Champs de Markov en Vision par Ordinateur

0 : Quelques Points avant Commencer : Contacts.

- Florent.Lafarge@inria.fr.
- www-sop.inria.fr/ariana/personnel/Florent.Lafarge
- Vous trouverez là l'original de ce document.

0 : Quelques Points avant Commencer : Vous.

- N'ayez pas peur :
  - *De questionner - la façon meilleure d'apprendre.*
  - *De demander que je répète ou explique quelque chose.*
  - *De me dire si le niveau est trop simple ou trop compliqué.*
- Envoyez-moi un email si vous avez des questions après le cours.

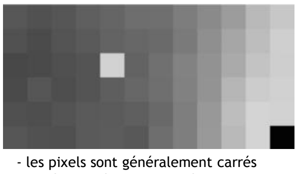
Buts.

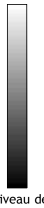
- Définitions : qu'est-ce que sont les champs de Markov ?
- Exemples : comment sont-ils utilisés pour la compréhension d'images ?
- Algorithmes : comment peut-on extraire l'information désirée des modèles ?

Quelques elements simples d'une image

Notion de pixel

Définition : Un pixel est l'unité indivisible permettant de coder l'information relative à la luminosité en une certaine position



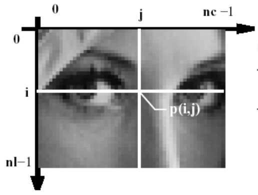


- les pixels sont généralement carrés
- pixel vient de « picture element »
- La taille du pixel

En niveau de gris

image numérique

Une image est un tableau de pixels : si le nombre de lignes vaut nl et le nombre de colonnes nc :



Un pixel est donc composé :
- de coordonnées (i, j) permettant de le situer,
- d'une valeur $v = p(i, j)$ représentant sa couleur .

image numérique

On peut voir l'image comme une fonction u et donc une surface.

$$\begin{array}{rccc} u: & I \times J & \to & V \\ & (i,j) & \to & p(i,j) \end{array}$$

"A un point on associe une valeur d'intensité"

En discret

$I = \{0, \ldots, nl-1\}$ et, par exemple :
$J = \{0, \ldots, nc-1\}$ $V = \{0, \ldots, 255\}$

En continu

$I = [0, l]$ et :
$J = [0, L]$ $V = [0, 1]$

L'avantage d'une telle représentation continue vient de la possibilité de dériver...

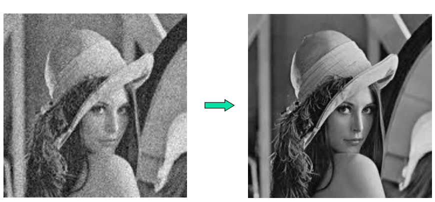
Formulation classique d'un problème en image

Entrée : une (ou plusieurs) image(s) où à chaque site est associé une intensité

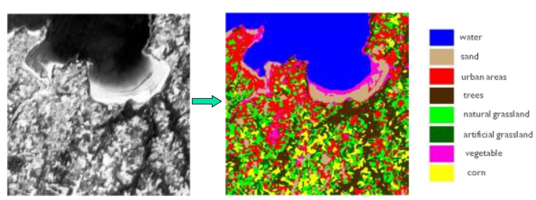
Sortie : un ensemble d'étiquettes

Images : Deconvolution.

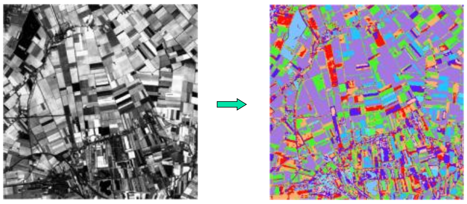
Images : Débruitage.



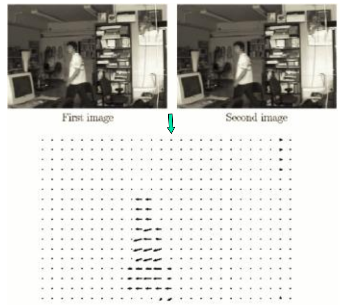
Images : Segmentation.



Images : Segmentation.

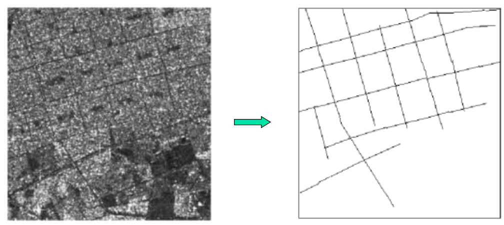


Images : estimation de mouvement.

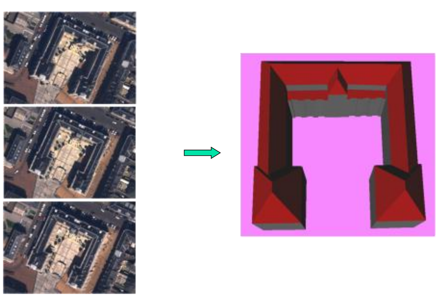


Images : extraction de réseaux.

Images : extraction de réseaux.



Images : extraction de réseaux.



Part I : Définitions

problème inverse en image

soient: y, l'observation
x, l'etiquette

on veut retrouver x à partir des informations contenues dans y

la modélisation bayésienne

soient: y, l'observation
x, l'etiquette

On cherche donc x sachant y :

$$\Pr(X = x \;/\; Y = y) = \frac{\Pr(Y = y \;/\; X = x)\;.\;\Pr(X = x)}{\Pr(Y = y)}$$ Loi de Bayes

$$\boxed{\underbrace{\Pr(X = x \;/\; Y = y)}_{\text{probabilité a posteriori de } x} \propto \underbrace{\Pr(Y = y \;/\; X = x)}_{\text{formation des observations}} \;.\; \underbrace{\Pr(X = x)}_{\text{a priori}}}$$

la modélisation bayésienne

- La probabilité de l'image sachant la scène (la formation de l'image). Souvent un modèle physique. Appelée la vraisemblance.
- La probabilité de la scène avant d'avoir vu l'image. Appelée la probabilité a priori.
- On doit construire des modèles pour tous les deux.

la modélisation bayésienne

on cherche la configuration d'objets x qui maximise la probabilité P(X=x /Y=y)

➡ **estimateur MAP :** $\hat{x} = \arg\max_{x \in \Omega} \Pr(X = x \;/\; Y = y)$

Probabilités sur ces espaces.

- L'espace d'images est énorme juste pour une image de 256*256 pixels
- Les probabilités sont fonction de 65536 variables dépendantes : les valeurs des pixels. Donc, il faut simplifier.

Simplification de la probabilité.

- Les probabilités se simplifient quand quelques variables sont indépendantes les unes des autres.
- Les champs de Markov sont une possibilité (mais pas la seule) pour définir des probabilités simplifiées mais encore utiles.

Exemple : Indépendance.

- Si la scène est décrite par une fonction sur D, la probabilité peut se factoriser sur les pixels s de l'ensemble des sites de l'image S :

$$\Pr(X|Y) = \prod_{p \in D} \Pr(X_p|Y_p)$$

- Dans ce cas, on peut traiter chaque pixel séparément (problème à une dimension).

Champs de Markov (MRFs).

$V = \{V(s) / s \in S\}$ est un système de voisinage si

- $s \notin V(s)$
- $s \in V(t) \iff t \in V(s)$

*De plus, on appelle **clique**, un sous-ensemble c de S dont les sites sont voisins deux à deux. On note C, l'ensemble de toutes les cliques asociées à (S, V).*

Champs de Markov (MRFs).

Soit $X = (X_s)_{s \in S}$ un champ aléatoire associé à l'espace probabilisé complet $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.
*X est un **champ de Markov** relativement au système de voisinage V si*

$$\forall x \in \Omega, \forall s \in S, P(X_s = x_s | X_r = x_r, r \in S - \{s\}) = P(X_s = x_s | X_r = x_r, r \in V(s))$$

Théorème de Hammersley-Clifford.

Le théorème suivant permet de caractériser la distribution d'un tel champ : c'est le théorème d'Hammersley-Clifford.

Théorème 2 (Hammersley-Clifford)
Soit X un champ de Markov associé à l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, et tel que $\forall x \in \Omega, P(X = x) > 0$.
Alors, la distribution $P(X)$ de ce champ est une distribution de Gibbs :

$$P(X) = \frac{\exp -U(X)}{Z}$$

où $U(X) = \sum_{c \in C} V_c(X_s, s \in c)$ et $Z = \sum_{X \in \Omega} \exp -U(X)$

Distribution de Gibbs B.

- U est appelé l'énergie. Z est appelé le fonction de partition.
- Pour une distribution de Gibbs, l'estimée MAP prend une forme simple:

x*= arg min U(x)

- Cette forme on appèle minimisation d'énergie.

Quel model pour l'a priori ?

- Étiquette binaire: Ising
- Étiquette non-binaire: Potts $U_p(x_s, x_{s'}) = \begin{cases} 0 & si\ x_s = x_{s'} \\ \beta & \sin on \end{cases}$
- ou créer le modèle a priori que l'on veut !

exemple 1

Intensité = *{rouge clair, rouge foncé, bleu clair, bleu foncé}* (y)

Etiquette = *{blanc, noir}* (x)

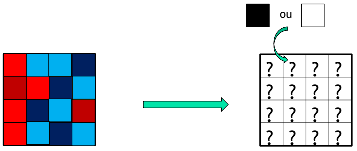


image d'entrée Image de sortie

Intensité = *{rouge clair, rouge foncé, bleu clair, bleu foncé}* (y)
Etiquette = *{blanc, noir}* (x)

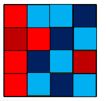
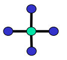


image d'entrée

exemple 1

Modèle énergétique : $U(x) = U_{data}(x) + U_{prior}(x)$

$$= \sum_{s \in S} U_d(x_s) + \sum_{s \in S} \sum_{s' \in V(s)} U_p(x_s, x_{s'})$$

- $U_d(x_s) = \begin{cases} 0 & si\,(x_s = 'blanc' \cap y_s = 'rouge') \cup (x_s = 'noir' \cap y_s = 'bleu') \\ 1 & \sin on \end{cases}$
- $U_p(x_s, x_{s'}) = \begin{cases} 0 & si\ x_s = x_{s'} \\ \beta & \sin on \end{cases}$
- Voisinage : 4-connexité 

Intensité = *{rouge clair, rouge foncé, bleu clair, bleu foncé}* (y)
Etiquette = *{blanc, noir}* (x)

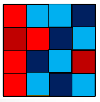


image d'entrée

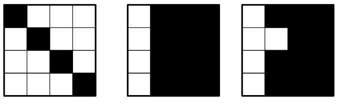
exemple 1

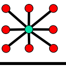
Questions:

1-quelle est la configuration x qui minimise la vraisemblance $U_{data}(x)$?

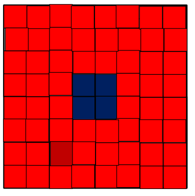
2-quelle est la configuration x qui minimise l'a priori $U_{prior}(x)$?

3-quelle est l'énergie des trois configurations suivantes ?
Quelle est la meilleure configuration ?



4-meme questions mais avec un voisinage en 8-connexité 

exemple 2



Question:
Pour quelles valeurs de β, la solution optimale est-elle la suivante en 4-connexité ?