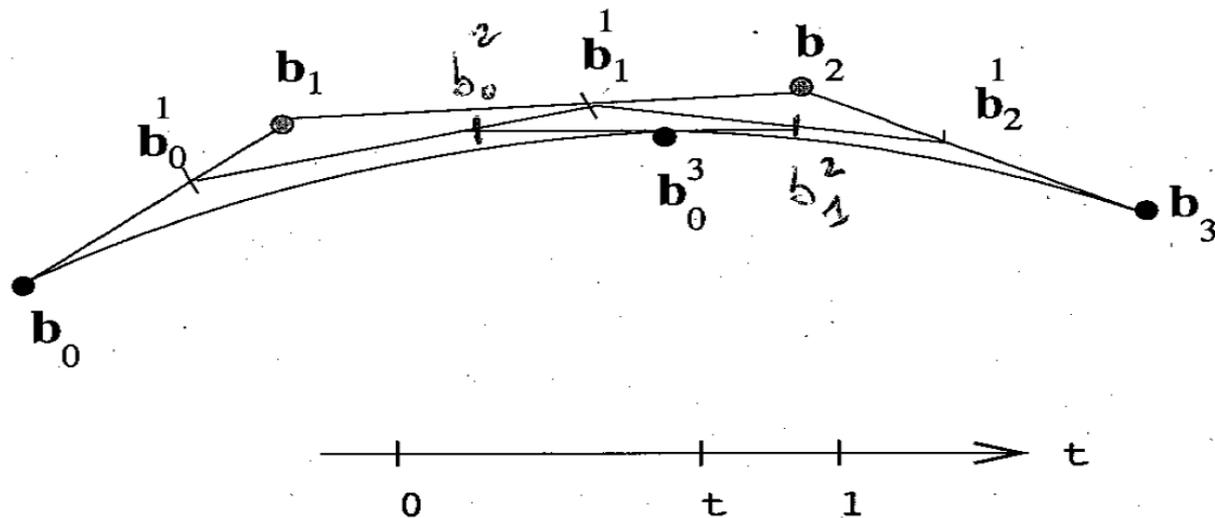
⋮

(répéter ce passage jusqu'à)

$$= \underbrace{[(1-t)\mathbf{b}_0^{n-1} + t\mathbf{b}_1^{n-1}]}_{=:\mathbf{b}_0^n} \underbrace{B_0^0(t)}_{\equiv 1}$$

$$= \mathbf{b}_0^n$$

Graphiquement :



3) Propriétés géométriques.

$$\mathcal{C}: \lambda(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \quad t \in [0,1]$$

- a) Enveloppe convexe: la courbe \mathcal{C} se trouve à l'intérieur de l'enveloppe convexe des b_i (Intersection de tous les ensembles convexes contenant $\{b_i\}$).

Preuve: Conséquence de la positivité de $B_i^n(t)$ et de la partition de l'unité.

→ Par l'algorithme de De Casteljau, on voit que des points de contrôle plan génèrent une courbe plane, et ainsi de suite.

→ Test de collision entre deux courbes "bounding boxes".

b) Interpolation des extrémités $x(0) = b_0$ $x(1) = b_n$.

c) Symétrie $x(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n b_{n-i} B_i^n(1-t)$

$$\sum b_i B_{n-i}^n(t)$$

"
 $n(1-t)$

"

$$y(t) = \sum_{i=0}^n b_{n-i} B_i^n(t)$$

~~mem courbes~~
 $n(1-t) = y(t)$ et $x(t)$ sont les n courbes, on change juste le sens de parcours.

Exo: Faites un dessin avec De Casteljau.

(Plus généralement, l'algo. de De Casteljau est valable indépendamment de toute reparamétrisation...)

4) Dérivation d'une courbe de Bézier.

Rappel:

$$(B_0^n)'(t) = -n B_0^{n-1}(t)$$
$$(B_n^n)'(t) = n B_n^{n-1}(t)$$
$$(B_i^n)'(t) = n (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t))$$

4) Dérivation d'une courbe de Bézier. $\frac{d}{dt} B_i(t) = n(b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t)$

$$x(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \quad \text{courbe de Bézier} \quad t \in [0, 1].$$

$$\frac{dx(t)}{dt} = -b_0 n B_0^{n-1}(t) + \left[n \sum_{i=1}^{n-1} b_i (B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)) \right] + n b_n B_{n-1}^{n-1}(t)$$

$$= n \sum_{i=0}^{n-1} (b_{i+1} - b_i) B_i^{n-1}(t) \quad \text{On pose} \quad \Delta b_i = b_{i+1} - b_i$$

$$\left| x'(t) = n \sum_{i=0}^{n-1} \Delta b_i B_i^{n-1}(t) \right|$$

"Hodographe"

⚠ les b_i sont des points, les Δb_i sont des vecteurs!

Calcul de $x'(t)$ par de Casteljau:

$$x'(t) = n \Delta \left(\underbrace{\sum_{i=0}^{n-1} b_i B_i^{n-1}(t)}_{L^{n-1}} \right)$$

Ab) Application aux racords (exo 4 TD 9).

(4)

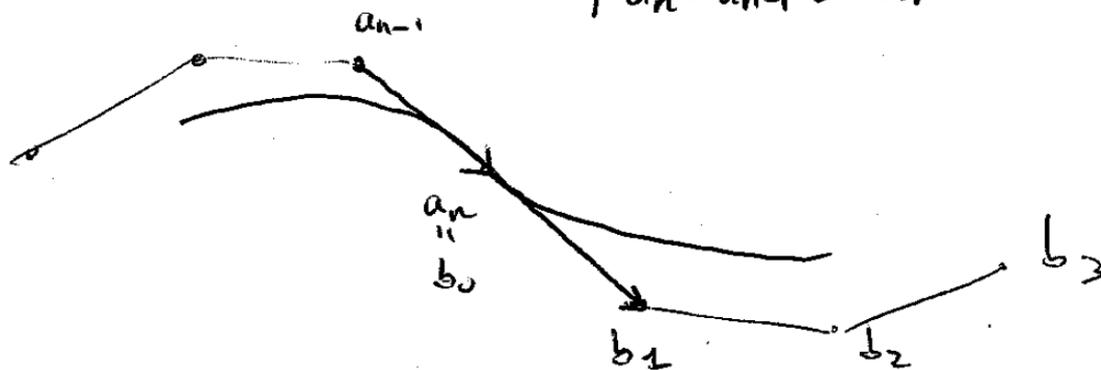
$$x_1(t) = \sum_{i=0}^n a_i B_i^n(t) \quad x_2(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \quad t \in]0, 1[.$$

On souhaite racorder ces courbes aux extrémités $x_1(1)$ et $x_2(0)$.

racord C^0 : $x_1(1) = a_n = x_2(0) = b_0$: $a_n = b_0$

racord C^1 : $x_1'(1) = n(a_n - a_{n-1}) = x_2'(0) = n(b_1 - b_0)$

on doit donc avoir $\left| \begin{array}{l} a_n = b_0 \\ a_n - a_{n-1} = b_1 - b_0 \end{array} \right.$

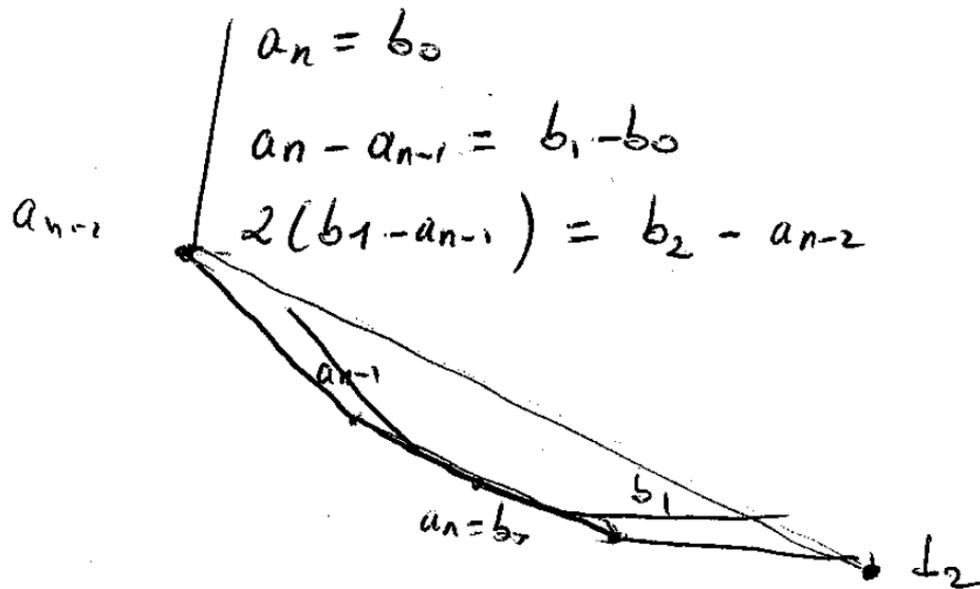


racord e^2 :

$$\begin{aligned} \kappa_1''(1) &= (n-1) \left[n(a_n - a_{n-1}) - n(a_{n-1} - a_{n-2}) \right] \\ &= n(n-1) (a_n - 2a_{n-1} + a_{n-2}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_2''(0) &= (n-1) \left[n(b_2 - b_1) - n(b_1 - b_0) \right] \\ &= n(n-1) [b_2 - 2b_1 + b_0]. \end{aligned}$$

on a donc :



Edo:
courbe
fermée
de
degré
4

5) Invariance par transformation affine (\mathbb{R}^3).

- Une transformation affine est une application qui laisse les combinaisons barycentriques invariantes.

Combinaisons barycentriques: $b = \sum \alpha_i \cdot b_i$ $b_i \in \mathbb{R}^3$ $\sum \alpha_i = 1$, $\alpha_i \geq 0$.

Une transformation affine T est donnée par

$$T \cdot x = Ax + V \quad \left\{ \begin{array}{l} x \in \mathbb{R}^3 \\ A \text{ matrice } 3 \times 3 \\ V \text{ vecteur de } \mathbb{R}^3. \end{array} \right.$$

← le vérifier: $T(\sum \alpha_i b_i) = \sum \alpha_i T(b_i)$.

Exemples: Identité: $A = Id$, $V = 0$

translation: $A = Id$

homothétie: $V = 0$, A diagonale

rotation: $V = 0$ et $A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Th: des courbes de Bézier sont "invariantes" par transformations affines; i.e. si T est un transform affine, alors

$$\cancel{T(x(t)) = x}$$

$$\left[T \left(\sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \right) = \sum_{i=0}^n T(b_i) B_i^n(t) \right]$$

7) Algorithme de subdivision.

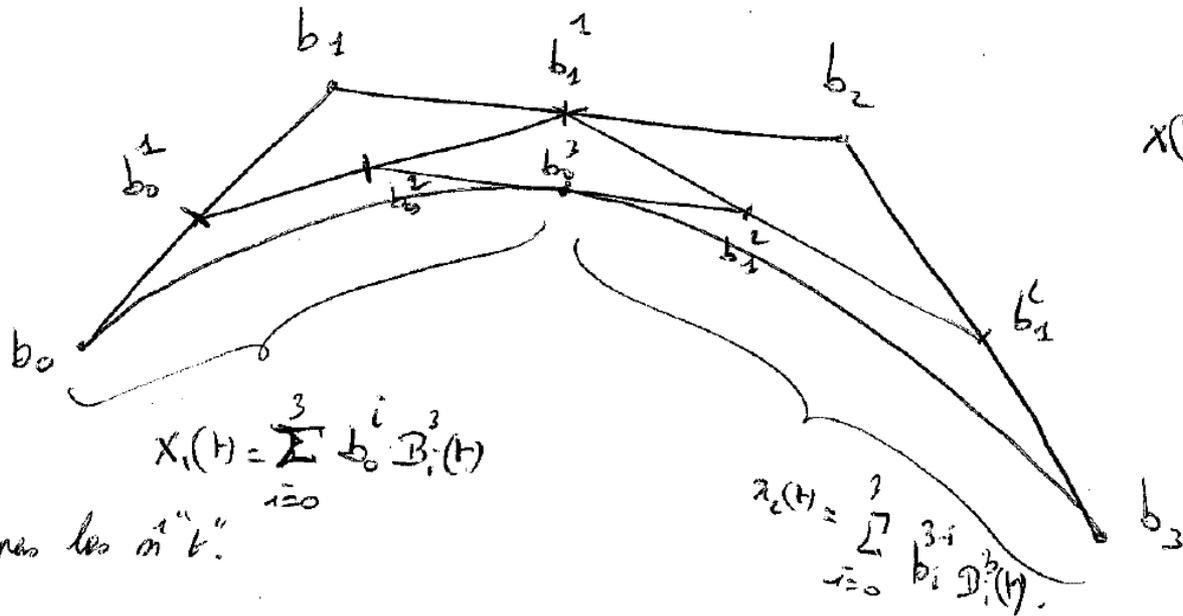
(5)

- Pour modifier, on est amené à bouger les points de contrôle

- Bouger un pt de contrôle \Rightarrow modification de toute la courbe.

\Rightarrow intérêt de subdiviser une courbe afin d'isoler les modifications.

Tolie par $n=3$: $t = \frac{1}{2}$ sur b_0^3



$$X(t) = \sum_{i=0}^3 b_i B_i^3(t)$$

$$X_1(t) = \sum_{i=0}^3 b_0^i B_i^3(t)$$

Δ pas les n "t".

$$X_2(t) = \sum_{i=0}^3 b_i^1 B_i^3(t)$$

6) Élévation du degré

Pour une question de souplesse, on peut avoir besoin d'ajouter des points de contrôle, sans changer la courbe.

$$\text{Soit } x(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t)$$

$$\text{Alors } x(t) = \sum_{i=0}^{n+1} c_i B_i^{n+1}(t)$$

$$\text{où } \begin{cases} c_0 = b_0, & c_{n+1} = b_n \\ c_i = \frac{i b_{i-1} + (n-i+1) b_i}{n+1} & i = 1, \dots, n. \end{cases}$$

Preuve: $B_i^n(t) = (1-t) \overset{\uparrow \text{total}}{B_i^n(t)} + t \overset{\uparrow \text{car}}{B_i^n(t)} = \binom{n+1-i}{n+1} B_i^{n+1}(t) + \binom{i+1}{n+1} B_{i+1}^{n+1}(t)$

$$\begin{aligned}
 B_i^n(t) &= (1-t) B_i^n(t) + t B_i^n(t) \\
 &= \underbrace{C_n^i (1-t)^{n+1-i}}_{C_{n+1}^i} t + \underbrace{C_n^{i-1} (1-t)^{n-i}}_{C_{n+1}^{i+1}} t^2 \\
 &= \frac{C_n^i}{C_{n+1}^i} B_i^{n+1}(t) + \frac{C_n^{i-1}}{C_{n+1}^{i+1}} B_{i+1}^{n+1}(t)
 \end{aligned}$$

~~$B_i^n(t) = B_{i+1}^n(t) + (1-t) B_i^n(t)$~~

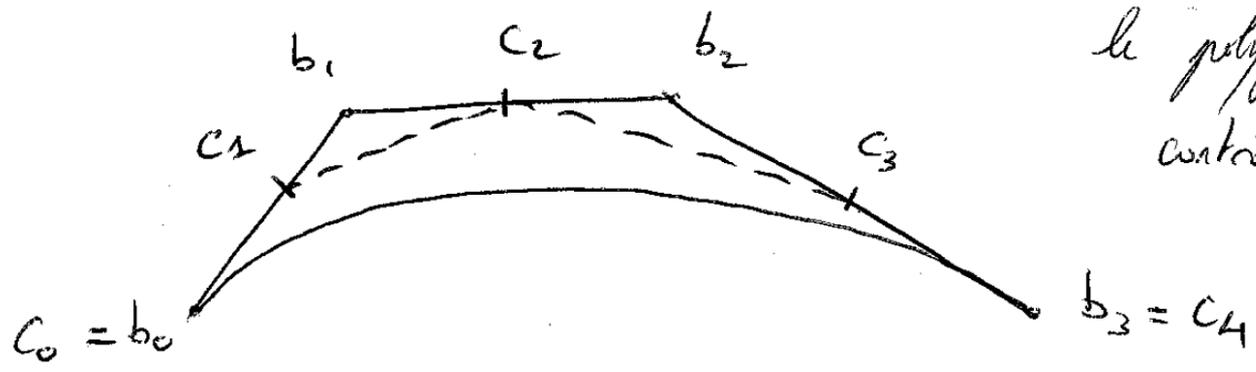
~~$B_{i+1}^n(t) = t B_i^n(t) + (1-t) B_{i+1}^n(t)$~~

$B_{i+1}^n(t) = t B_i^n(t) + (1-t) B_{i+1}^n(t)$

et $\binom{n+1}{i} / \binom{n}{i} = \frac{(n+1)!}{(n+1-i)! i!} \cdot \frac{(n-i)! (i)!}{n!} = \frac{(n+1-i)}{i}$

L.

Exemple Bézier cubique:



"on rapproche le polygone de contrôle".

• Courbes de Bézier rationnelles.

paramétriques.

(7)

Une courbe est dite rationnelle si ses coordonnées sont des fractions rationnelles.

Courbes de Bézier = courbes polynomiales.

Cercle

* Projection centrale:

$$\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{x_0 = 0\} \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\left(\frac{x_1}{x_0}, \dots, \frac{x_n}{x_0} \right)$$

Toute courbe rationnelle de \mathbb{R}^d est obtenue par projection centrale d'une courbe polynomiale.
(mise au même dénominateur).

* On considère une courbe de Bézier

$$\hat{X}(t) = \sum_{i=0}^m R_i B_i^m(t) \in \mathbb{R}^{d+1}$$

$$R_i = \begin{pmatrix} w_i \\ w_i P_i \end{pmatrix}$$

$w_i \in \mathbb{R} \quad P_i \in \mathbb{R}^d$

$$t \mapsto X(t) = \frac{\sum_{i=0}^m w_i P_i B_i^m(t)}{\sum_{i=0}^m w_i B_i^m(t)} \in \mathbb{R}^d$$

Courbe de Bézier rationnelle

Rq: on pourrait prendre $w_i = 1$, mais on garde ces "poids" pour plus de degrés de liberté.