Processus de Diffusion et Application en Finance

Fabien Campillo

INRIA

1994

DEA de Mathématiques Appliquées
Université de Provence

Table des matières

Notations

- $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ tribu borélienne sur $\mathbb{R}^d$.
- L'espace $L^p(\Omega)$ est l'espace de variables aléatoires X telles que $E|X|^p < \infty$. Cet espace est muni de la norme $\|X\|_p = (E|X|^p)^{1/p}$.
- "$\perp\!\!\!\perp$" : indépendance. $X \perp\!\!\!\perp Y$, X et Y sont des variables indépendantes. $\mathcal{G} \perp\!\!\!\perp \mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des tribus indépendantes.
- Une subdivision Δ de l'intervalle $[0, T]$ ($T < \infty$) est une suite finie $\Delta = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$. On note $|\Delta| = \max_{1 \leq k \leq n}(t_k - t_{k-1})$.
- Ensembles des diadiques de $[0, 1]$: $\mathcal{D} = \cup_{n \geq 1} \mathcal{D}_n$, $\mathcal{D}_n = \{\frac{k}{2^n}\,;\, k = 0, \ldots, 2^n\}$. $\mathcal{D}_n$ est une suite croisante qui tend vers $\mathcal{D}$ qui est un ensemble de rationnels dense dans l'intervalle $[0, 1]$.
- Fonction indicatrice : $\mathbf{1}_A(x) = 1$ si $x \in A$, 0 sinon.
- $s \vee t = \max(s, t)$, $s \wedge t = \min(s, t)$.
- Convention : $\inf\{\emptyset\} = +\infty$.
- Soit x, $y \in \mathbb{R}^n$, x^* désigne le vecteur transposé de x, et $\langle x, y\rangle >= x^* y$ le produit scalaire. Soit $M \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $M^* \in \mathbb{R}^{d \times n}$ désigne la matrice transposée de m.

Chapitre 1

Processus stochastique et mouvement brownien

1.1 Processus stochastiques

Définition 1.1.1 *On appelle* processus stochastique *à valeurs dans un espace E muni d'une tribu $\mathcal{E}$, une famille $X = \{X_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$.*

Remarque 1.1.2 (i) *Dans ce cours l'indice t désignera le temps. $\mathcal{T}$ sera donc un sous–ensemble de $\mathbb{R}^+$. On se placera dans le cadre des processus en* temps continu, *i.e. $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+$ ou, éventuellement, $\mathcal{T} = [0, T]$ ($T < \infty$). Dans quelques cas on se placera dans le cas* discret, *i.e. $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ ou $\mathcal{T} = \{1, 2, \ldots, n\}$ ($n < \infty$). Donc sauf mention contraire, $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+$.*

(ii) *Nous ne considérerons que des processus* réels *c'est à dire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.*

(iii) *Pour tout $\omega \in \Omega$ fixé, la fonction $\mathbb{R}^+ \ni t \to X_t(\omega) \in \mathbb{R}^d$ est appelée* trajectoire *du processus X.*

Définition 1.1.3 *La famille des* lois marginales[1] *d'un processus X est définie par $\mu^X = \{\mu^X_{t_1,\ldots,t_n}\, ;\, n \in \mathbb{N},\ (t_1, \ldots, t_n) \in [\mathbb{R}^+]^n\}$ avec*

$$\mu^X_{t_1,\ldots,t_n}(A_1, \ldots, A_n) \stackrel{\triangle}{=} P(X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n)\ , \quad (A_1, \ldots, A_n) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd})\ .$$

$\mu^X_{t_1,\ldots,t_n}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}^{nd}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{nd}))$.

Il est facile de démontrer que μ^X est une famille de mesures de probabilité *cohérente* au sens de la définition suivante

1. Également appelées lois "fini–dimensionnelles".

Définition 1.1.4 *Une famille de lois de probabilités* $\mu = \{\mu_{t_1,\dots,t_n}\,;\, n \in \mathbb{N},\ (t_1,\dots,t_n) \in [\mathbb{R}^+]^n\}$ *est dite* cohérente *si pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $t_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ $(1 \leq i \leq n)$ *les conditions suivantes sont satisfaites*

Condition de symétrie : *Pour toute toute permutation* π *de* $\{1,\dots,n\}$

$$\mu_{t_{\pi(1)},\dots,t_{\pi(n)}}(A_1,\dots,A_n) = \mu_{t_1,\dots,t_n}(A_{\pi^{-1}(1)},\dots,A_{\pi^{-1}(n)}) \ .$$

Condition de compatibilité : *pour tout* $k \leq n$

$$\mu_{t_1,\dots,t_k}(A_1,\dots,A_k) = \mu_{t_1,\dots,t_k,t_{k+1},\dots,t_n}(A_1,\dots,A_k,\mathbb{R}^d,\dots,\mathbb{R}^d) \ .$$

Réciproquement, étant donnée une famille de lois de probabilité cohérente μ, existe–t–il un processus X tel que $\mu = \mu^X$? La réponse est donnée par le théorème suivant (dont nous admettrons la preuve, voir Shiryayev [21] p.161–165) :

Théorème 1.1.5 (Théorème d'extension de Kolmogorov) *Soit* $\mu = \{\mu_{t_1,\dots,t_n}\,;\, n \in \mathbb{N}, (t_1,\dots,t_n) \in [\mathbb{R}^+]^n\}$ *une famille cohérente de lois de probabilité. On définit* $\Omega = (\mathbb{R}^d)^{\mathbb{R}^+}$ *et* $\mathcal{F}$ *la plus petite tribu qui rende mesurable l'application* $\omega \to \omega(t)$ *pour tout* $t \in \mathbb{R}^+$ *(* [2] *). Il existe alors une unique mesure de probabilité* P *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *telle que*

$$\mu_{t_1,\dots,t_n}(A_1,\dots,A_n) = P(\omega \in \Omega\,;\, \omega(t_1) \in A_1,\dots,\omega(t_n) \in A_n) \ .$$

En effet, en définissant le processus $X_t(\omega) = \omega(t)$ sur l'espace $(\Omega, \mathcal{F})$, on a $\mu = \mu^X$.

En pratique, ce sont les lois marginales que l'on peut connaître par l'expérience. Le Théorème de Kolmogorov permet donc de construire mathématiquement un processus correspondant à ces lois marginales.

Définition 1.1.6 *Soient* X *et* Y *deux processus définis sur un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. On dit que* X *est une* modification *de* Y *si*

$$P(X_t = Y_t) = 1 \ , \quad \forall t \geq 0 \ .$$

On dit également que Y *est une* version *de* X*.*

Si X et Y sont des modifications l'un de l'autre, alors $\mu^X = \mu^Y$.

Définition 1.1.7 *Soient* X *et* Y *deux processus définis sur un espace* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*.* X *et* Y *sont dits* indistingables *si*

$$P(X_t = Y_t\,,\ \forall t \geq 0) = 1 \ .$$

2. Soit E un espace muni d'une tribu $\mathcal{E}$ et $\mathcal{S}$ un ensemble quelconque : $E^{\mathcal{S}}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathcal{S}$ à valeurs dans E. Pour tout $t \in \mathcal{S}$, on définit X_t l'application coordonnée d'indice t par $X_t : E^{\mathcal{S}} \ni \varphi \mapsto \varphi(t) \in E$. $E^{\mathcal{S}}$ peut être muni de la tribu $\mathcal{E}^{\otimes \mathcal{S}}$ définie indifféremment comme étant

- la tribu sur $E^{\mathcal{S}}$ engendrée par les pavés mesurables, i.e. les ensembles de la forme

$$X_{t_1}^{-1}(B_1) \cap X_{t_2}^{-1}(B_2) \cap \cdots X_{t_n}^{-1}(B_n)$$

  pour $B_1,\dots,B_n \in \mathcal{E}$,
- la plus petite tribu sur $E^{\mathcal{S}}$ qui rende mesurables les applications coordonnées.

Exemple 1.1.8 *On considère $\mathcal{T} = \Omega = [0,1]$, $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, P la mesure de Lebesgue. On définit*

$$\begin{aligned} X_t(\omega) &= t \ , \quad \forall (t,\omega) \in \mathcal{T} \times \Omega \ , \\ \bar{X}_t(\omega) &= t \text{ si } \omega \neq t \text{ et } 0 \text{ sinon} \ , \quad \forall (t,\omega) \in \mathcal{T} \times \Omega \ , \end{aligned}$$

Alors X et $\bar{X}$ sont une modification l'un de l'autre, pourtant toutes les trajectoires de X sont continues et toutes celles de $\bar{X}$ sont discontinues (sauf pour $\omega = 0$). Ces processus ne sont donc pas indistingables.

Définition 1.1.9 *Un processus X est dit* continu *si*

$$P(\mathbb{R}^+ \ni t \to X_t \text{ est continu}) = 1 \ .$$

Remarque 1.1.10 *Dorénavant, dans une classe de processus équivalents (modulo la relation "être une modification l'un de l'autre"), on ne tiendra compte que du représentant continu, s'il en existe un. Dans ce dernier cas il ne peut être qu'unique à la relation d'indistingabilité près.*

De même, tout résultat d'unicité concernant un processus stochastique sera donné à la relation d'indistingabilité près.

Exercice 1.1.11 *(i) Montrer qu'un processus indistinguable d'un processus continu est lui–même continu.*

(ii) Montrer que deux processus continus qui sont une modification l'un de l'autre sont indistingables (en fait, la continuité à droite suffit).

(iii) Soit X un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ continu, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Alors, après modification éventuelle sur un ensemble de mesure nulle

$$X \ : \ \Omega \ni \omega \mapsto \{X_t(\omega) \, ; \, 0 \leq t \leq T\}$$

définit une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ munit de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$. [Utiliser le fait que $\mathcal{B}$ est la plus petite tribu sur $\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ qui rende mesurable les applications

$$\begin{aligned} \mu_t \ : \ \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^d) &\mapsto \mathbb{R}^d \\ x &\mapsto x(t) \end{aligned}$$

(pour tout $0 \leq t \leq T$)].

Ce dernier exercice (partie (iii)) montre que si X est un processus continu, on peut définir une loi P^X sur $(\mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^d), \mathcal{B})$, image de P par X. P^X sera appelée loi de probabilité de X.

Théorème 1.1.12 (Critère de Kolmogorov) *Soit X un processus stochastique. On suppose qu'il existe des constantes α, β, C strictement positives telles que*

$$E(|X_t - X_s|^\alpha) \leq C \, |t-s|^{1+\beta} \ , \quad \forall t, \, s \geq 0 \ ,$$

alors X admet une modification continue.

Preuve On se limite au cas de l'intervalle $\mathcal{T} = [0,1]$.

Étape 1 : X est continu en probabilité. D'après l'inégalité de Bienaymé–Tchebycheff, pour tout $\varepsilon > 0$

$$P(|X_t - X_s| > \varepsilon) \le \frac{E|X_t - X_s|^\alpha}{\varepsilon^\alpha} \le C\,\varepsilon^{-\alpha}\,|t-s|^{1+\beta} \tag{1.1}$$

donc $X_t \to X_s$ en probabilité quand $t \to s$.

Étape 2 : X est p.s. uniformément continu sur les diadiques. Dans (1.1), posons $t = \frac{k}{2^n}$, $s = \frac{k-1}{2^n}$ et $\varepsilon = 2^{-\gamma n}$ (avec $0 < \gamma < \beta/\alpha$), on obtient

$$P\left(|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \ge 2^{-\gamma n}\right) \le C\,2^{-n(1+\beta-\alpha\,\gamma)}$$

et donc

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{1\le k\le 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \ge 2^{-\gamma n}\right) &\le P\left(\cup_{k=1}^{2^n}\left\{|X_{\frac{k}{2^n}} - X_{\frac{k-1}{2^n}}| \ge 2^{-\gamma n}\right\}\right) \\ &\le C\,2^{-n(\beta-\alpha\,\gamma)} \;. \end{aligned}$$

Cette dernière expression est le terme général d'une série convergente ; d'après le lemme de Borel–Cantelli, il existe $F \in \mathcal{F}$, avec $P(F) = 1$ tel $\forall \omega \in F$, $\exists N(\omega) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$\sup_{1\le k\le 2^n} |X_{\frac{k}{2^n}}(\omega) - X_{\frac{k-1}{2^n}}(\omega)| < 2^{-\gamma n} \;, \quad \forall n \ge N(\omega) \;. \tag{1.2}$$

On définit $\mathcal{D}$ l'ensemble des *diadiques* : $\mathcal{D}_n \triangleq \{\frac{k}{2^n}\,;\, k = 0,\ldots,2^n\}$ et $\mathcal{D} \triangleq \cup_{n\ge 1}\mathcal{D}_n$. Il s'agit d'un ensemble de rationnels, dense dans l'intervalle $[0,1]$.

On se donne $\omega \in F$, $n \ge N(\omega)$. On veut montrer que pour tout $m > n$

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \le 2\sum_{i=n+1}^{m} 2^{-\gamma i} \;, \quad \forall t,\, s \in \mathcal{D}_m \,,\; 0 < t - s < 2^{-n} \;. \tag{1.3}$$

On procède par récurrence :

(*i*) Pour $m = n+1$, il suffit de prendre $t = \frac{k}{2^m}$, $s = \frac{k-1}{2^m}$, (1.3) se déduit de (1.1).

(*ii*) Supposons que (1.3) est vraie pour $m = n+1,\ldots,M-1$. Prenons $s < t$; $s,\, t \in \mathcal{D}_M$. On pose $\tilde{t} \triangleq \inf\{u \in \mathcal{D}_{M-1}\,;\, u \ge t\}$ et $\tilde{s} \triangleq \sup\{u \in \mathcal{D}_{M-1}\,;\, u \le s\}$, on a les relations $\tilde{s} \le s < t \le \tilde{t}$, $\tilde{s} - s \le 2^{-M}$, $t - \tilde{t} \le 2^{-M}$ (voir Figure 1.1).

De (1.2) on déduit $|X_{\tilde{s}}(\omega) - X_s(\omega)| \le 2^{-\gamma M}$, $|X_t(\omega) - X_{\tilde{t}}(\omega)| \le 2^{-\gamma M}$, qui d'après (1.3) avec $m = M-1$, donne (1.3) avec $m = M$.

Pour tout $s,\, t \in \mathcal{D}$ avec $0 < t - s < \rho(\omega) \triangleq 2^{-N(\omega)}$, on choisit $n \ge N(\omega)$ tel que $2^{-(n+1)} \le t - s < 2^{-n}$. D'après (1.3)

$$|X_t(\omega) - X_s(\omega)| \le 2\sum_{i=n+1}^{\infty} 2^{-\gamma i} \le \delta\,|t-s|^\gamma \;, \quad 0 < t - s < \rho(\omega) \;, \tag{1.4}$$

où $\delta \triangleq 2/(1-2^{-\gamma})$. Ce qui prouve l'uniforme continuité de $\mathcal{D} \ni t \mapsto X_t(\omega)$ pour tout ω p.s.

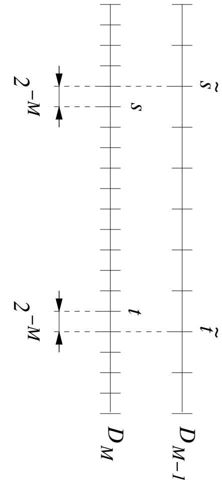

FIG. 1.1 – Relations $\tilde{s} \leq s < t \leq \tilde{t}$, $\tilde{s} - s \leq 2^{-M}$, $t - \tilde{t} \leq 2^{-M}$.

Étape 3 : existence d'une modification continue. On définit un processus $\tilde{X}$ de la façon suivante

- Pour $\omega \notin F$, on pose $\tilde{X}_t(\omega) = 0$, $0 \leq t \leq 1$.
- Pour $\omega \in F$ et $t \in \mathcal{D}$, on pose $\tilde{X}_t(\omega) = X_t(\omega)$.
- Pour $\omega \in F$ et $t \in [0,1] \cap \mathcal{D}^c$, il existe une suite $\{t_n\} \in \mathcal{D}$ telle que $t_n \to t$. On pose alors $\tilde{X}_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega)$. Il est clair par (1.4) que cette limite ne dépend pas du choix particulier de la suite $t_n \to t$.

Le processus ainsi défini est continu puisqu'il satisfait (1.4).

On vérifie que $\tilde{X}$ est bien une modification de X. $\tilde{X}_t = X_t$ p.s. pour $t \in \mathcal{D}$. Pour $t \in [0,1] \cap \mathcal{D}^c$, on se donne une suite de diadiques $t_n \to t$: $X_{t_n} \to X_t$ en probabilité et $X_{t_n} \to \tilde{X}_t$ p.s., donc $\tilde{X}_t = X_t$ p.s. □

Nous avons en fait démontré le résultat plus fort suivant

Corollaire 1.1.13 *Soit X un processus stochastique vérifiant les hypothèses du Théorème 1.1.12, alors X admet une modification p.s. localement höldérienne d'ordre γ, pour tout $\gamma \in]0, \beta/\alpha[$, c'est à dire,*

$$P\left(\omega \in \Omega\,;\quad \sup_{\substack{0<t-s<\rho(\omega)\\ s,t\in\mathcal{T}}} \frac{|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)|}{|t-s|^\gamma} \leq \delta\right) = 1$$

où $\rho(\omega)$ est une variable aléatoire p.s. strictement positive et $\delta > 0$ est une certaine constante.

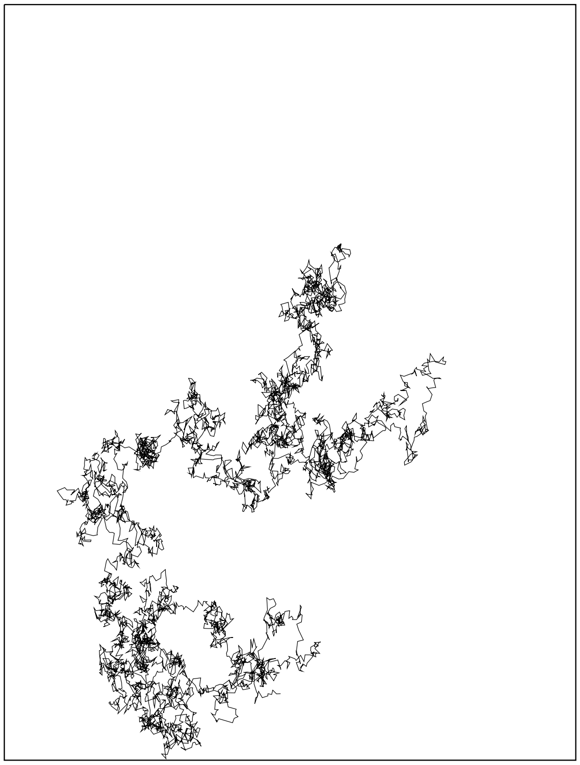

FIG. 1.2 – Une trajectoire du mouvement brownien dans le plan (simulation).

1.2 Mouvement brownien

On se fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Un *mouvement brownien*, également appelé *processus de Wiener*, est un processus B qui présente les trois propriétés suivantes :

Indépendance des accroissements. Pour tout $n \geq 2$ et tout $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, les variables aléatoires $B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$, $B_{t_{n-1}} - B_{t_{n-2}}, \ldots$, $B_{t_1} - B_{t_0}$ sont indépendantes[3].

Stationnarité. Pour tout $\delta > 0$, la loi de la variable $B_{t+\delta} - B_t$ ne dépend pas de t.

Continuité. Le processus B est continu.

De plus, on suppose que $B_0 = 0$. Ce qui n'est pas restrictif puisque $\tilde{B}_t = B_t - B_0$ qui vérifie également les trois propriétés précédentes.

On peut en fait montrer qu'un tel processus est gaussien (voir Breiman [5] p. 249 ou Guikhman–Skorokhod [14] p. 336).

3. De manière équivalente : pour tout $t > s \geq 0$, la variable $B_t - B_s$ est indépendante de $\mathcal{F}_s \triangleq \sigma(B_u\,;\, u \leq s)$.

Définition 1.2.1 *Soit Q une matrice de dimension d, auto–adjointe et semi–définie positive. On appelle* mouvement brownien *de dimension d (ou* processus de Wiener*) et de matrice de covariance Q, un processus qui vérifie :*

(*i*) $B_0 = 0$,

(*ii*) B *est continu,*

(*iii*) B *est à accroissements indépendants,*

(*iv*) *pour tout* $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s \sim N(0, (t-s)\, Q)$.

Lorsque $Q = I$, B est dit standard.

Proposition 1.2.2 *Un processus B est un mouvement brownien de matrice de covariance Q si et seulement si*

(*i*) $B_0 = 0$,

(*ii*) B *est continu,*

(*iii*) B *est gaussien,*

(*iv*) *pour tout* t, $s > 0$, $E(B_t) = 0$ *et* $E(B_t\, B_s^*) = (t \wedge s)\, Q$.

Preuve Soit B un mouvement brownien de matrice de covariance Q, pour tout $n \geq 2$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ est l'image par une application linéaire du vecteur aléatoire gaussien $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$, donc B est gaussien. De plus, soit $s \leq t$, comme $B_t - B_s \perp\!\!\!\perp B_s$,

$$\begin{aligned} E[B_t\, B_s^*] &= E[(B_s + B_t - B_s)\, B_s^*] \\ &= E[B_s\, B_s^*] + E[(B_t - B_s)\, B_s^*] = (s+0)\, Q = (s \wedge t)\, Q \ . \end{aligned}$$

Réciproquement si B vérifie les propriétés (*i*), (*ii*), (*iii*), (*iv*) de la proposition, il est clair que $B_t - B_s \sim N(0, (t-s)\, Q)$ $(s \leq t)$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, $(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ est un vecteur aléatoire gaussien de matrice de covariance diagonale, ses composantes sont donc indépendantes. □

Exercice 1.2.3 *Soit B un mouvement brownien standard réel. Montrer que, p.s.,*

$$\limsup_{t \to \infty} B_t = \infty \ , \quad \liminf_{t \to \infty} B_t = -\infty \ , \quad \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t}\, B_t = 0 \ .$$

[Pour cette dernière limite, on pourra utiliser le lemme de Borel–Cantelli].

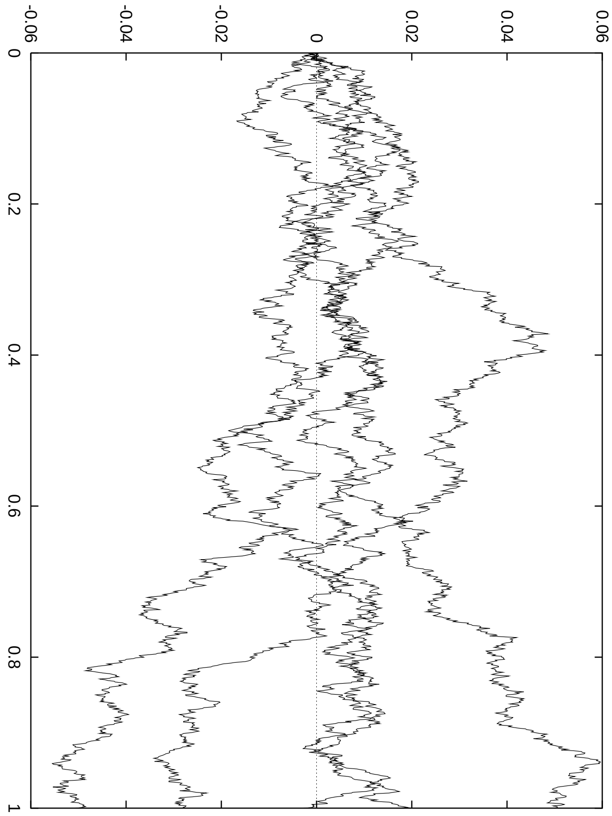

FIG. 1.3 – Trajectoires indépendantes d'un mouvement brownien réel standard (simulation).

Exercice 1.2.4 *Soit B un mouvement brownien standard réel. Montrer que chacun des processus suivants est également un mouvement brownien standard :*

$$\begin{aligned} X_t &\triangleq \lambda B_{t/\lambda^2} \qquad \text{(quelque soit } \lambda > 0 \text{ fixé)}, \\ Y_t &\triangleq \begin{cases} t\, B_{1/t}\,, & t > 0\,, \\ 0\,, & t = 0\,, \end{cases} \\ Z_t &\triangleq \tilde{B}_t \triangleq B_{t+t_0} - B_{t_0} \qquad \text{(quelque soit } t_0 \geq 00 \text{ fixé)}. \end{aligned}$$

Déduire du fait que Y est un mouvement brownien que les trajectoires de B ne sont pas p.s. dérivables en 0 [pour le cas de Y on pourra utiliser l'Exercice 1.2.3].

Remarque 1.2.5 *Se pose naturellement la question de l'existence d'un tel processus. Considérons un processus B vérifiant les hypothèses (i), (iii) et (iv) de la Définition 1.2.1. On sait que $E(|B^i_t - B^i_s|^{2n}) = \frac{(2\,n)!}{2^n\, n!}\, Q^n_{ii}\, |t-s|^n$ et donc*

$$E(|B_t - B_s|^{2n}) = C\,|t-s|^n$$

où la constante C ne dépend que de n, d et Q. Du Théorème 1.1.12 avec $\beta = n-1$ et $\alpha = 2n$, on déduit que B admet une modification continue (qui vérifie donc (ii)). [Ce qui ne répond pas entièrement à la question !].

De cette dernière remarque et du Corollaire 1.1.13, il découle la

Proposition 1.2.6 *Les trajectoires d'un mouvement brownien sont localement höldériennes d'ordre $\frac{1}{2} - \varepsilon$ quelque soit $\varepsilon > 0$.*

Théorème 1.2.7 *Soit $t > 0$, pour tout $n \geq 1$, on se donne une subdivision $\Delta_n = \{t^n_0, \dots, t^n_n\}$ de l'intervalle $[0,t]$ telle que $|\Delta_n| \to 0$ quand $n \to \infty$. Etant donné un mouvement brownien standard B,*

(*i*) $\sum_{k=1}^n (B_{t^n_k} - B_{t^n_{k-1}})\,(B_{t^n_k} - B_{t^n_{k-1}})^*$ –n“to“infty”t“, I\$dans\$L^2(“Omega, “FF, P; “R^–d“times2”)\$, “ite
$B_{t^n_{k-1}}|^2$–n“to“infty”t“, d\$dans\$L^2(“Omega, “FF, P)\$. “end–enumerate”Si, deplus, \$“sum$n \geq 1 |\Delta_n|$
∞, *alors les convergences ont lieu presque sûrement.*

Preuve *Afin d'alléger les notations, on supprime l'indice n de t^n_k. On pose M_n la matrice $\sum_{k=1}^n (B_{t_k} - B_{t_{k-1}})\,(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})^*$, on a*

$$M^{i,j}_n = \sum_{k=1}^n (B^i_{t_k} - B^i_{t_{k-1}})\,(B^j_{t_k} - B^j_{t_{k-1}})\ .$$

$EM^{i,j}_n = \delta_{ij} \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1}) = \delta_{ij}\, t$, *et* $VarM^{i,j}_n = E((\sum_{k=1}^n \xi_k)^2)$, *avec*

$$\xi_k \triangleq (B^i_{t_k} - B^i_{t_{k-1}})\,(B^j_{t_k} - B^j_{t_{k-1}})\ - \delta_{ij}\,(t_k - t_{k-1})\ .$$

Les variables ξ_k sont indépendantes et centrées, donc $VarM_n^{i,j} = E((\sum_{k=1}^n \xi_k)^2) = \sum_{k=1}^n E(\xi_k^2)$ (voir l'astuce classique de l'Exercice 1.3.4) et [4]

$$\begin{aligned} VarM_n^{i,i} &= \sum_{k=1}^n E((B^i_{t_k} - B^i_{t_{k-1}})^4) - (t_k - t_{k-1})^2 \\ &= 2\sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 \le 2\,|\Delta_n|\,t\ , \end{aligned}$$

et pour $i \neq j$ [5],

$$\begin{aligned} VarM_n^{i,j} &= \sum_{k=1}^n E[\ (B^i_{t_k} - B^i_{t_{k-1}})^2\ (B^j_{t_k} - B^j_{t_{k-1}})^2\ ] \\ &= \sum_{k=1}^n E[(B^i_{t_k} - B^i_{t_{k-1}})^2]\ E[(B^j_{t_k} - B^j_{t_{k-1}})^2] \\ &= \sum_{k=1}^n (t_k - t_{k-1})^2 \le |\Delta_n|\,t\ . \end{aligned}$$

Dans les deux cas, $VarM_n^{i,j} \to 0$ quand $n \to \infty$, c'est à dire $M_n^{i,j} \to \delta_{ij}\, t$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Ce qui montre la convergence L^2. Pour la convergence p.s. ont utilise le critère de convergence presque sure de la Proposition A.1.1. □

Corollaire 1.2.8 *Pour presque tout $\omega \in \Omega$, les trajectoire du mouvement brownien $t \mapsto B_t(\omega)$ sont à variations non bornées sur tout intervalle $[0,T]$.*

Preuve *On considère une suite $\Delta_n = \{t_k^n\}$ de subdivisions de l'intervalle $[0,T]$ telle que $\sum_{n\geq 1} |\Delta_n| < \infty$.*

On a

$$\sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \geq \frac{\sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2}{\sup_{1\leq k\leq n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|}\ .$$

Il existe un négligeable en dehors duquel les trajectoires sont continues. Elles sont donc uniformément continues sur l'intervalle compact $[0,T]$ et comme $|\Delta_n| \to 0$, on a $\sup_{1\leq k\leq n} |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| \to 0$ p.s.

D'autre part, d'après le Théorème 1.2.7, $\sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}|^2$ converge presque sûrement vers dt.

En conclusion, il existe un négligeable N tel que pour tout $\omega \notin N$,

$$\liminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n |B_{t_k} - B_{t_{k-1}}| = +\infty\ .$$

---

4. Si $X \sim N(0,\sigma^2)$, alors $E(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n\, n!}\,\sigma^n$.

5. Comme B est mouvement brownien standard, pour $i \neq j$, $(B^i_{t_k} - B^i_{t_{k-1}}) \perp\!\!\!\perp (B^j_{t_k} - B^j_{t_{k-1}})$ car $(B_{t_k} - B_{t_{k-1}})$ est un vecteur aléatoire gaussien de matrice de covariance diagonale.

□

Exercice 1.2.9 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ *un mouvement brownien réel standard,* $\Delta_n = \{t_k^n\}$ *une suite de subdivision de l'intervalle* $[0,t]$ *telle que* $|\Delta_n| \to 0$*. On note* $t^n_{k+\frac{1}{2}} = (t_k^n + t_{k+1}^n)/2$*. Montrer que*

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{t^n_{k+\frac{1}{2}}} - B_{t^n_k}\right) \left(B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k}\right) \ \to \ \frac{t}{2} \qquad dans\ L^2(\Omega)\ ,$$
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_{k+\frac{1}{2}}}\right) \left(B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k}\right) \ \to \ \frac{t}{2} \qquad dans\ L^2(\Omega)\ .$$

En déduire
$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{t^n_{k+\frac{1}{2}}} \left(B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k}\right) \to \frac{B_t^2}{2} \qquad dans\ L^2(\Omega)\ .$$

Ces convergences sont liées à la notion d'intégrale stochastique de Stratonovich développée au paragraphe 2.4.

Remarque 1.2.10 *Soit* B *un mouvement brownien scalaire. La loi de* $(B_{t+\delta} - B_t)/\delta$ *est* $N(0, 1/\delta)$*, donc, pour tout* $F \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *borné,* $P((B_{t+\delta} - B_t)/\delta \in F) \to 0$ *quand* $\delta \to 0$*. Cette différence finie ne peut donc pas converger avec une probabilité positive vers une variable aléatoire finie. Ceci donne une intuition de la non dérivabilité du mouvement brownien. En fait, on peut montrer que presque sûrement, les trajectoires* $t \mapsto B_t(\omega)$ *sont presque partout (en* t*) non dérivables (voir* Revuz–Yor *[20], Corollaire 2.6 p. 28).*

1.3 Filtration

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*. Dans la suite de ce cours, on supposera que* toute sous tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$ contient tous les P–négligeables de $\mathcal{F}$.

Définition 1.3.1 *On appelle* filtration *une famille croissante* $\{\mathcal{F}_t\,;\, t \geq 0\}$ *de sous tribus de* $\mathcal{F}$*. Le quadruplé* $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\,;\, t \geq 0\}, P)$ *(également noté* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$*) où* $\{\mathcal{F}_t\,;\, t \geq 0\}$ *est une filtration est appelé* espace de probabilité filtré*.*

Étant donné un processus X *défini sur* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$*, la* filtration naturelle *(ou* histoire*) de* X*, notée* $\{\mathcal{F}_t^X\,;\, t \geq 0\}$*, est définie par* $\mathcal{F}_t^X \stackrel{\triangle}{=} \sigma(X_s\,;\, s \leq t)$*.*

Proposition 1.3.2 *Un processus* X *avec* $X_0 \equiv x$*, est à accroissements indépendants si et seulement si*
$$(X_t - X_s) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s^X\ , \quad \forall t > s \geq 0\ . \tag{1.5}$$

Preuve *On considère un processus X vérifiant (1.5). On se donne $n \geq 2$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$. Les variables $X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}$, $X_{t_{n-2}} - X_{t_{n-3}}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0}$ sont $\mathcal{F}^X_{t_{n-1}}$–mesurables et $X_{t_n} - X_{t_{n-1}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^X_{t_{n-1}}$, d'où*

$$\mathrm{loi}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0}) = \mathrm{loi}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}})\ \mathrm{loi}(X_{t_{n-1}} - X_{t_{n-2}}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0})$$

et par récurrence

$$\mathrm{loi}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0}) = \mathrm{loi}(X_{t_n} - X_{t_{n-1}}) \times \cdots \times \mathrm{loi}(X_{t_1} - X_{t_0})\ .$$

Ce qui prouve la condition suffisante.

On suppose maintenant que X est un processus à accroissements indépendants. Pour tout $n \geq 2$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \leq s < t$ on a donc

$$\begin{aligned}
X_t - X_s,\, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0} &\quad \textit{sont indépendants} \\
&\Longrightarrow (X_{t_n} - X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0}) \perp\!\!\!\perp (X_t - X_s) \\
&\Longleftrightarrow (X_{t_n} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0}) \perp\!\!\!\perp (X_t - X_s) \\
&\Longleftrightarrow (X_{t_n} - X_{t_0}, \ldots, X_{t_1} - X_{t_0}) + (x, \ldots, x) \perp\!\!\!\perp (X_t - X_s)
\end{aligned}$$

(en effet, si Z est une variable aléatoire et c une constante alors $\sigma(Z + c) = \sigma(Z)$). Comme $X_0 \equiv x$, on obtient $(X_t - X_s) \perp\!\!\!\perp (X_{t_n}, X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1})$. Ce qui prouve que l'algèbre définie par

$$\mathcal{A}_s \triangleq \bigcup_{\substack{n \geq 2 \\ 0 \leq t_1 < \cdots < t_n \leq s}} \sigma(X_{t_n}, X_{t_{n-1}}, \ldots, X_{t_1})$$

est indépendante de $(X_t - X_s)$. Par ailleurs $\sigma(\mathcal{A}_s) = \mathcal{F}^X_s$ donc, pour tout $A \in \mathcal{F}^X_s$, il existe une suite $\{A_p\}_{p \geq 0}$ dans $\mathcal{A}_s$ telle que $P(A \triangle A_p) \to 0$ quand $p \to \infty$ ([6]). Ce qui permet de montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}^X_s$, $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$: $P(\{X_t - X_s \in B\} \cap A) = P(X_t - X_s \in B) \times P(A)$. Donc $X_t - X_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^X_s$. □

Définition 1.3.3 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ un espace de probabilité filtré. Un processus X, défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, est dit $\mathcal{F}_t$–*adapté *si, pour tout $t \geq 0$, X_t est $\mathcal{F}_t$–mesurable.*

Exercice 1.3.4 *Soit $\{\xi_k \,;\, 1 \leq k \leq n\}$ une suite de variables aléatoires de carré intégrable et $\{\mathcal{F}_k \,;\, 1 \leq k \leq n\}$ une filtration de $\mathcal{F}$. On suppose que*

(i) *ξ est $\mathcal{F}_k$–mesurable,*

(ii) *$E(\xi_{k+1} | \mathcal{F}_k) = 0$.*

6. $A \triangle B \triangleq (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

Montrer que

$$E[(\sum_{k=1}^{n}\xi_k)^2] = \sum_{k=1}^{n} E[\xi_k^2] \ . \tag{1.6}$$

En particulier, l'équation (1.6) est également vraie si ξ est une suite de variables aléatoires indépendantes centrées.

Définition 1.3.5 *On appelle $\mathcal{F}_t$–P* mouvement brownien *de matrice de covariance Q, un processus B $\mathcal{F}_t$–adapté qui vérifie :*

- (i) $B_0 \equiv 0$,
- (ii) *pour tout $0 \le s < t$, $(B_t - B_s)$ est un vecteur aléatoire gaussien $N(0,(t-s)\,Q)$ indépendant de $\mathcal{F}_s$,*
- (iii) *B est continue.*

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur P, on parle de $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien. On utilise également la notation $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P,B_t)$ pour désigner un $\mathcal{F}_t$ mouvement brownien défini sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Un mouvement brownien B défini sur un espace $(\Omega,\mathcal{F},P)$ est un $\mathcal{F}_t^B$ mouvement brownien.

Exercice 1.3.6 *Montrer que si B un mouvement brownien standard réel et une $\mathcal{F}_t$–martingale alors c'est un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien.*

Définition 1.3.7 *On appelle ($\mathcal{F}_t$–)* temps d'arrêt *une variable aléatoire τ à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que*

$$\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t \ , \quad \forall t \ge 0 \ .$$

Exercice 1.3.8 *Si τ_1 et τ_2 sont des temps d'arrêt, alors $\tau_1\wedge\tau_2$, $\tau_1\vee\tau_2$, $\tau_1+\tau_2$ sont également des temps d'arrêt.*

Définition 1.3.9 *Soit X un processus $\mathcal{F}_t$–adapté (resp. continue). On suppose qu'il existe une suite non décroissante τ_n de temps d'arrêt. Si*

$$X^n \triangleq \{X_{t\wedge\tau_n}\,;\ t \ge 0\}$$

est une martingale, pour tout n, et si $P(\lim_n \tau_n = \infty) = 1$ alors X est appelée martingale locale (resp. continue)

Exercice 1.3.10 *(Temps d'entrée)* *Soit $X = \{X_t\,;\, t \ge 0\}$ un processus continu à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et F un fermé de $\mathbb{R}^d$. Montrer que la variable aléatoire définie par*

$$\tau(\omega) \triangleq \begin{cases} \inf\{t \ge 0\,;\, X_t(\omega) \in F\} & \textit{si un tel } t \textit{ existe,} \\ +\infty & \textit{sinon} \end{cases}$$

est un temps–d'arrêt.

Nous venons de définir les filtration et les temps d'arrêt pour l'ensemble d'indices $\mathbb{R}^+$. Ces définitions s'étendent sans difficulté à un ensemble d'indices $[0,T]$.

1.4 Processus de Markov

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Définition 1.4.1 *Un processus X est appelé* processus de Markov *si*

$$P(X_t \in A | \mathcal{F}_s^X) = P(X_t \in A | X_s) \ , \quad \forall 0 \le s < t, \ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \ .$$

Étant donné un processus de Markov X, on lui associe sa loi initiale $\mu = \text{loi}(X_0)$ *et sa* probabilité de transition *définie par :*

$$p(s, x; t, A) \triangleq P(X_t \in A | X_s = x)$$

pour tout $0 \le s \le t$, $x \in \mathbb{R}^d$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

Proposition 1.4.2 *Soit $p(s, x; t, A)$ la probabilité de transition d'un processus de Markov X. Cette probabilité de transition a les propriétés suivantes :*

(i) *à s, t, A fixés, l'application $x \mapsto p(s, x; t, A)$ est mesurable,*

(ii) *à s, t, x fixés, l'application $A \mapsto p(s, x; t, A)$ définit une mesure sur l'espace probabilisable $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$,*

(iii) $p(t, x; t, A) = \mathbf{1}_A(x)$,

(iv) $p(s, x; t, A)$ *est solution de* l'équation de Chapman–Kolmogorov

$$p(s, x; t, A) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s, x; u, dy) \, p(u, y; t, A) \ , \quad \forall 0 \le s < u < t \ . \tag{1.7}$$

Lemme 1.4.3 *Soit X un processus de Markov de probabilité de transition $p(s, x; t, A)$. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ mesurable, bornée et tout $s < t$:*

$$E(f(X_t) | \mathcal{F}_s^X) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s, X_s; t, dx) \, f(x) \tag{1.8}$$

d'où $E(f(X_t) | \mathcal{F}_s^X) = E(f(X_t) | X_s)$.

Preuve *Soit $\mathcal{H}$ la classe des variables aléatoires réelles bornées f sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ qui vérifient (1.8).*

D'après la Définition 1.4.1, $\mathcal{H}$ contient toutes les fonctions indicatrices de boréliens de $\mathbb{R}^d$. $\mathcal{H}$ est stable par combinaisons linéaires finies. $\mathcal{H}$ est stable pour les limites bornées de suites monotones croissantes. Du Théorème des classes monotones A.3.5 on déduit que $\mathcal{H}$ contient toutes les variables aléatoires réelles bornées définies sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$. □

Preuve de l'équation de Chapman–Kolmogorov (1.7) *Soit $s < u < t$ et $A \subset \mathbb{R}^d$,*

$$P(X_t \in A|X_s) = E(\mathbf{1}_A(X_t)|X_s) = E(E(\mathbf{1}_A(X_t)|\mathcal{F}_u^X)|X_s)$$

car $\sigma(X_s) \subset \mathcal{F}_u^X$. Et, puisque X est un processus de Markov, $E(\mathbf{1}_A(X_t)|\mathcal{F}_u^X) = P(X_t \in A|\mathcal{F}_u^X) = P(X_t \in A|X_u)$. Donc, à l'aide du Lemme 1.4.3 :

$$\begin{aligned} P(X_t \in A|X_s) &= E(P(X_t \in A|X_u)|X_s) \\ &= E(p(u, X_u; t, A)|X_s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} p(s, X_s; u, dy)\, p(u, y; t, A)\ . \end{aligned}$$

Enfin, par définition de l'espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire (voir Paragraphe A.2.3),

$$P(X_t \in A|X_s = x) = \int_{\mathbb{R}^d} p(s, x; u, dy)\, p(u, y; t, A)\ .$$

□

Exercice 1.4.4 *Soit un processus de Markov X de loi initiale μ et de probabilité de transition $p(s, x; t, A)$. Soit $A_0, A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et $A \triangleq A_o \times A_1 \times \cdots \times A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d(n+1)})$. La classe des boréliens qui sont de la forme de A est un π–système qui engendre $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{d(n+1)})$. Pour tout $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n$, montrer que*

$$\begin{aligned} &P(X_{t_0} \in A_0,\, X_{t_1} \in A_1, \ldots, X_{t_n} \in A_n) \\ &\qquad = \int_{A_0}\int_{A_1}\cdots\int_{A_n} p(t_{n-1}, y_{n-1}; t_n, dy_n) \cdots p(0, y_0; t_1, dy_1)\, \mu(dy_0)\ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

Remarque 1.4.5 *On considère une loi initiale μ et une probabilité de transition $p(s, x; t, A)$ (i.e. vérifiant les propriétés (i), (ii), (ii), (iv) de la Proposition 1.4.2). Il existe alors une unique probabilité P définie sur l'espace $([\mathbb{R}^d]^{\mathbb{R}^+}, [\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)]^{\mathbb{R}^+})$ telle que le processus canonique $X_t(\omega) = \omega(t)$ soit un P–processus de Markov de loi initiale μ et de probabilité de transition $p(s, x; t, A)$.*

Pour démontrer ce résultat (on en trouvera une preuve détaillée dans Freidman *[12]), à l'aide de l'égalité (1.9), on associe à μ et $p(s, x; t, A)$ une famille cohérente de lois marginales. Le Théorème d'extension de Kolmogorov 1.1.5 nous donne l'existence et l'unicité d'une loi probabilité sur l'espace considéré. On vérifie alors que cette probabilité a les propriétés désirées.*

Proposition 1.4.6 *Soit X un processus de Markov :*

$$P(A|\mathcal{F}_s^X) = P(A|X_s)\ , \quad \forall 0 \le s \le t,\ A \in \sigma(X_u\,;\, u \ge t)\ .$$

Preuve *Soit* A *un événement de la forme* $A = \{X_{t_1} \in F_1\} \cap \cdots \cap \{X_{t_n} \in F_n\}$ *avec* $t \leq t_1 < \cdots < t_n$ *et* $F_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

$$\begin{aligned} P(A|\mathcal{F}_s^X) &= E(\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_s^X) \\ &= E(\mathbf{1}_{F_1}(X_{t_1})\cdots\mathbf{1}_{F_n}(X_{t_n})|\mathcal{F}_s^X) \\ &= E(\ E[\mathbf{1}_{F_1}(X_{t_1})\cdots\mathbf{1}_{F_n}(X_{t_n})|\mathcal{F}_{t_{n-1}}^X]\ |\mathcal{F}_s^X) \\ &= E(\ \mathbf{1}_{F_1}(X_{t_1})\cdots\mathbf{1}_{F_{n-1}}(X_{t_{n-1}})\, E[\mathbf{1}_{F_n}(X_{t_n})|\mathcal{F}_{t_{n-1}}^X]\ |\mathcal{F}_s^X) \\ &= E(\ \mathbf{1}_{F_1}(X_{t_1})\cdots\mathbf{1}_{F_{n-1}}(X_{t_{n-1}})\, E[\mathbf{1}_{F_n}(X_{t_n})|X_{t_{n-1}}]\ |\mathcal{F}_s^X)\ . \end{aligned}$$

Comme $\mathbf{1}_{F_{n-1}}(X_{t_{n-1}})\, E[\mathbf{1}_{F_n}(X_{t_n})|X_{t_{n-1}}]$ *est* $X_{t_{n-1}}$*–mesurable, il existe une fonction mesurable* φ_1 *telle que*

$$\varphi_1(X_{t_{n-1}}) = \mathbf{1}_{F_{n-1}}(X_{t_{n-1}})\, E[\mathbf{1}_{F_n}(X_{t_n})|X_{t_{n-1}}]\ .$$

Donc

$$\begin{aligned} P(A|\mathcal{F}_s^X) &= E(\ \mathbf{1}_{F_1}(X_{t_1})\cdots\mathbf{1}_{F_{n-2}}(X_{t_{n-2}})\,\varphi_1(X_{t_{n-1}})\ |\mathcal{F}_s^X) \\ &= E(\ E[\mathbf{1}_{F_1}(X_{t_1})\cdots\mathbf{1}_{F_{n-2}}(X_{t_{n-2}})\,\varphi_1(X_{t_{n-1}})|\mathcal{F}_{t_{n-2}}^X]\ |\mathcal{F}_s^X) \\ &= E(\ \mathbf{1}_{F_1}(X_{t_1})\cdots\mathbf{1}_{F_{n-2}}(X_{t_{n-2}})\, E[\varphi_1(X_{t_{n-1}})|\mathcal{F}_{t_{n-2}}^X]\ |\mathcal{F}_s^X)\ . \end{aligned}$$

En utilisant le Lemme 1.4.3, $E[\varphi_1(X_{t_{n-1}})|\mathcal{F}_{t_{n-2}}^X] = E[\varphi_1(X_{t_{n-1}})|X_{t_{n-2}}]$*. Il existe donc une fonction mesurable* φ_2 *telle que*

$$\varphi_2(X_{t_{n-2}}) = E[\varphi_1(X_{t_{n-1}})|X_{t_{n-2}}]\ .$$

Par récurrence, on montre finalement qu'il existe des fonctions mesurables φ_{n-1} *et* ψ *telles que*

$$P(A|\mathcal{F}_s^X) = E(\varphi_{n-1}(X_{t_1})|\mathcal{F}_s^X) = E(\varphi_{n-1}(X_{t_1})|X_s) = \psi(X_s)\ .$$

D'autre part

$$P(A|X_s) = E(\ E[\mathbf{1}_A|\mathcal{F}_s^X]\,|X_s) = E(\ \psi(X_s)\,|X_s) = \psi(X_s)\ .$$

On a donc démontré que

$$P(A|\mathcal{F}_s^X) = P(A|X_s)\ . \tag{1.10}$$

On définit la classe

$$\mathcal{C} \stackrel{\triangle}{=} \left\{\{X_{t_1} \in F_1\} \cap \cdots \cap \{X_{t_n} \in F_n\}\ ;\ n \geq 0,\ t \leq t_1 < \cdots < t_n,\ F_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\right\}$$

et $\mathcal{H}$ *la classe des événements* A *qui vérifient (1.10).*

On vérifie que $\mathcal{C}$ *est un* π*–système et que* $\mathcal{H}$ *est un* λ*–système. D'après ce que l'on vient de montrer* $\mathcal{C} \subset \mathcal{H}$*, en utilisant le Théorème* π*–*λ *A.3.3,* $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{H}$*, et comme* $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(X_u\ ;\ u \geq t)$*, on a le résultat recherché.* □

Proposition 1.4.7 *Un processus à accroissements indépendants est un processus de Markov. En particulier un mouvement brownien est un processus de Markov.*

Lemme 1.4.8 *Soient* X *et* Y *des vecteurs aléatoires à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$*,* $\mathcal{G}$ *une sous tribu de* $\mathcal{F}$*.* Y *est supposé* $\mathcal{G}$*–mesurable et* X *indépendant de* $\mathcal{G}$*. Pour toute fonction* $\varphi : \mathbb{R}^{2d} \mapsto \mathbb{R}^k$ *mesurable et bornée, on a*

$$E(\ \varphi(X,Y)\,|\mathcal{G}) = E(\ \varphi(X,Y)\,|Y)\ .$$

Preuve de la Proposition 1.4.7 *Soit $s \leq t$, il s'agit de montrer que $P(X_t \in A|\mathcal{F}_s^X) = P(X_t \in A|X_s)$. On utilise le Lemme 1.4.8 avec $\varphi(x,y) = \mathbf{1}_A(x+y)$, $X = X_t - X_s$, $Y = X_s$, $\mathcal{G} = \mathcal{F}_s^X$, on obtient*

$$\begin{aligned} P(X_t \in A|\mathcal{F}_s^X) &= P(X_t - X_s + X_s \in A|\mathcal{F}_s^X) \\ &= P(X_t - X_s + X_s \in A|X_s) \\ &= P(X_t \in A|X_s)\ . \end{aligned}$$

□

Preuve du Lemme 1.4.8 *Soit $A \in \sigma(X)$, $B \in \sigma(Y)$,*

$$E(\mathbf{1}_{A\cap B}|\mathcal{G}) = P(A)\,\mathbf{1}_B = E(\mathbf{1}_{A\cap B}|Y)\ . \tag{1.11}$$

On note $\mathcal{P} = \{A \cap B\,;\, A \in \sigma(X),\, B \in \sigma(Y)\}$. $\mathcal{P}$ est un π–système. $\mathcal{P}$ contient $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$, donc $\mathcal{P}$ contient Ω et $\sigma(X,Y)$.

Soit $\mathcal{C}$ la classe des variables aléatoires réelles bornées Z telles que $E(Z|\mathcal{G}) = E(Z|Y)$. D'après (1.11), $\mathcal{C}$ contient $\mathbf{1}_A$, pour tout $A \in \mathcal{P}$. De plus $\mathcal{C}$ vérifie (ii) et (iii) du Théorème des classes monotones A.3.5, donc $\mathcal{C}$ contient toutes les variables aléatoires réelles $\sigma(X,Y)$–mesurables et bornées. □

1.5 Martingales

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, un ensemble d'indices $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}^+$ quelconque et une filtration $\{\mathcal{F}_t\,;\, t \in \mathcal{T}\}$ (i.e. une famille croissante de sous tribus de $\mathcal{F}$ indicée par $\mathcal{T}$). Typiquement $\mathcal{T} = \{1, \ldots, n\}$, $\mathcal{T} = \mathbb{N}$ (temps discret), $\mathcal{T} = [0,T]$ ou $\mathcal{T} = \mathbb{R}^+$ (temps continu).

Définition 1.5.1 *Un processus $X = \{X_t\,;\, t \in \mathcal{T}\}$ est une $\mathcal{F}_t$–*martingale *(resp.* sous–martingale, sur–martingale*) si*

- *(i)* $E|X_t| < \infty$, $\forall t \in \mathcal{T}$,
- *(ii)* *X est $\mathcal{F}_t$–adapté,*
- *(iii)* $\forall s, t \in \mathcal{T},\ 0 \leq s \leq t : E(X_t|\mathcal{F}_s) = X_s$ *p.s. (resp. $\geq X_s$, $\leq X_s$).*

Si X est une martingale (resp. sous–martingale, sur–martingale), alors l'application $\mathcal{T} \ni t \mapsto E(X_t)$ est constante (resp. croissante, décroissante).

Exercice 1.5.2 *Soit X une surmatingale, continue et positive. Montrer que*

$$X_t = 0\ ,\quad t \geq \tau\ ,\quad \textit{sur } \{\tau < \infty\}$$

où

$$\tau \triangleq \inf\{t \geq 0\,;\, X_t = 0\}\ .$$

1.5.1 Inégalités des (sous–)martingales en temps discret

Avant de présenter quelques inégalités de martingales en temps continu, nous montrons les équivalents en temps discret.

On se donne $n \geq 1$. On considère ici $\mathcal{T} = \{1, \ldots, n\}$. Dans ce paragraphe $X = \{X_k\,;\, k = 1, \ldots, n\}$ désigne une martingale (ou une sous–martingale). On définit

$$X_j^* \triangleq \sup_{1\leq k\leq j} X_k \ , \quad \bar{X}_j \triangleq \sup_{1\leq k\leq j} |X_k| \ , \quad 1 \leq j \leq n \ .$$

Remarque 1.5.3 *Dans ce cas le point (iii) de la Définition 1.5.1 peut être remplacée par*

$$E(X_{k+1}|\mathcal{F}_k) = X_k \ p.s. \ (resp. \geq X_k, \leq X_k), \quad \forall k \in \{1, \ldots, n-1\} \ .$$

Exercice 1.5.4 *Soit X une martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. S'il existe $p \geq 1$ tel que $E|X_n|^p < \infty$ alors, $E|X_k|^p < \infty$ $(1 \leq k \leq n)$ et*

$$E(\ |X_{k+1}|^p \ |\mathcal{F}_k) \geq |X_k|^p \ p.s., \ \forall 1 \leq k < n \ .$$

[Utiliser l'inégalité de Jensen A.2.5], i.e. $\{|X_k|^p\,;\, k = 1, \ldots, n\}$ est une sous–martingale.

Proposition 1.5.5 *Soit X une sous–martingale à valeurs dans $\mathbb{R}$,*

$$P\left(X_n^* > c\right) \leq \frac{1}{c}\, E(X_n^+) \leq \frac{1}{c}\, E(|X_n|) \ , \quad \forall c > 0 \ .$$

Preuve *Posons $A = \{X_n^* > c\}$ et $A_j = \{X_{j-1}^* \leq c\} \cap \{X_j > c\}$. $A_j \in \mathcal{F}_j$ et A est la réunion disjointe des A_j : $A = \sum_{1\leq j\leq n} A_j$. On a*

$$E(X_n^+) \geq E(X_n^+\, \mathbf{1}_A) \geq E(X_n\, \mathbf{1}_A) \geq \sum_{1\leq j\leq n} E(X_n\, \mathbf{1}_{A_j}) \ .$$

Comme X_k est une sous–martingale, $E(X_n\, \mathbf{1}_{A_j}) \geq E(X_j\, \mathbf{1}_{A_j})$. Enfin $E(X_j\, \mathbf{1}_{A_j}) > c\, P(A_j)$, d'où $E(X_n^+) \geq c\, P(A)$. La deuxième inégalité est triviale. □

Dans la démonstration de la Proposition 1.5.5 nous avons également prouvé le

Corollaire 1.5.6 *Soit X une sous–martingale à valeurs dans $\mathbb{R}$,*

$$P\left(X_n^* > c\right) \leq \frac{1}{c}\, E\left(X_n\, \mathbf{1}_{\{X_n^*>c\}}\right) \leq \frac{1}{c}\, E\left(|X_n|\, \mathbf{1}_{\{X_n^*>c\}}\right) \ , \quad \forall c > 0 \ .$$

Proposition 1.5.7 (Inégalité de Doob) *Soit X une martingale à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, pour tout $p \geq 1$*

$$P\left(\bar{X}_n > c\right) \leq \frac{1}{c^p}\, E\left(|X_n|^p\, \mathbf{1}_{\{\bar{X}_n>c\}}\right) \leq \frac{1}{c^p}\, E(|X_n|^p) \ , \quad \forall c > 0 \ . \tag{1.12}$$

Pour tout $p > 1$

$$E(|X_n|^p) \leq E\left(\bar{X}_n^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_n|^p) \ . \tag{1.13}$$

Preuve *Si* $\|X_n\|_p = \infty$ *la proposition est triviale. On peut donc supposer que* $\|X_n\|_p < \infty$. *Alors d'après l'Exercice 1.5.4,* $\|X_k\|_p < \infty$ $(1 \leq k \leq n)$. *Ainsi* $0 \leq \bar{X}_n^p \leq \sum_{k=1}^n |X_k|^p \in L^1(\Omega)$.

De l'Exercice 1.5.4 et de la Proposition 1.5.5 on déduit (1.12).

La première des inégalités de (1.13) est triviale.

D'après (1.12) : $c\, P(\bar{X}_n > c) \leq E(|X_n|\, \mathbf{1}_{\{\bar{X}_n > c\}})$. *On en déduit, pour* $\kappa > 0$ *fixé,*

$$\begin{aligned}
E\left((\bar{X}_n \wedge \kappa)^p\right) &= E\left([\lambda^p]_0^{\bar{X}_n \wedge \kappa}\right) \\
&= E\left(\int_0^{\bar{X}_n \wedge \kappa} p\, \lambda^{p-1}\, d\lambda\right) \\
&= E\left(\int_0^{\kappa} p\, \lambda^{p-1}\, \mathbf{1}_{\{\bar{X}_n > \lambda\}}\, d\lambda\right) \\
&= \int_0^{\kappa} p\, \lambda^{p-1}\, P(\bar{X}_n > \lambda)\, d\lambda \\
&\leq \int_0^{\kappa} p\, \lambda^{p-2}\, E\left(|X_n|\, \mathbf{1}_{\{\bar{X}_n > \lambda\}}\right)\, d\lambda \\
&= p\, E\left(|X_n| \int_0^{\bar{X}_n \wedge \kappa} \lambda^{p-2}\, d\lambda\right) \\
&= \frac{p}{p-1}\, E\left(|X_n|\, (\bar{X}_n \wedge \kappa)^{p-1}\right)
\end{aligned}$$

Avec l'inégalité de Hölder, on obtient

$$E\left((\bar{X}_n \wedge \kappa)^p\right) \leq \frac{p}{p-1}\, \left(E[(\bar{X}_n \wedge \kappa)^p]\right)^{\frac{p-1}{p}}\, \left(E(|X_n|^p)\right)^{\frac{1}{p}}$$

c'est à dire

$$E\left((\bar{X}_n \wedge \kappa)^p\right) \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p\, E(|X_n|^p)\ .$$

Pour conclure il suffit de faire tendre κ *à l'infini.* □

1.5.2 Inégalités des (sous–)martingales en temps continu

On suppose ici que $\mathcal{T} = [0, T]$ $(T < \infty)$ *et on considère un espace de probabilité filtré et* $X = \{X_t\,;\, t \in [0, T]\}$ *un processus à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$. *On note*

$$X_T^* \triangleq \sup_{0 \leq t \leq T} X_t\ , \quad \bar{X}_T \triangleq \sup_{0 \leq t \leq T} |X_t|\ .$$

Exercice 1.5.8 *Si* X *est une martingale telle que pour un certain* $p \geq 1$ *on ait* $E(|X_T|^p) < \infty$. *Montrer que* $|X|^p$ *est une sous–martingale. [Même raisonnement que celui de l'Exercice 1.5.4].*

Proposition 1.5.9 *Si* X *est une sous–martingale continue à valeurs dans* $\mathbb{R}$, *alors*

$$P\left(X_T^* > c\right) \leq \frac{1}{c}\, E(X_T^+)\ , \qquad \forall c > 0\ .$$

Preuve *On fixe n et on pose $N = [2^n T]$ (partie entière). La suite $Y_i = X_{i/2^n}$ $(1 \le i \le N)$, $Y_{N+1} = X_T$ est une sous–martingale en temps discret de filtration $\mathcal{G}_i = \mathcal{F}_{i/2^n}$ $(1 \le i \le N)$, $\mathcal{G}_{N+1} = \mathcal{F}_T$. Posons $k_i^n = i/2^n$ $(1 \le i \le N)$, $k_{N+1}^n = T$. D'après 1.5.5, on a*

$$P\left(\sup_{i \le N+1} X_{k_i^n} > c\right) \le \frac{1}{c} EX_T^+ \ .$$

On considère l'événement $A_n = \{\sup_{i \le N+1} X_{k_i^n} > c\}$. La discrétisation par instants diaidiques implique que la suite $\{A_n\}$ est croissante et,par densité des diadiques et continuité de X, $\cup_{n \ge 1} A_n = \{\sup_{0 \le t \le T} X_t > c\}$.

Par la propriété de continuité monotone séquentielle, on a le résultat cherché. □

Proposition 1.5.10 (Inégalité de Doob) *Soit X une martingale continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, pour tout $p \ge 1$*

$$P\left(\bar{X}_T > c\right) \le \frac{1}{c^p} E(|X_T|^p) \ , \quad \forall c > 0 \ . \tag{1.14}$$

Pour tout $p > 1$

$$E(|X_T|^p) \le E\left(\bar{X}_T^p\right) \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_T|^p) \ . \tag{1.15}$$

Preuve *Si $E(|X_T|^p) = \infty$, les inégalités sont évidente. Si $E(|X_T|^p) < \infty$, on montre que $\bar{X}_T \in L^p(\Omega)$ en utilisant le même raisonnement que celui de la démonstration de la Proposition 1.5.7.*

Les inégalités (1.14) se déduit de la Proposition 1.5.9 et de l'Exercice 1.5.8.

Dans (1.15), la première des inégalités est triviale. Avec les notations de la démonstration Proposition 1.5.9, on pose

$$Z_n \triangleq \sup_{1 \le i \le N+1} |X_{k_i^n}|^p \quad et \quad Z \triangleq \sup_{0 \le t \le T} |X_t|^p \ .$$

$Z \in {}^1(\Omega)$, $0 \le Z_n \uparrow Z$ p.s., alors $Z_n \in L^1(\Omega)$ et $(EZ_n)^{1/p} \le [E(|X_T|^p)]^{1/p}$ $(\forall n \ge 1)$ et par convergence monotone $(EZ)^{1/p} \le [E(|X_T|^p)]^{1/p}$. □

1.5.3 Martingales et mouvement brownien

On montrera en exercice la

Proposition 1.5.11 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, B_t)$ un mouvement brownien standard, les processus suivants sont des $\mathcal{F}_t$–martingales*

(i) B_t,

(ii) $B_t B_t^* - t\,I$ *(à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times d}$)*,

(iii) $M_t^\alpha = \exp(\alpha^* B_t - \frac{1}{2} \alpha^* \alpha)$, *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}^d$.*

En fait cette dernière propriété est une caractérisation du mouvement brownien (voir Revuz–Yor *[20] p. 141) :*

Théorème 1.5.12 (Théorème de caractérisation de Lévy) *Soit X un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ tel que $X_0 = 0$ p.s. Les propriétés suivantes sont équivalentes*

(i) *X est un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien standard.*

(ii) *X est une $\mathcal{F}_t$–martingale continue et $\{X_t\, X_t^* - t\, I\,;\, t \geq 0\}$ est une $\mathcal{F}_t$–martingale.*

(iii) *X est une $\mathcal{F}_t$–martingale continue et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,*

$$\left\{\exp\left(i\, u^*\, X_t - \frac{1}{2}\, |u|^2\, t\right)\ ;\ 0 \leq t \leq T\right\}$$

est une $\mathcal{F}_t$–martingale (à valeurs complexes, $i^2 = -1$).

1.6 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 1.2.3 *Il existe plusieurs démonstrations de ces résultats, nous allons utiliser celle qui utilise les outils les plus simples (voir* Dacunha–Castelle et all [9]*).*

Notons que $B_n = (B_n - B_{n-1}) + \cdots + (B_1 - B_0)$ est la somme de n variables i.i.d. $N(0,1)$. D'après la loi 0–1 de Kolmogorov $P(\limsup_{n\to\infty} B_n \geq a) = 0$ ou 1. On a

$$\left\{\limsup_{n\to\infty} B_n \geq a\right\} = \bigcap_{p\geq 0} \left\{\sup_{n\geq p} B_n \geq a\right\}$$

qui est une intersection d'ensembles décroissants. Comme

$$P\left(\sup_{n\geq p} B_n \geq a\right) \geq P\left(B_p \geq a\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{a/\sqrt{p}}^{\infty} e^{-x^2/2}\, dx\ ,$$

avec $p \to \infty$, on

$$P\left(\sup_{n\geq p} B_n \geq a\right) \geq \frac{1}{2}\ .$$

Donc $P(\limsup_{n\to\infty} B_n \geq a) = 1$ pour tout a et ainsi

$$P(\limsup_{n\to\infty} B_n = \infty) = 1\ .$$

Pour la limite "inf" il suffit d'utiliser ce dernier résultat et de noter que $-B$ est également un mouvement brownien standard.

La loi des grands nombres donne $B_n/n \to 0$ p.s. quand $n \to \infty$. On a

$$\left\|\sup_{0\leq s\leq 1} |B_{s+n} - B_n|\right\|_2 \leq 2\, \| |B_{n+1} - B_n| \|_2 \leq= 2$$

donc, en utilisant l'inégalité de Tchebychev, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$P\left(\sup_{0\leq s\leq 1} |B_{s+n} - B_n| \geq \varepsilon\, n\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2\, n^2}\ .$$

Soit $\varepsilon_n \downarrow 0$ *tel que* $\sum_n (\varepsilon_n\, n)^{-2} < \infty$. *Par le lemme de Borel–Cantelli, pour presque tout* ω, *il existe* $n_0(\omega)$ *tel que, pour tout* $n \geq n_0(\omega)$:

$$\sup_{0 \leq s \leq 1} |B_{s+n}(\omega) - B_n(\omega)| \leq \varepsilon_n\, n \ .$$

Pour s *de partie entière* $[s] \geq n_0(\omega)$, *on a*

$$\frac{B_s}{s} - \frac{B_{[s]}}{[s]} \leq \varepsilon_{[s]}$$

et $B_{[s]}/[s] \to \infty$ *p.s., donc* $B_s/s \to \infty$ *p.s.* □

Solution de l'Exercice 1.2.4 *Nous ne démontrons que le cas de* Y. $Y_t = t\, B_{1/t}$ *est de loi* $N(0,t)$ *et d'après l'Exercice 1.2.3,* $\lim_{t \downarrow 0^+} Y_t = 0 = Y_0$ *(d'où la continuité en 0) et pour* $h > 0$:

$$E(Y_t\, Y_{t+h}) = E\left[t\,(t+h)\, B_{\frac{1}{t}}\, B_{\frac{1}{t+h}}\right] = t \ .$$

En conclusion, le processus Y *est gaussien, centré et de covariance* $(s \wedge t)$, *c'est donc un mouvement brownien.*

D'après l'Exercice 1.2.3 :

$$\limsup_{t \to \infty} Y_t = \limsup_{t \to 0} \frac{B_t}{t} = \infty \ , \quad \liminf_{t \to \infty} Y_t = \liminf_{t \to 0} \frac{B_t}{t} = -\infty$$

ainsi B *n'est pas dérivable en 0.* □

Solution de l'Exercice 1.3.6 B *est* $\mathcal{F}_t$*–adapté,* $B_0 = 0$ *et* B *est continue. Il faut enfin vérifier le point (ii) de la Définition 1.3.5. Soit* $0 \leq s \leq t$, $B_t - B_s$ *est gaussien, centré et de matrice de covariance* $N(0, (t-s)\, Q)$, *enfin pour tout* ξ *v.a.r.* $\mathcal{F}_s$*–mesurable*

$$E((B_t - B_s)\, \xi) = E(E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s]\ \xi)$$

et comme B *est une* $\mathcal{F}_t$*–martingale* $E[B_t - B_s|\mathcal{F}_s] = 0$ *ce qui montre que* $B_t - B_s \perp\!\!\!\perp \xi$. □

Solution de l'Exercice 1.3.6 *Les deux premières convergences se démontrent comme pour le Théorème 1.2.7. Pour la dernière, utiliser l'identité :*

$$\begin{aligned} B_t^2 &= \sum_{k=0}^{n-1} (B^2_{t_{k+1}} - B^2_{t_k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_{k+1}} + B_{t_k})(B^2_{t_{k+1}} - B^2_{t_k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}} (B^2_{t_{k+1}} - B^2_{t_k}) + \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} (B^2_{t_{k+1}} - B^2_{t_k}) \ . \end{aligned}$$

□

Solution de l'Exercice 1.3.10 *Il suffit de remarquer que, pour tout $t \geq 0$,*

$$\{\omega \in \Omega\,;\, \tau(\omega) \leq t\} = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{\substack{s \in [0,t] \\ s\ rationnel}} \{\omega \in \Omega\,;\, X_s(\omega) \in F_{1/p}\}$$

où $F_{1/p}$ est l'ouvert $F_{1/p} \triangleq \left\{x \in \mathbb{R}^d\,;\, d(x,F) < \frac{1}{p}\right\}$ ([7]). On en déduit le résultat puisque une tribu est fermée pour les réunions et intersections dénombrables. □

7. $d(x,F) \triangleq \inf(|x-y|\,;\, y \in F)$.

Chapitre 2

Calcul différentiel de Itô

2.1 Intégrale stochastique

On considère un mouvement brownien standard $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$. *Dans un premier temps nous allons construire l'intégrale stochastique en dimension* $d = 1$.

2.1.1 Classes d'intégrands

Définition 2.1.1 *Un processus* $\varphi_t(\omega)$ *défini sur* $[0,T] \times \Omega$ *[resp.* $\mathbb{R}^+ \times \Omega$*] est dit* progressivement mesurable *si, pour tout* $t \in [0,T]$ *[resp.* $t \in \mathbb{R}^+$*], l'application*

$$[0,t] \times \Omega \ni (s,\omega) \mapsto \varphi_s(\omega) \in \mathbb{R}$$

est $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$*–mesurable.*

Définition 2.1.2 *(i)* $M^2_{loc}(0,T)$ *est l'espace des processus progressivement mesurables* φ *tels que*

$$\int_0^T \varphi_t^2 \, dt < \infty \quad p.s.$$

(ii) $M^2(0,T)$ *est l'espace des (classes[1]) processus progressivement mesurables* φ *tels que*

$$E \int_0^T \varphi_t^2 \, dt < \infty \ .$$

(iii) $\mathcal{E}$ *est l'espace des* processus en escalier, *i.e. des processus* φ *de la forme*

$$\varphi_t(\omega) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k(\omega) \, \mathbf{1}_{]t_k,t_{k+1}]}(t)$$

avec $n \in \mathbb{N}$, $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ *et* $\alpha_k \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_k}, P)$, $0 \le k \le n$.

1. modulo la relation d'équivalence : $\varphi \sim \psi \Leftrightarrow E \int_0^T |\varphi_t - \psi_t|^2 \, dt = 0$.

On définit également

$$M^2 \triangleq \bigcap_{T>0} M^2(0,T) \ , \quad M^2_{loc} \triangleq \bigcap_{T>0} M^2_{loc}(0,T) \ .$$

De la même manière que l'on a défini $M^2(0,T)$ [resp. $M^2_{loc}(0,T)$], on définit $M^2(\mathbb{R}^+)$ [resp. $M^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$] en remplaçant $[0,T]$ par $\mathbb{R}^+$. On a $M^2(\mathbb{R}^+) \subset M^2$ et $M^2_{loc}(\mathbb{R}^+) \subset M^2_{loc}$.

Lemme 2.1.3 *$M^2(0,T)$ [resp. $M^2(\mathbb{R}^+)$] munit du produit scalaire $(\varphi,\psi) \triangleq E\int_0^T \varphi_t\,\psi_t\,dt$ [resp. $(\varphi,\psi) \triangleq E\int_{\mathbb{R}}^+ \varphi_t\,\psi_t\,dt$] est un espace de Hilbert.*

Preuve *Il s'agit de montrer que $M^2(0,T)$ est un espace complet, i.e. que toute suite de Cauchy y converge. On considère une suite de Cauchy $\{\varphi^n\}$. Comme $M^2(0,T)$ est inclus $L^2(0,T;L^2(\Omega,\mathcal{F},P))$ et que ce dernier est un espace de Hilbert, il existe φ appartenant à $L^2(0,T;L^2(\Omega,\mathcal{F},P))$ tel que*

$$E\int_0^T |\varphi^n_t - \varphi_t|^2\,dt \to 0 \ .$$

Ainsi $\int_0^T E|\varphi^n_t - \varphi_t|^2\,dt \to 0$, il existe donc une sous suite $\varphi^{n'}$ de φ^n et un négligeable (pour la mesure de Lebesgue) $N \subset [0,T]$, tels que $\varphi^{n'}_t \to \varphi_t$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, pour tout $t \notin N$.

De plus $\varphi^{n'}_t \in L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$ et ce dernier espace est fermé dans $L^2(\Omega,\mathcal{F},P)$, on a donc $\varphi^{n'}_t \to \varphi_t$ dans $L^2(\Omega,\mathcal{F}_t,P)$, pour tout $t \notin N$.

Posons

$$\bar\varphi_t = \begin{cases} \varphi_t & si\ t \notin N\ , \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

On vérifie que $\bar\varphi \in M^2(0,T)$. Enfin, $E\int_0^T |\varphi^n_t - \varphi_t|^2\,dt \to 0$, donc $E\int_0^T |\varphi^n_t - \bar\varphi_t|^2\,dt \to 0$, i.e. $\varphi^n \to \bar\varphi$ dans $M^2(0,T)$ (2). □

Lemme 2.1.4 *Pour tout $\varphi \in M^2(0,T)$ il existe une suite $\varphi_n \in \mathcal{E}$ telle que, pour tout $T > 0$, $\varphi_n\,\mathbf{1}_{[0,T]} \to \varphi\,\mathbf{1}_{[0,T]}$ dans $M^2(0,T)$.*

Preuve *Pour tout n fixé, on considère l'opérateur $P_n : L^2(\mathbb{R}^+) \mapsto L^2(\mathbb{R}^+)$ défini par*

$$[P_n f](t) \triangleq \sum_{i=1}^{n^2} \left(n \int_{(i-1)/n}^{i/n} f(s)\,ds \right) \mathbf{1}_{]\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]}(t) \ . \tag{2.1}$$

Sur l'intervalle $]\frac{i}{n},\frac{i+1}{n}]$ on prend la moyenne de f sur l'intervalle précédent *et $P_n f$ est nul en dehors de l'intervalle $]\frac{1}{n},\frac{n^2+1}{n}]$.*

2. Trop compliqué ! En fait $M^2(0,T)$ est un sous–espace de $L^2(0,T;L^2(\Omega,\mathcal{F},P))$ qui est un espace de Hilbert, pour montrer que $M^2(0,T)$ est un espace de Hilbert il suffit de vérifier qu'il est fermé dans $L^2(0,T;L^2(\Omega,\mathcal{F},P))$.

En utilisant l'inégalité de Cauchy–Schwarz, on obtient

$$[P_n f]^2(t) = \left(n \int_{(i-1)/n}^{i/n} f(s)\, ds \right)^2 \le n \int_{(i-1)/n}^{i/n} f^2(s)\, ds \ , \quad t \in]\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}] \ , \quad 1 \le i \le n^2 \ .$$

On en déduit que $\int_{\mathbb{R}}^{+} [P_n f]^2(t)\, dt \le \int_{\mathbb{R}}^{+} f^2(t)\, dt$, *c'est à dire :*

$$\|P_n f\|_{L^2(0,T)} \le \|f\|_{L^2(0,T)} \ , \quad f \in L^2(0,T) \ , \tag{2.2}$$

On vérifie aisément que

$$\|P_n f - f\|_{L^2(0,T)} \to 0 \text{ quand } n \to \infty, \forall f \in L^2(0,T) \ . \tag{2.3}$$

En effet, ce résultat est évident pour $f \in \mathcal{C}_K(\mathbb{R}^+)$ *et s'étend à* $f \in M^2(0,T)$ *en utilisant le fait que* $\mathcal{C}_K(\mathbb{R}^+)$ *est dense dans* $L^2(0,T)$ *et l'inégalité (2.2).*

Soit maintenant $\varphi \in M^2(\mathbb{R}^+)$. *Pour tout* n, $P_n\varphi \in \mathcal{E}$ *et*

$$\|P_n\varphi - \varphi\|^2_{M^2(\mathbb{R}^+)} = E\left(\|P_n\varphi - \varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \right) \ .$$

Mais $\|P_n\varphi - \varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \to 0$ *p.s., et* $\|P_n\varphi - \varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)} \le 4\,\|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^+)}$, *donç par convergence dominée,* $\|P_n\varphi - \varphi\|^2_{M^2(\mathbb{R}^+)} \to 0$.

De même, si $\varphi \in M^2$, *alors, pour tout* $T > 0$, $\|P_n\varphi - \varphi\|^2_{M^2(0,T)} \to 0$. □

Remarque 2.1.5 *Dans le cas d'un élément* $\varphi \in M^2(\mathbb{R}^+)$ *dont le support est inclus dans un intervalle fixe* $[0,T]$ *et telle que* $\sup_t E(\varphi_t^2) < \infty$, *alors on peut approcher* φ *par*

$$\varphi_t^n = \sum_{k=0}^{n^2} \varphi_{\frac{k}{n}} \, \mathbf{1}_{]\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]}(t)$$

au lieu de $P_n\varphi$.

2.1.2 Intégrale des processus en escalier

Définition 2.1.6 *Soit* $\varphi_t = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \, \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t)$ *un processus en escalier, on définit* l'intégrale stochastique de φ *par*

$$B_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_t \, dB_t \triangleq \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \left(B_{t \wedge t_{k+1}} - B_{t \wedge t_k} \right) \ , \quad t \ge 0 \ .$$

Lemme 2.1.7 *Soit* $\varphi \in \mathcal{E}$, *pour tout* $t \ge 0$

$$\begin{aligned} E[B_t(\varphi)] &= 0 \ , \\ E[B_t(\varphi)^2] &= E \int_0^t \varphi_s^2 \, ds \ . \end{aligned}$$

Plus généralement, pour tout $t \ge s \ge 0$,

$$\begin{aligned} E[B_t(\varphi) - B_s(\varphi) | \mathcal{F}_s] &= 0 \ , \\ E[(B_t(\varphi) - B_s(\varphi))^2 | \mathcal{F}_s] &= E\left[\int_s^t \varphi_s^2 \, ds \middle| \mathcal{F}_s \right] \ . \end{aligned}$$

Preuve *On montre les deux premières égalités.*

La première se déduit du fait que $\alpha_k\,(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})$ *est le produit de deux variables indépendantes, chacune de carré intégrable et l'une d'entre elle d'espérance nulle.*

Pour démontrer la seconde équation, pour $k < \ell$, *on pose*

$$\xi_{k\ell} = \alpha_k\,(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})\,\alpha_\ell\,(B_{t\wedge t_{\ell+1}} - B_{t\wedge t_\ell})$$

Comme produit de deux variables de carré intégrable et indépendantes, $\alpha_k\,(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})$ *est de carré intégrable. Donc* $\alpha_k\,(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})\,\alpha_\ell$ *est intégrable et* $\mathcal{F}_{t_\ell}$*–mesurable (car* $t_{k+1} \le t_\ell$*), elle est donc indépendante de la variable intégrable et centrée* $B_{t\wedge t_{\ell+1}} - B_{t\wedge t_\ell}$. *Par conséquent,* $E\xi_{k\ell}$ *pour* $k < \ell$*mais également pour* $k > \ell$. *On en déduit :*

$$\begin{aligned} E\left(\left|\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k\,(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})\right|^2\right) &= E\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^2\,(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})^2 \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E[\alpha_k^2]\,E[(B_{t\wedge t_{k+1}} - B_{t\wedge t_k})^2] \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} E[\alpha_k^2]\,[t\wedge t_{k+1} - t\wedge t_k] = E\int_0^t \varphi_s^2\,ds\ . \end{aligned}$$

□

D'après le lemme, $B(\varphi)$ *est une* martingale continue, *donc d'après la Proposition 1.5.10, pour tout* $T > 0$,

$$E\left(\sup_{0\le t\le T} B_t(\varphi)^2\right) \le 4\,E\int_0^T \varphi_s^2\,ds\ . \tag{2.4}$$

2.1.3 Intégrale des processus de $M^2(0,T)$

On considère l'opérateur linéaire

$$\begin{array}{rccl} B: & \mathcal{E} & \longrightarrow & L^2(\Omega, \mathcal{C}([0,T])) \\ & \varphi & \longrightarrow & B(\varphi) \end{array}$$

défini par

$$B_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s\,dB_s\ , \quad 0 \le t \le T\ .$$

Il s'agit d'un opérateur continu puisque l'équation (2.4) s'écrit également

$$\|B\varphi\|_{L^2(\Omega,\mathcal{C}([0,T]))} \le 2\ \|\varphi\|_{M^2(0,T)}\ .$$

Comme $\mathcal{E}$ *est dense dans* $M^2(0,T)$, *on peut prolonger* B *de manière unique en une application linéaire continue* B *définie sur* $M^2(0,T)$ *à valeurs dans* $L^2(\Omega, \mathcal{C}([0,T]))$. *Cette application sera également notée* $B_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s\,dB_s$.

La proposition suivante découle immédiatement du Lemme 2.1.7

Proposition 2.1.8 *Soit $\varphi \in M^2$, $B(\varphi)$ est une martingale continue qui vérifie, pour tout $t \geq s \geq 0$,*

$$\begin{aligned} E[B_t(\varphi)] &= 0 , \\ E[B_t(\varphi)^2] &= E \int_0^t \varphi_s^2 \, ds \end{aligned}$$

pour tout $t \geq 0$. Plus généralement, pour tout $t \geq s \geq 0$

$$E[(B_t(\varphi) - B_s(\varphi))^2 | \mathcal{F}_s] = E\left[\int_s^t \varphi_s^2 \, ds \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

et donc, par linéarité de $\varphi \to B_t(\varphi)$, pour tout φ, $\psi \in M^2$ et tout $t \geq s \geq 0$

$$E\left[(B_t(\varphi) - B_s(\varphi)) (B_t(\psi) - B_s(\psi)) \middle| \mathcal{F}_s \right] = E\left[\int_s^t \psi_s \, \varphi_s \, ds \middle| \mathcal{F}_s \right]$$

Proposition 2.1.9 *Soit $\varphi \in M^2(\mathbb{R}^+)$, alors $B_t(\varphi) \to B_\infty(\varphi) \triangleq \int_{\mathbb{R}}^{+} \varphi_s \, dB_s$ p.s et dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to \infty$.*

Preuve *D'après la Proposition 2.1.8*

$$E[(B_t(\varphi) - B_s(\varphi))^2] = E \int_s^t \varphi_s^2 \, ds \to 0$$

quand s, $t \to \infty$. Donc $B_t(\varphi)$ converge dans $L^2(\Omega)$ quand $t \to \infty$. La limite p.s. se déduit de l'inégalité

$$P\left(\sup_{r \geq t} |B_r(\varphi) - B_t(\varphi)| > \varepsilon \right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \, E \int_t^\infty \varphi_s^2 \, ds$$

qui est une conséquence de (2.4). □

Exercice 2.1.10 *Soit $h : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ continue à support compact, alors on on peut intervertir l'intégrale de Itô et celle de Lebesgue dans la formule*

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \left(\int_0^t \mathbf{1}_{]x,\infty[}(B_s) dB_s \right) dx \quad = \int_0^t \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(x) \mathbf{1}_{]x,\infty[}(B_s) dx \right) dB_s \quad p.s. \tag{2.5}$$

2.1.4 Intégrale des processus de $M_{loc}^2(0, T)$

Pour définir l'intégrale stochastique $B(\varphi)$ pour $\varphi \in M_{loc}^2$ (ou $M_{loc}^2(0, T)$), on considère le temps d'arrêt

$$\tau_n = \inf\left\{ t \geq 0 \, ; \, \int_0^t \varphi_s^2 \, ds > n \right\} \ .$$

Il est clair que $t \mapsto \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(t)$ *est progressivement mesurable (ce résultat est vrai pour tout temps d'arrêt), on en déduit que* $\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}\,\varphi \in M^2(\mathbb{R}^+)$. *On peut donc définir, pour tout* n,

$$B_t^n(\varphi) \triangleq B_t(\mathbf{1}_{[0,\tau_n]}\,\varphi) = \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(t)\,\varphi_t\,dB_t \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Nous allons maintenant montrer que, pour tout $T > 0$, $B_t^n(\varphi)$ *converge presque sûrement, uniformément en* $t \in [0,T]$. *Cette limite est notée*

$$B_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s\,dB_s \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Cette convergence se déduit du fait que $\tau_n \uparrow \infty$ *p.s., et du*

Lemme 2.1.11 *Soit* $\varphi \in M^2$ *et* τ *un temps d'arrêt. Alors* $\mathbf{1}_{[0,\tau]}\,\varphi \in M^2$ *et p.s.*

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s)\,\varphi_s\,dB_s = \int_0^{t\wedge\tau} \varphi_s\,dB_s \ , \quad t \geq 0 \ . \tag{2.6}$$

En effet, si $n \leq m$ *alors* $\tau_n \leq \tau_m$, *en appliquant le Lemme 2.1.11 à* $\mathbf{1}_{[0,\tau_m]}\,\varphi$ *et* τ_n,

$$B_t^n(\varphi) = \int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)\,\mathbf{1}_{[0,\tau_m]}(s)\,\varphi_s\,dB_s = \int_0^{t\wedge\tau_n} \mathbf{1}_{[0,\tau_m]}(s)\,\varphi_s\,dB_s$$

et ce dernier terme ne dépend pas de $m \geq n$. *Soit* $T > 0$ *fixé. Sur l'événement* $\Omega_n = \{\tau_n \geq T\}$, *la suite* $\{B_t^m(\varphi)\,;\, 0 \leq t \leq T\}$, $m = n, n+1, \ldots$, *est constante, donc égale à sa limite. On a le résultat cherché en notant que* $\Omega_n \uparrow \Omega$ *p.s.*

Preuve du Lemme 2.1.11 *Dans (2.6) on peut remplacer* τ *par* $t \wedge \tau$ *qui est un temps d'arrêt borné. Pour tout* n, *on pose* $t_k^n = k\,2^{-n}$, $k = 1, \ldots, N = \sup\{k\,;\, t_k^n < t\}$ *et* $t_{N+1}^n = t$, *alors*

$$\tau_n(\omega) \triangleq \sum_{k=1}^{N+1} \mathbf{1}_{A_k^n}\,t_k^n \ , \quad \text{avec } A_k^n \triangleq \{t_{k-1}^n < t \wedge \tau \leq t_k^n\}$$

alors $\{\tau_n\}$ *est une suite décroissante de temps d'arrêt qui converge presque sûrement vers* $t \wedge \tau$.

Il suffit donc de vérifier que pour tout n

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[\tau_n,t]}(s)\,\varphi_s\,dB_s = \int_{t\wedge\tau_n}^t \varphi_s\,dB_s$$

qui se ramène à montrer que

$$\int_{t_k^n}^t \mathbf{1}_{A_k^n}\,\varphi_s\,dB_s = \mathbf{1}_{A_k^n} \int_{t\wedge\tau_n}^t \varphi_s\,dB_s$$

c'est à dire, pour tout $0 \leq s \leq t$, $A \in \mathcal{F}_s$, $\varphi \in M^2$

$$\int_s^t \mathbf{1}_A \, \varphi_r \, dB_r = \mathbf{1}_A \int_s^t \varphi_r \, dB_r$$

mais

$$\begin{aligned} E & \left(\left(\int_s^t \mathbf{1}_A \, \varphi_r \, dB_r - \mathbf{1}_A \int_s^t \varphi_r \, dB_r \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ & = \mathbf{1}_A \, E \left(\left(\int_s^t [\mathbf{1}_A - 1] \, \varphi_r \, dB_r \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) + \mathbf{1}_{A^c} \, E \left(\left(\int_s^t \mathbf{1}_A \, \varphi_r \, dB_r \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right) \\ & = \mathbf{1}_A \, E \left(\int_s^t \mathbf{1}_{A^c} \, \varphi_r^2 \, dr \middle| \mathcal{F}_s \right) + \mathbf{1}_{A^c} \, E \left(\int_s^t \mathbf{1}_A \, \varphi_r^2 \, dr \middle| \mathcal{F}_s \right) = 0 \ . \end{aligned}$$

□

Exercice 2.1.12 *(Identités de Wald)* *Soit* B *un* $\mathcal{F}_t$ *mouvement brownien standard et* τ *un* $\mathcal{F}_t$ *temps d'arrêt tel que* $E\tau < \infty$.

Montrer que

$$EB_\tau = 0 \ , \quad EB_\tau^2 = E\tau \ .$$

[On pourra utiliser le Lemme 2.1.11.]

Remarque 2.1.13 *Soit* $\varphi \in M^2_{loc}(0,T)$, $B(\varphi)$ *est un processus continu et* $\mathcal{F}_t$*–adapté. Le résultat du Lemme 2.1.11 s'étend à* $M^2_{loc}(0,T)$, *par contre* Φ_t peut ne pas être intégrable *et par conséquent les propriétés de la Proposition 2.1.8 ne sont plus nécessairement vraies.*

Proposition 2.1.14 *Soit* $\varphi \in M^2_{loc}(0,T)$, *il existe un processus continu*

$$B_t(\varphi) = \int_0^t \varphi_s \, dB_s \ , \quad 0 \leq t \leq T \ ,$$

tel que $B^n_t(\varphi) \triangleq B_{t \wedge \tau_n}(\varphi)$, *avec* $\tau_n = \inf\{t \, ; \, \int_0^t \varphi_s^2 \, ds > n\}$, *soit une* $\mathcal{F}_t$*–martingale vérifiant*

$$E[(B^n_t(\varphi) - B^n_s(\varphi))^2 | \mathcal{F}_s) = E \left(\int_{s \wedge \tau_n}^{t \wedge \tau_n} \varphi_u^2 \, du \middle| \mathcal{F}_s \right) \ , \quad 0 \leq s \leq t \leq T \ .$$

$B_t(\varphi)$ *n'est pas nécessairement intégrable mais*

$$E[B_t(\varphi)^2] \leq E \int_0^t \varphi_s^2 \, ds \ . \tag{2.7}$$

Si $\varphi \in M^2(\mathbb{R}^+)$ *alors* $B_t(\varphi) \to B_\infty(\varphi) \triangleq \int_{\mathbb{R}^+} \varphi_s \, dB_s$ *p.s., quand* $t \to \infty$.

Preuve *La première partie de la proposition découle de la construction de l'intégrale stochastique sur* $M^2_{loc}(0,T)$*. L'inégalité (2.7) est évidente: soit le membre de droite est fini et* $\varphi \in M^2(0,T)$*, soit il est infini est l'inégalité est triviale.*

Soit $\varphi \in M^2(\mathbb{R}^+)$*, posons* $B^n_\infty = \int_0^{\tau_n} \varphi_s \, dB_s$*. On définit* $B_\infty = B^n_\infty$ *sur* $\Omega_n = \{\tau_n = \infty\}$*.* $\Omega_n \uparrow \Omega$*, la preuve se déduit donc de la Proposition (2.1.9).* □

Proposition 2.1.15 *Soit* $\varphi \in M^2_{loc}(0,T)$*. Pour tout a,* $M > 0$*,*

$$P\left(\sup_{0 \le t \le T} |B_t(\varphi)| > a\right) \le \frac{1}{a^2} E\left(M \wedge \int_0^T |\varphi_t|^2 \, dt\right) + P\left(\int_0^T |\varphi_t|^2 \, dt > M\right) .$$

Preuve *On définit le temps d'arrêt*

$$\tau_M \triangleq \begin{cases} \inf\{t \le T\,;\, \int_0^t |\varphi_s|^2 \, ds \ge M\} \ , & si \ \int_0^T |\varphi_s|^2 \, ds \ge M \ , \\ T \ , & si \ \int_0^T |\varphi_s|^2 \, ds < M \ . \end{cases}$$

On pose $\varphi^M_t = \varphi_t \, \mathbf{1}_{[0,\tau_M]}(t)$*. On a*

$$\left\{\int_0^T |\varphi_s|^2 \, ds \le M\right\} \subset \left\{\sup_{0 \le t \le T} \left|B_t(\varphi - \varphi^M)\right| = 0\right\}$$

d'où

$$\left\{\sup_{0 \le t \le T} \left|B_t(\varphi - \varphi^M)\right| > 0\right\} \subset \left\{\int_0^T |\varphi_s|^2 \, ds > M\right\}$$

et ainsi

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{0 \le t \le T} |B_t(\varphi)| > a\right) &= P\left(\sup_{0 \le t \le T} |B_t(\varphi^M) + B_t(\varphi - \varphi^M)| > a\right) \\ &\le P\left(\sup_{0 \le t \le T} |B_t(\varphi^M)| > a\right) + P\left(\sup_{0 \le t \le T} |B_t(\varphi - \varphi^M)| > 0\right) \\ &\le P\left(\sup_{0 \le t \le T} |B_t(\varphi^M)| > a\right) + P\left(\left|\int_0^T |\varphi_s|^2 \, ds\right| > M\right) . \end{aligned}$$

On conclue en notant que

$$P\left(\sup_{0 \le t \le T} |B_t(\varphi^M)| > a\right) \le \frac{1}{a^2} E \int_0^T |\varphi_t|^2 \, \mathbf{1}_{[0,\tau_M]}(t) \, dt \le \frac{1}{a^2} E\left(M \wedge \int_0^T |\varphi_t|^2 \, dt\right)$$

(utiliser la Proposition 1.5.10). □

De cette dernière proposition, on déduit aisément le

Théorème 2.1.16 *Soit* φ^n *une suite de* $M^2_{loc}(0,T)$ *et* $\varphi \in M^2_{loc}(0,T)$*. Si*

$$\int_0^T |\varphi^n_t - \varphi_t|^2 \, dt \longrightarrow 0 \quad \textit{en probabilité.}$$

Alors

$$\sup_{0 \le t \le T} |B_t(\varphi^n) - B_t(\varphi)| \longrightarrow 0 \quad \textit{en probabilité.}$$

Théorème 2.1.17 (Inégalités de Burkholder–Davis–Gundy) *Soit B un mouvement brownien réel standard. Pour tout $p > 0$, il existe $C_p > 0$ tel que, pour tout $\varphi \in M^2_{loc}$*

$$\frac{1}{C_p} E\left[\left(\int_{\mathbb{R}}^{+} \varphi_t^2 \, dt\right)^{p/2}\right] \leq E\left[\sup_{t \geq 0} |B_t(\varphi)|^p\right] \leq C_p \, E\left[\left(\int_{\mathbb{R}}^{+} \varphi_t^2 \, dt\right)^{p/2}\right] . \tag{2.8}$$

Pour une démonstration de ce résultat voir Revuz–Yor *[20] pp. 151–161. La deuxième inégalité, pour $p > 2$, fait l'objet de l'exercice suivante :*

Exercice 2.1.18 *(Inégalité de Burkholder–Gundy) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ un mouvement brownien réel standard, $\varphi \in M^2(0,T)$ et $p > 2$ tel que*

$$E\left[\left(\int_0^T \varphi_t^2 \, dt\right)^{p/2}\right] < \infty . \tag{2.9}$$

Poser $X_t = \int_0^t \varphi_s \, dB_s$ et, après avoir développé $|X_t|^p$ à l'aide de la formule de Itô, montrer qu'il existe $C_p > 0$ tel que

$$E\left[\sup_{0 \leq t \leq T} \left|\int_0^t \varphi_s \, dB_s\right|^p\right] \leq C_p \; E\left[\left(\int_0^T \varphi_t^2 \, dt\right)^{p/2}\right] . \tag{2.10}$$

[Utiliser une technique de localisation : établir (2.10) en remplaçant φ par $\varphi^n = \varphi \, \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}$ où $\tau_n = \inf\{0 \leq t \leq T \, ; \, |\int_0^t \varphi_s \, dB_s| \vee \int_0^t \varphi_s^2 \, ds \geq n\}$]. Noter que si (2.9) est faux, (2.10) vrai.

2.1.5 Extension au cas vectoriel

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. Soit φ un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^{n \times d}$ (matrices) tel que $\varphi^{ij} \in M^2(0,T)$ ou $M^2_{loc}(0,t)$ ($1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq d$). L'intégrale stochastique $t \mapsto B_t(\varphi)$ est un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^n$ défini par

$$[B_t(\varphi)]_i = \sum_{j=1}^{d} B_t^j(\varphi^{ij}) \ , \quad 1 \leq i \leq n \ , \quad 0 \leq t \leq T \ .$$

Proposition 2.1.19 *Soit φ, $\psi \in [M^2(0,T)]^{n \times d}$, pour tout $0 \leq s \leq t \leq T$,*

$$E\,(\, B_t(\varphi) - B_s(\varphi) |\, \mathcal{F}_s) \;=\; 0 \ , \tag{2.11}$$

$$E\,([B_t(\varphi) - B_s(\varphi)]\,[B_t(\psi) - B_s(\psi)]^* |\, \mathcal{F}_s) \;=\; E\left(\int_s^t \varphi_u \, \psi_u^* \, du \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) \ , \tag{2.12}$$

$$E\,(\langle B_t(\varphi) - B_s(\varphi), B_t(\psi) - B_s(\psi)\rangle |\, \mathcal{F}_s) \;=\; E\left(\int_s^t \mathrm{trace}[\varphi_u \, \psi_u^*] \, du \,\middle|\, \mathcal{F}_s\right) \ . \tag{2.13}$$

2.1.6 Intégrale stochastique de fonctions déterministes

Proposition 2.1.20 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\varphi \in [L^2(0,T)]^{n \times d}$, le processus $B(\varphi)$ est gaussien.*

Preuve *On suppose $d = n = 1$. φ est la limite dans $L^2(0,T)$ d'une suite $\{\varphi^n\}$ de la forme*

$$\varphi_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^n \, \mathbf{1}_{]t_k^n, t_{k+1}^n]}(t)$$

où $\Delta_n = \{t_k^n\}$ est une subdivision de l'intervalle $[0,T]$ telle que $|\Delta_n| \to 0$ et α_k^n sont des constantes de $\mathbb{R}$.

On vérifie aisément que $\varphi \in M^2(0,T)$, $\varphi^n \in \mathcal{E}$ et que $\varphi^n \to \varphi$ dans $M^2(0,T)$. On en déduit, par définition de l'intégrale stochastique dans $M^2(0,T)$, que

$$B_t(\varphi^n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k^n \left(B_{t\wedge t_{k+1}^n} - B_{t\wedge t_k^n}\right) \quad dans\ L^2(\Omega)\ .$$

Ainsi $B_t(\varphi)$ est la limite au sens L^2 d'une suite de variables gaussiennes, on en déduit que $B_t(\varphi)$ est une variable gaussienne (voir Proposition A.1.2).

Avec le même raisonnement, on montre que pour tout n et tout $(t_1, \ldots, t_n) \in [0,T]^n$, le vecteur aléatoire $(B_{t_1}(\varphi), \ldots, B_{t_n}(\varphi))$ est gaussien. Ce qui montre la proposition. □

2.2 Calcul différentiel stochastique

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ un mouvement brownien standard de dimension n.

Définition 2.2.1 *On appelle* processus de Itô, *un processus X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ de la forme*

$$X_t \triangleq X_0 + \int_0^t f_s\, ds + \int_0^t g_s\, dB_s\ , \quad 0 \le t \le T \tag{2.14}$$

où X_0 est un vecteur aléatoire de dimension d et $\mathcal{F}_0$–mesurable, $f \in L^1_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^d)$, $g \in [M^2_{loc}(0,T)]^{d\times n}$. X est un processus continu et $\mathcal{F}_t$–adapté. L'équation (2.14) peut également s'écrire sous forme différentielle

$$dX_t = f_t\, dt + g_t\, dB_t\ , \quad 0 \le t \le T\ .$$

Notation $L^1_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^d)$ *est l'espace des processus φ mesurables et $\mathcal{F}_t$–adaptés à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et tels que $\int_0^T |\varphi_t|\, dt < \infty$ p.s.*

2.2.1 Cas scalaire

Proposition 2.2.2 *Soit $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, alors*

$$\Phi(B_t) = \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(B_s)\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(B_s)\, ds\ , \quad t \ge 0\ .$$

Preuve *Soit $t > 0$ et $\Delta_n = \{t_k^n\}$ une suite de subdivisions de l'intervalle $[0,t]$ avec $|\Delta_n| \to 0$ quand $n \to \infty$. D'après la formule de Taylor, pour tout k, n il existe une variable aléatoire $\theta_k^n \in]t_{k-1}^n, t_k^n[$ tel que*

$$\begin{aligned}
\Phi(B_t) &= \Phi(0) + \sum_{k=1}^n \left(\Phi(B_{t_k^n}) - \Phi(B_{t_{k-1}^n})\right) \\
&= \Phi(0) + \sum_{k=1}^n \Phi'(B_{t_{k-1}^n})\,[B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \Phi''(B_{\theta_k^n})\,[B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}]^2 \\
&= \Phi(0) + \int_0^t \Phi'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(B_s)\,ds\ .
\end{aligned}$$

En effet les deux sommes convergent en probabilité, c'est ce que nous allons montrer maintenant.

On définit $\tau_p = \inf\{t \geq 0\,;\, |B_t| \geq p\}$, $p \in \mathbb{N}$. D'après la Remarque 2.1.5

$$\sum_{k=1}^n \Phi'(B_{t_{k-1}^n})\,\mathbf{1}_{\{t_k^n \leq \tau_p\}}\,[B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}] \to \int_0^{t\wedge\tau_p} \Phi'(B_s)\,dB_s$$

dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=1}^n \Phi'(B_{t_{k-1}^n})\,[B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}] \to \int_0^t \Phi'(B_s)\,dB_s$ en probabilité sur $\Omega_p \stackrel{\triangle}{=} \{\tau_p \geq t\}$ et donc également sur $\Omega = \cup_p \Omega_p$.

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=1}^n [\Phi''(B_{\theta_k^n}) - \Phi''(B_{t_{k-1}^n})]\,[B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}]^2\right| \\
&\qquad \leq \sup_{1\leq k\leq n}\left|\Phi''(B_{\theta_k^n}) - \Phi''(B_{t_{k-1}^n})\right| \sum_{k=1}^n [B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}]^2 \\
&\qquad \leq \sup_{1\leq k\leq n}\ \sup_{t_k^n < t \leq t_{k-1}^n}\left|\Phi''(B_s) - \Phi''(B_{t_{k-1}^n})\right| \sum_{k=1}^n [B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}]^2 \longrightarrow 0
\end{aligned}$$

en probabilité quand $n \to \infty$.

Enfin, comme ci–dessus, pour montrer que

$$\sum_{k=1}^n \Phi''(B_{\theta_k^n})\,[B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}]^2 \longrightarrow \int_0^t \Phi''(B_s)\,dB_s$$

en probabilité, il suffit de montrer que

$$\sum_{k=1}^n \Phi''(B_{\theta_k^n})\,\mathbf{1}_{\{t_k^n \leq \tau_p\}}\,[B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n}]^2 \longrightarrow \int_0^{t\wedge\tau_p} \Phi''(B_s)\,dB_s$$

dans $L^2(\Omega)$. Mais cette dernière convergence est une conséquence immédiate du résultat suivant :

$$E\left[\left(\sum_{k=1}^n \Phi_p''(B_{\theta_k^n})\,[(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 - (t_k^n - t_{k-1}^n)]\right)^2\right]$$

$$= E \sum_{k=1}^{n} \Phi_p''(B_{\theta_k^n})^2 \left[(B_{t_k^n} - B_{t_{k-1}^n})^2 - (t_k^n - t_{k-1}^n)\right]^2$$
$$\leq 2 \sup_{|x|\leq p} |\Phi''(x)|^2 \sum_{k=1}^{n} (t_k^n - t_{k-1}^n)^2 \longrightarrow 0$$

avec la notation $\Phi_p''(x) \triangleq \Phi''(x)\, \mathbf{1}_{\{|x|\leq p\}}$. □

Théorème 2.2.3 (Formule de Itô scalaire) *Soit X un processus de Itô de la forme $X_t = X_0 + \int_0^t f_s\, ds + \int_0^t g_s\, dB_s$ et $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, alors presque sûrement*

$$\Phi(X_t) = \Phi(X_0) + \int_0^t \Phi'(X_s)\, f_s\, ds + \int_0^t \Phi'(X_s)\, g_s\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \Phi''(X_s)\, g_s^2\, ds\ , \quad t \geq 0\ .$$

Preuve *Soit $t > 0$. Il suffit de montrer le résultat dans le cas d'une fonction Φ à support compact. De plus, d'après le Théorème 2.1.16, il est suffisant de démontrer le résultat pour tout fonction g^p d'une suite de M^2_{loc} telle que*

$$\int_0^t |g_s^p - g_s|^2\, ds \to 0 \text{ in probabilité quand } p \to \infty\ .$$

On choisit

$$g_s^p \triangleq \sum_{k=1}^{p-1} g_{p,i}\, \mathbf{1}_{]\frac{k}{p}t,\, \frac{k+1}{p}t]}(s) \quad \text{avec} \quad g_{p,i} \triangleq \left(\left(\frac{p}{t}\int_{\frac{k}{p}t}^{\frac{k+1}{p}t} g_s\, ds\right) \vee p\right) \wedge (-p)$$

avec $p = 2^q$. On peut donc supposer que g est borné et constant sur chaque intervalle $]\frac{k}{2^q}t, \frac{k+1}{2^q}t]$, $k \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$.

Comme pour la démonstration de la Proposition 2.2.2, on utilise la formule de Taylor, on a

$$\begin{aligned}\Phi(X_t) \;&=\; \Phi(X_0) + \sum_{k=1}^{n} \Phi'(X_{t_{k-1}^n}) \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} f_s\, ds + \sum_{k=1}^{n} \Phi'(X_{t_{k-1}^n}) \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} g_s\, dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \Phi''(X_{\theta_k^n})[X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}]^2\ .\end{aligned}$$

Les limites des deux premières sommes sont triviales. Pour le dernier terme, on considère

$$[X_{t_k^n} - X_{t_{k-1}^n}]^2 = \left(\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} f_s\, ds\right)^2 + 2\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} f_s\, ds \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} g_s\, dB_s + \left(\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} g_s\, dB_s\right)^2\ .$$

La somme sur k des deux premiers termes est majorée en valeur absolue par

$$\sup_{1\leq k\leq n} \left|\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} f_s\, ds + \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} g_s\, dB_s\right| \times \int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} |f_s|\, ds$$

qui tend presque sûrement vers 0 quand $n \to \infty$. Il reste donc à étudier la limite de

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi''(X_{\theta_k^n}) \left(\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} g_s \, dB_s \right)^2 ,$$

on peut se limiter à calculer cette limite pour $n = n^\ell$, $\ell \in \mathbb{N}$. Pour $\ell \geq q$, g est constant sur $]t_{k-1}^n, t_k^n]$ puisque g est constant sur $]t_{k-1}^m, t_k^m]$, $m = 2^q$. Donc

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi''(X_{\theta_k^n}) \left(\int_{t_{k-1}^n}^{t_k^n} g_s \, dB_s \right)^2 =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} [\Phi''(X_{\theta_k^n}) - \Phi''(X_{t_k^n})] \, g_{t_k^n}^2 \, [B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}]^2 + \sum_{k=1}^{n} \Phi''(X_{t_k^n}) \, g_{t_k^n}^2 \, [B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}]^2 .$$

De l'uniforme continuité de $t \mapsto \Phi''(X_t)$, de la bornitude de Φ'' et de g, du Théorème 1.2.7, on déduit que le premier terme du membre de droite de cette dernière égalité tend vers 0 en probabilité quand $\ell \to \infty$.

Par ailleurs, une généralisation du Théorème 1.2.7 donne

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi''(X_{t_k^n}) \, g_{t_k^n}^2 \, [(B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n})^2 - (t_{k+1}^n - t_k^n)] \longrightarrow 0 \quad \text{dans } L^2(\Omega) .$$

Enfin, presque sûrement,

$$\sum_{k=1}^{n} \Phi''(X_{t_k^n}) \, g_{t_k^n}^2 \, (t_{k+1}^n - t_k^n) \longrightarrow \int_0^t \Phi''(X_s) \, g_s^2 \, ds .$$

$\square$

Corollaire 2.2.4 (Formule de Itô scalaire) *Sous les hypothèses du Théorème 2.2.3, pour toute fonction $\Phi \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ et tout $0 \leq t \leq T$, on a*

$$\begin{aligned} \Phi(t, X_t) &= \Phi(0, X_0) + \int_0^t \Phi'_s(s, X_s) \, ds + \int_0^t \Phi'_x(s, X_s) \; f_s \, ds + \int_0^t \Phi'_x(s, X_s) \; g_s \, dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^t \Phi''_{x^2}(s, X_s) \; g_s^2 \, ds . \end{aligned} \tag{2.15}$$

Notations *$\mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R})$ est l'espace des fonctions continues $\Phi : (t,x) \mapsto \Phi(t,x) \in \mathbb{R}$, dont les dérivées d'ordre 1 en t et les dérivées jusqu'à l'ordre 2 en x sont continues par rapport à (t,x). $\Phi'_s(s,x)$ est la dérivée de $\Phi(s,x)$ en s.*

2.2.2 Cas vectoriel

On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ un mouvement brownien standard de dimension n.

Théorème 2.2.5 (Formule de Itô vectorielle) *Soit X_0 un vecteur aléatoire de dimension d et $\mathcal{F}_0$–mesurable, $f \in L^1_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^d)$, $g \in [M^2_{loc}(0,T)]^{d\times n}$. On pose*

$$X_t \triangleq X_0 + \int_0^t f_s\, ds + \int_0^t g_s\, dB_s \ . \tag{2.16}$$

X est un processus continu et $\mathcal{F}_t$–adapté.

Pour tout fonction $\Phi \in \mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ et tout $0 \le t \le T$, on a

$$\begin{aligned} \Phi(t,X_t) &= \Phi(0,X_0) + \int_0^t \Phi'_s(s,X_s)\, ds + \int_0^t \Phi'_x(s,X_s)\ f_s\, ds + \int_0^t \Phi'_x(s,X_s)\ g_s\, dB_s \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{trace}[\Phi''_{x^2}(s,X_s)\ g_s\ g_s^*]\, ds \ . \end{aligned} \tag{2.17}$$

Notations

- $\mathcal{C}^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ *est l'espace des fonctions continues $\Phi : (t,x) \mapsto \Phi(t,x)$, dont les dérivées d'ordre 1 en t et les toutes les dérivées jusqu'à l'ordre 2 en x sont continues par rapport à (t,x)*
- $L^1_{\mathcal{F}_t}(0,T;\mathbb{R}^d)$ *est l'espace des processus φ mesurables et $\mathcal{F}_t$–adaptés tels que*

$$\int_0^T |\varphi_t|\, dt < \infty \ , \quad p.s.$$

- Φ'_t *est la dérivée en t, Φ'_x est le vecteur gradient (vecteur ligne) en x et Φ''_t est la matrice des dérivées secondes en x*

$$\varphi'_t(t,x) \triangleq \frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial t} \ , \quad \varphi''_{x^2}(t,x) \triangleq \left[\frac{\partial^2\Phi(t,x)}{\partial x_i\,\partial x_j}\right]_{1\le i,j\le d} \ .$$
$$\varphi'_x(t,x) \triangleq \left[\frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial\Phi(t,x)}{\partial x_d}\right]$$

- M^* *désigne la transposée de M. $\Phi''_{x^2}(s,X_s)\, g_s\, g_s^*$ est une matrice $d\times d$, $[\Phi'_x(s,X_s)]^*\, g_s$ est une matrice $1\times n$ (vecteur ligne).*

Corollaire 2.2.6 *On considère X_0, Y_0 deux variables aléatoires réelles $\mathcal{F}_0$–mesurables, $f, a \in L^1_{\mathcal{F}_t}(0,T)$ et $g, b \in [M^2_{loc}(0,T)]^n$. On pose*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s\, ds + \int_0^t \langle g_s\, ,\, dB_s\rangle \ , \quad Y_t = Y_0 + \int_0^t a_s\, ds + \int_0^t \langle b_s\, ,\, dB_s\rangle$$

alors

$$X_t\,Y_t = X_0\,Y_0 + \int_0^t (X_s\,a_s + Y_s\,f_s)\,ds + \int_0^t \langle X_s\,b_s + Y_s\,g_s\,,\,dB_s\rangle + \int_0^t \langle g_s\,,\,b_s\rangle\,ds$$

qui s'écrit également

$$X_t\,Y_t = X_0\,Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \int_0^t \langle g_s\,,\,b_s\rangle\,ds\ .$$

2.3 Représentation des martingales

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ *un mouvement brownien standard à valeurs dans* $\mathbb{R}^d$ *et* $\mathcal{F}_t^B$ *la filtration naturelle associée.*

Théorème 2.3.1 (Théorème de représentation des martingales) *Soit* $\{M_t\,;\,0\leq t\leq T\}$ *une* $\mathcal{F}_t^B$*–martingale de carré intégrable à valeurs dans* $\mathbb{R}$ *telle que* $M_0 = 0$*. Il existe alors un unique processus* $\varphi\in[M^2(0,T)]^d$ *tel que*

$$M_t = \int_0^t \langle\varphi_s\,,\,dB_s\rangle\ ,\quad 0\leq t\leq T\ .$$

Preuve *On suppose que* $d=1$*.*

L'unicité se déduit aisément du fait que si φ *et* φ' *vérifie le théorème, alors* $E\int_0^T|\varphi_s - \varphi'_s|^2\,ds = 0$*.*

Maintenant, il suffit de montrer qu'il existe alors $\varphi\in M^2(0,T)$ *tel que*

$$M_T = \int_0^T \varphi_s\,dB_s\ . \tag{2.18}$$

En effet, si tel est le cas $M_t = E(M_T|\mathcal{F}_t^B) = \int_0^t\varphi_s\,dB_s$ $(0\leq t\leq T)$*. On considère l'espace vectoriel*

$$\mathcal{H} \stackrel{\triangle}{=} \left\{c + \int_0^T \varphi_s\,dB_s\ ;\ c\in\mathbb{R},\ \varphi\in M^2(0,T)\right\}\subset L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)\ .$$

Puisque $M_T\in L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$*, si on montre que* $\mathcal{H} = L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$*, alors* $M_T\in\mathcal{H}$ *et comme* $EM_T = 0$ *on en déduit que* M_T *est de la forme (2.18). Pour montrer que* $\mathcal{H} = L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$ *on procède en deux étapes :*

Étape 1 : $\mathcal{H}$ *est un sous espace fermé de* $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$*.* *On considère une suite* $h_n = c_n + \int_0^T\varphi_s^n\,dB_s\in\mathcal{H}$ *qui converge vers* h *dans* $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$*. On a donc* $c_n = Eh_n\to Eh$*, on pose* $c = Eh$*. Il reste donc à montrer qu'il existe* $\varphi\in M^2(0,T)$ *tel que*

$$h = c + \int_0^T \varphi_s\,dB_s\ . \tag{2.19}$$

Comme $h_n - c_n = \int_0^T\varphi_s^n\,dB_s$ *converge dans* $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$*,* $\{\varphi^n\}$ *est une suite de Cauchy dans* $M^2(0,T)$*. Ce dernier est un espace de Hilbert (voir Proposition 2.1.3), il existe donc* $\varphi\in M^2(0,T)$ *tel que* $\varphi^n\to\varphi$ *dans* $M^2(0,T)$*. Donc* $\int_0^T\varphi_s^n\,dB_s\to\int_0^T\varphi_s\,dB_s$ *dans* $L^2(\Omega,\mathcal{F}_T^B,P)$*, ce qui prouve (2.19).*

Étape 2 : $\mathcal{H}$ contient un ensemble total dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$. *On considère l'ensemble*

$$\mathcal{K} \triangleq \left\{ \mathcal{E}(\rho) = \exp\left(\int_0^T \rho_t \, dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T \rho_t^2 \, dt \right) \; ; \; \rho \in L^2(0,T) \right\}$$

On note $X_t = \int_0^t \rho_s \, dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \rho_s^2 \, ds$ et $\mathcal{E}_t(\rho) = \exp(X_t)$. On a

$$\mathcal{E}(\rho) = \mathcal{E}_T(\rho) = 1 + \int_0^T \mathcal{E}_t(\rho) \, \rho_t \, dB_t$$

et $\{\mathcal{E}_t(\rho) \, \rho_t \, ; \, 0 \le t \le T\} \in M^2(0,T)$ (voir Exercice 2.3.5). Donc $\mathcal{K} \subset \mathcal{H}$. Le fait que $\mathcal{K}$ soit total dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ est démontré dans la Proposition 2.3.2.

Conclusion $\mathcal{K} \subset \mathcal{H} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$. *D'une part $\mathcal{K}$ est total dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$, d'autre part $\mathcal{H}$ est un sous espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$, d'où $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$.* □

Proposition 2.3.2 *La classe*

$$\mathcal{K} \triangleq \left\{ \mathcal{E}(\rho) = \exp\left(\int_0^T \rho_t \, dB_t - \frac{1}{2} \int_0^T \rho_t^2 \, dt \right) \; ; \; \rho \in L^2(0,T) \right\}$$

est totale dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ (i.e. l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de $\mathcal{K}$ est dense dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$).

Preuve *On montre que l'orthogonal de $\mathcal{K}$ dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ est réduit à $\{0\}$, c'est à dire : si $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$ et $E(Z \, \mathcal{E}(\rho)) = 0$ pour tout $\rho \in L^2(0,T)$ alors $Z = 0$. On fixe $Z \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T^B, P)$.*

Étape 1 $E(Z \, \mathcal{E}(\rho)) = C \, E[Z \, \exp(\int_0^T \rho_t \, dB_f)]$ *où C est une constante non nulle. On suppose donc que*

$$E\left[Z \, \exp\left(\int_0^T \rho_t \, dB_t \right) \right] = 0 \; , \qquad \forall \rho \in L^2(0,T) \; . \tag{2.20}$$

On considère $\rho_t = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{k+1} \, \mathbf{1}_{]t_k, t_{k+1}]}(t)$, avec $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \le T$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. ρ ainsi défini est un élément de $L^2(0,T)$. L'équation (2.20) se réécrit

$$E\left[Z \, \exp\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \, (B_{t_i} - B_{t_{i-1}}) \right) \right] = 0 \; .$$

Donc $E[Z \, \exp(\alpha_1' \, B_{t_1} + \alpha_2' \, B_{t_2} + \cdots + \alpha_n' \, B_{t_n})] = 0$ pour tout $\alpha_1', \ldots, \alpha_n' \in \mathbb{R}$, i.e. si on pose $\chi = [B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}]^*$ (à valeurs dans $\mathbb{R}^n$), on a

$$E[Z \, e^{\langle \alpha, \chi \rangle}] = 0 \; , \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^n \; . \tag{2.21}$$

Étape 2 *Montrons que (2.21) entraîne*

$$E(Z|\chi) = 0 \ p.s. \tag{2.22}$$

$E[Z\, e^{\langle\alpha,\chi\rangle}] = E[E(Z\, e^{\langle\alpha,\chi\rangle|\chi}] = E[E(Z|\chi)\, e^{\langle\alpha,\chi\rangle}] = 0$. *$E(Z|\chi) = h(\chi)$ avec h est une fonction mesurable. On a donc,*

$$E[h^+(\chi)\, e^{\langle\alpha,\chi\rangle}] = E[h^-(\chi)\, e^{\langle\alpha,\chi\rangle}] \ . \tag{2.23}$$

Avec $\alpha = 0$ on obtient $E(h^+(\chi)) = E(h^-(\chi)) = \kappa$. Si $\kappa = 0$ alors on a (2.22), sinon on définit Q^+ et Q^- deux mesures de probabilité sur $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n))$ par

$$Q^+(dx) = \frac{1}{\kappa} h^+(x)\, P_\chi(dx) \ , \quad Q^-(dx) = \frac{1}{\kappa} h^-(x)\, P_\chi(dx) \ .$$

L'équation (2.23) s'écrit donc

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle\alpha,\chi\rangle}\, Q^+(dx) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle\alpha,\chi\rangle}\, Q^-(dx) \quad \forall\alpha \in \mathbb{R}^n \ .$$

Ainsi les transformées de Laplace de Q^+ et Q^- coïncident, on en déduit que $Q^+ = Q^-$, c'est à dire $g^+(x) = g^-(x)$ P_χ–p.p., d'ou $g(\xi) = 0$ p.s., ce qui montre (2.22).

Étape 3 *On montre que (2.20) entraîne $Z = 0$ p.s. On sait que pour tout n et $0 \le t_1 < \cdots < t_n \le T$, on a $E(Z|B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) = 0$. On considère l'algèbre*

$$\mathcal{A} \stackrel{\triangle}{=} \{\sigma(B_{t_1}, \ldots, B_{t_n}) \ ; \ n \ge 1, \ 0 \le t_1 < \cdots < t_n \le T\} \ .$$

On a donc $\int_A Z\, dP = 0$ pour tout $A \in \mathcal{A}$.

Comme $\mathcal{F}_T^B = \sigma(\mathcal{A})$, pour tout $A \in \mathcal{F}_T^B$ il existe une suite $\{A_n\}$ dans $\mathcal{A}$ telle que $P(A\triangle A_n) \to 0$, d'où $\int_A Z\, dP = \lim \int_{A_n} Z\, dP = 0$. Comme Z est $\mathcal{F}_T^B$–mesurable, on a $Z = E(Z|\mathcal{F}_T^B) = 0$ p.s. □

Corollaire 2.3.3 *Soit $T > 0$ et $\xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Il existe alors un unique processus $\varphi \in [M^2(0,T)]^d$ tel que*

$$\xi = E(\xi) + \int_0^T \langle\varphi_t \, , \, dB_t\rangle \ .$$

Preuve *Il suffit de remarquer que*

$$M_t \stackrel{\triangle}{=} E[\xi|\mathcal{F}_t] - E[\xi]$$

est une martingale qui vérifie les hypothèses du Théorème 2.3.1. □

Proposition 2.3.4 *Soit $T > 0$ et $\xi \in L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ pour un $p > 1$ donné. Il existe alors un unique processus $\varphi \in [M^2_{loc}(0,T)]^d$ tel que $E[(\int_0^T |\varphi_t|^2\, dt)^{p/2}] < \infty$ et*

$$\xi = E(\xi) + \int_0^T \langle\varphi_t \, , \, dB_t\rangle \ .$$

Preuve *Supposons qu'un tel φ existe, en combinant les inégalités de Burkholder–Davis–Gundy et de Doob, on obtient, en notant $M_t = \int_0^t \langle \varphi_s, dB_s \rangle$,*

$$E\left[\left(\int_0^T |\varphi_t|^2\,dt\right)^{p/2}\right] \leq C_p\,E\left(\sup_{0\leq t\leq T} |M_t|^p\right) \leq \frac{p}{p-1}\,C_p\,E\left(|\xi - E(\xi)|^p\right)\ . \tag{2.24}$$

L'unicité de φ se déduit de cette inégalité. L'existance découle du Corollaire 2.3.3 et (2.24) dans le cas $p \geq 2$.

Supposons maintenant que $1 < p < 2$. Puisque $L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ est dense dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$, il existe une suite $\{\xi_n\} \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$ telle que $\xi_n \to \xi$ dans $L^p(\Omega, \mathcal{F}_T, P)$. Pour chaque ξ_n, à l'aide du Corollaire 2.3.3, on associe $\varphi^n \in [M^2(0,T)]^d$ tel que

$$\xi_n = E(\xi_n) + \int_0^T \langle \varphi_t^n\,,\,dB_t \rangle\ . \tag{2.25}$$

D'après (2.24),

$$E\left[\left(\int_0^T |\varphi_t^m - \varphi_t^n|^2\,dt\right)^{p/2}\right] \leq C'_p\,E\left(|\xi_m - \xi_n - E(\xi_m - \xi_n)|^p\right)$$

ce qui implique que la suite φ^m est de Cauchy dans l'espace des processus progressivement mesurable dans $L^p(\Omega\,;\,L^2(0,T;\mathbb{R}^d))$ et admet donc une limite. En prenant la limite dans (2.25) on démontre la proposition. □

Exercice 2.3.5 *(Martingales exponentielles) On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ un mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathcal{F}_t^B$ sa filtration naturelle et $\varphi \in L^2(0,T)$. On définit*

$$Z_t \stackrel{\triangle}{=} \exp\left(\int_0^t \varphi_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2\,ds\right) \qquad 0 \leq t \leq T\ .$$

et $X_t = \int_0^t \varphi_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2\,ds$. Montrer que

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s\,\varphi_s\,dB_s \qquad 0 \leq t \leq T\ .$$

[Utiliser la formule de Itô avec $\Psi(x) = \exp(x)$].

Montrer que $Z\,\varphi \in M^2(0,T)$. [Utiliser le fait que, comme φ_t est une fonction déterministe, alors X est un processus gaussien ; calculer la moyenne et la variance de X_t].

On suppose maintenant que $\varphi \in M^2(0,T)$ et qu'il existe $C < \infty$ tel que $|\varphi_t \leq C$ p.s., pour tout $t \in [0,T]$. Monter que ξ satisfait toujours la même équation et que $Z\,\varphi \in M^2(0,T)$ [utiliser une technique de localisation avec $\tau_n = \inf\{t \leq T\,;\,Z_t \geq n\}$ et le Lemme de Gronwall]. En déduire immédiatement que Z est une $\mathcal{F}_t$–martingale. Montrer également que $E(Z_t^p) < \infty$, pour tout $p > 0$ et $0 \leq t \leq T$.

Exemple 2.3.6 *Soit $\varphi \in M^2$, on pose*

$$Z_t = \exp(X_t) \quad \textit{avec} \quad X_t = \int_0^t \varphi_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \varphi_s^2 ds$$

D'après la formule de Itô $dZ_t = Z_t\,\varphi_t\,dB_t$, $Z_0 = 1$.

Avec $\varphi \equiv 1$ on a $Z_t = \exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$ et

$$dZ_t = Z_t\,dB_t\ , \quad Z_0 = 1\ .$$

On peut donc dire que le rôle usuel de la fonction exponentielle, dans le calcul stochastic de Itô, est joué par la fonction $\exp\left(B_t - \frac{t}{2}\right)$.

2.4 Intégrale de Stratonovich

Exercice 2.4.1 *Soit B un mouvement brownien standard $\varepsilon \in [0,1]$ et $\Delta_n = \{t_t^n\}$ une partition de $[0,t]$ telle que $|\Delta_n| \to 0$ quand $n \to \infty$.*

On considère l'approximation :

$$S_n^\varepsilon \stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=0}^{n-1} ((1-\varepsilon)\,B_{t_{k+1}^n} + \varepsilon\,B_{t_k^n})\,(B_{t_k^n} - B_{t_k^n}) \tag{2.26}$$

de l'intégrale stochastique "$\int_0^t B_s\,dB_s$".

Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} S_n^\varepsilon = \frac{1}{2}B_t^2 + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\,t \tag{2.27}$$

(limite dans $L^2(\Omega)$). Le terme de droite de (2.27) est une martingale si et seulement si $\varepsilon = 0$.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ un mouvement brownien standard réel et $t \in [0,T]$ fixé. On se donne une suite de subdivisions $\Delta_n = \{t_k^n\,;\, k = 0, \ldots, n\}$ de l'intervalle $[0,t]$ telle que $|\Delta_n| \to 0$ quand $n \to \infty$. On a

$$\int_0^t B_s\,dB_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k^n}\,[B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}] \quad \textit{dans } L^2(\Omega)\ . \tag{2.28}$$

Considérons la suite

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{\rho_k}\,[B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}] \quad \textit{avec} \quad \rho_k \in [t_k^n, t_{k+1}^n]\ .$$

Contrairement aux sommes de Darboux dans la construction de l'intégrale de Reimann, le choix de l'instant ρ_k dans l'intervalle $[t_k^n, t_{k+1}^n]$ n'est pas indifférent :

- *En prenant $\rho_k = t_k^n$ (i.e. intégrale de Itô), on obtient par exemple*

$$\int_0^t B_s\,dB_s = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k^n}\,[B_{t_{k+1}^n} - B_{t_k^n}] \quad \textit{dans } L^2(\Omega)\ .$$

– *En prenant* $\rho_k = t^n_{k+1}$ *et en utilisant le Théorème 1.2.7, on obtient*

$$t + \int_0^t B_s\,dB_s = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{t^n_{k+1}}\,[B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k}] \quad dans\ L^2(\Omega)\ .$$

Si on considère le choix $\rho_k = t^n_{k+\frac{1}{2}}$ *(avec, par définition,* $t^n_{k+\frac{1}{2}} = (t^n_{k+1} + t^n_k)/2$*), la somme* $\sum_{k=0}^{n-1} B_{t^n_{k+\frac{1}{2}}}\,[B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k}]$ *converge dans* $L^2(\Omega)$ *(voir Exercice 1.2.9) vers une limite appelée* intégrale stochastique de Stratonovich *et notée* $\int_0^t B_s \circ dB_s$ *:*

$$\int_0^t B_s \circ dB_s \triangleq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} B_{t^n_{k+\frac{1}{2}}}\,[B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k}] \quad dans\ L^2(\Omega)\ .$$

On peut montrer (voir Exercice 1.2.9) que

$$B_t^2 = 2\int_0^t B_s \circ dB_s = 2\int_0^t B_s\,dB_s + t\ .$$

Pour montrer cette dernière égalité il suffit de prendre la limite $(n\to\infty)$ *dans*

$$B_t^2 = \sum_{k=0}^{n-1}(B^2_{t^n_{k+1}} - B^2_{t^n_k}) = 2\sum_{k=0}^{n-1} B_{t^n_k}\ (B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k}) + \sum_{k=0}^{n-1}(B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k})^2$$

(car $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b) = 2\,b\,(b-a) + (a-b)^2$*).*

Ainsi le calcul différentiel de Itô [$d(B_t^2) = 2\,B_t\,dB_t + dt$*] n'obéit pas aux règles du calcul différentiel habituel contrairement à l'intégrale de Stratonovich [*$\circ d(B_t^2) = 2\,B_t \circ dB_t$*].*

Ce "petit défaut" de l'intégrale stochastique de Itô est largement contrebalancé par l'une de ses principales qualités : l'intégrale de Itô (des processus de $M^2(0,T)$*) est une martingale. Ce n'est pas le cas de l'intégrale de Stratonovich.*

Exercice 2.4.2 *(Intégrale de Stratonovich)* *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ *un mouvement brownien réel standard,* $\Delta_n = \{t^n_k\}$ *une suite de subdivision de l'intervalle* $[0,t]$ *telle que* $|\Delta_n| \to 0$.

Étant donnés $f,\ g \in M^2(0,T)$ *avec* $|f_t| \vee |g_t| \le C$ *p.s. On pose*

$$Y_t = \int_0^t f_s\,ds + \int_0^t g_s\,dB_s\ , \quad 0 \le t \le T\ .$$

(i) *Développer* $Y_t\,B_t$ *par la formule de Itô.*

(ii) *Montrer que*

$$\sum_{k=0}^{n-1}(Y_{t^n_{k+1}} - Y_{t^n_k})\ (B_{t^n_{k+1}} - B_{t^n_k}) \to \int_0^t g_s^2\,ds \qquad dans\ L^2(\Omega)\ .$$

(iii) Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{Y_{t^n_{k+1}}+Y_{t^n_k}}{2}\,(B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}) \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}Y_{t^n_{k+\frac12}}\,(B_{t^n_{k+1}}-B_{t^n_k}) \;=\; \int_0^t Y_s\,dB_s+\frac12\int_0^t g_s^2\,ds$$

(limites dans $L^2(\Omega)$). On notera $\int_0^t Y_s\circ dB_s$ cette dernière quantité.

(iv) Posons $X_t \triangleq \int_0^t Y_s\circ dB_s$, pour $\Phi\in\mathcal{C}^3_b(\mathbb{R})$, montrer que

$$\Phi(X_t)=\Phi(0)+\int_0^t \Phi'(X_s)\,Y_s\circ dB_s\ ,\qquad 0\le t\le T\ .$$

2.5 Théorème de Girsanov

Soit φ un processus de $[M^2_{loc}]^d$. On pose

$$Z_t \triangleq \exp\left(\int_0^t\langle\varphi_s\,,\,dB_s\rangle-\frac12\int_0^t|\varphi_s|^2\,ds\right)\quad t\ge 0\ . \tag{2.29}$$

À l'aide de la formule de Itô, on montre

$$Z_t=1+\int_0^t\langle Z_s\,\varphi_s\,,\,dB_s\rangle\quad t\ge 0\ . \tag{2.30}$$

Lemme 2.5.1 *Z est une $\mathcal{F}_t$–surmartingale positive et $EZ_t\le 1$. Z est une martingale si et seulement si $EZ_t=1$ pour tout $t\ge 0$*

Preuve *On pose*

$$\tau_n \triangleq \inf\left\{t\ge 0\,;\ Z_t\vee\int_0^t|\varphi_s|^2\,ds\ge n\right\}\ .$$

et $Z^n_t \triangleq Z_{t\wedge\tau_n}$, $t\ge 0$. En utilisant la formule de Itô, comme pour (2.30), il est clair que Z est une martingale. D'après le lemme de Fatou pour l'espérance conditionnelle on a

$$E[Z_t|\mathcal{F}_s]\le Z_s\ ,\quad 0\le s\le t$$

donc Z est une surmartingale. La fonction $t\mapsto EZ_t$ est décroissante avec $EZ_0=1$, l'hypothèse du lemme implique que cette fonction est constante et égale à 1. On en déduit que la variable aléatoire $Z_s-E[Z_t|\mathcal{F}_s]$, $0\le s\le t$, est d'espérance nulle, ce qui démontre le lemme.
□

Théorème 2.5.2 (Girsanov) *Supposons que $EZ_t = 1$ pour tout $t \geq 0$. Alors il existe une probabilité $\bar{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que*

$$\left.\frac{d\bar{P}}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t \ , \quad t \geq 0$$

et le processus $\bar{B}$ défini par

$$\bar{B}_t \triangleq B_t - \int_0^t \varphi_s \, ds \ , \quad t \geq 0$$

est un $\mathcal{F}_t$–$\bar{P}$–mouvement brownien.

Théorème 2.5.3 (Théorème d'extension de Kolmogorov) *Pour tout $t \geq 0$ on considère une probabilité Q_t sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ qui vérifie la propriété de cohérence suivante*

$$Q_t|_{\mathcal{F}_s} = Q_s \ , \quad 0 \leq s \leq t \ .$$

Alors il existe une unique probabilité Q sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que $Q|_{\mathcal{F}_t} = Q_t$ pour tout $t \geq 0$.

Preuve du Théorème 2.5.2 *Les hypothèses du Théorème 2.5.2 assurent que $dQ_t \triangleq Z_t \, dP|_{\mathcal{F}_t}$ défini, pour tout $t \geq 0$, une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$. Par hypothèse et d'après le Lemme 2.5.1, la condition de cohérence du Théorème 2.5.3 est satisfaite. Donc pour démontrer le Théorème 2.5.2, il suffit de vérifier que $\{\bar{B}\,;\, 0 \leq s \leq t\}$ est un mouvement brownien sous la loi définie par $dQ_t = Z_t \, dP$.*

On note E_{Q_t} la probabilité associé à la probabilité Q_t. Il suffit de démontrer que pour tout n, $0 < t_1 < \cdots < t_n \leq t$ et $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^d$, on a

$$E_{Q_t} \exp\left(i \sum_{j=1}^n \langle u_j, \bar{B}_{t_j}\rangle\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j,k \leq n} \langle u_j, u_k\rangle \, (t_j \wedge t_k)\right) \ ,$$

c'est à dire

$$E\left[Z_t \exp\left(i \sum_{j=1}^n \langle u_j, \bar{B}_{t_j}\rangle\right)\right] = \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{1 \leq j,k \leq n} \langle u_j, u_k\rangle \, (t_j \wedge t_k)\right) \ , \tag{2.31}$$

Supposons, dans un premier temps qu'il existe $C \geq 0$ tel que $\int_0^t |\varphi_s|^2 \, ds \leq C$ p.s. On pose $\psi_s = \varphi_s + i \sum_{j=1}^p u_j \, \mathbf{1}_{[0,t_j]}(s)$. Alors $\int_0^t |\psi_s|^2 \, ds \leq \bar{C}$ p.s et on vérifie aisément (par une généralisation immédiate de l'Exercice 2.3.5) que

$$E\left[\exp\left(\int_0^t \langle \psi_s \, , \, dB_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi_s|^2 \, ds\right)\right] = 1 \tag{2.32}$$

ce qui montre (2.31).

On pose

$$\tau_n \triangleq \inf\left\{t \geq 0\,;\, Z_t \vee \int_0^t |\varphi_s|^2\,ds \vee \int_0^t |\psi_s|^2\,ds \geq n\right\}\ ,$$

et on utilise les notations équivalentes à celles du Lemme 2.5.1. D'après la première partie de la démonstration

$$E\left[\exp\left(\int_0^t \langle \psi_s^n\,,\, dB_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi_s^n|^2\,ds\right)\right] = 1\ .$$

Par ailleurs

$$\exp\left(\int_0^t \langle \psi_s^n\,,\, dB_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t |\psi_s^n|^2\,ds\right)$$
$$= Z_t^n\,\exp\left[i\sum_{j=1}^p \left\langle u_j\,,\, B_{t_j} - \int_0^{t_j} \varphi_s^n\,ds\right\rangle + \frac{1}{2}\sum_{1\leq j,k\leq p} \langle u_j, u_p\rangle \times (t_j \wedge t_k)\right]\ .$$

D'après la Proposition A.1.4 $Z_t^n \to Z_t$ dans $L^1(\Omega)$. Le deuxième terme de membre de droite de cette dernière équation converge p.s. et son module est borné indépendamment de ω et de n. Ainsi le produit converge dans $L^1(\Omega)$, d'où (2.32) ce qui prouve (2.31) et démontre le théorème. □

Remarque 2.5.4 *Le Théorème de Girsanov 2.5.2 a été énoncé pour $t \in \mathbb{R}^+$. C'est ce qui nous a contraint à utiliser le Théorème d'extension de Kolmogorov 2.5.3. On peut, naturellement, se limiter à un horizon fini. Supposons qu'il existe $T > 0$ et $\varphi \in [M_{loc}^2(0,T)]$ tels que $EZ_T = 1$, alors $\{Z_t\,;\, 0 \leq t \leq T\}$ est une martingale et il existe une probabilité $\bar{P}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ définit par $d\bar{P} = Z_T\,dP$ et $\{\bar{B}_t\,;\, 0 \leq t \leq T\}$ est une $\mathcal{F}_t$–$\bar{P}$–mouvement brownien.*

Proposition 2.5.5 (Formule de Bayes) *Soit $0 \leq t \leq T < \infty$ fixés et $\xi \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_T, \bar{P})$. Supposons que Z est une $\mathcal{F}_t$–P–martingale. Alors $\xi\, Z_T \in L^1(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ et*

$$\bar{E}[\xi|\mathcal{F}_t] = \frac{E[\xi\, Z_T|\mathcal{F}_t]}{Z_t}\ ,\quad P \text{ et } \bar{P} \text{ p.s.} \tag{2.33}$$

Preuve *La première affirmation est évidente. Comme $Z_t > 0$ P–p.s., le terme de droite de (2.33) est bien défini p.s. Il suffit maintenant d'établir le résultat pour $\xi \geq 0$. Soit η une v.a.r. positive et $\mathcal{F}_t$ mesurable,*

$$\begin{aligned}\bar{E}[\eta\,\xi] &= E[\eta\,\xi\, Z_T]\\ &= E\left[\eta\, E(\xi\, Z_T|\mathcal{F}_t)\right]\\ &= \bar{E}\left[\eta\,\frac{1}{Z_t}\,E(\xi\, Z_T|\mathcal{F}_t)\right]\ .\end{aligned}$$

□

Il existe quelques critères qui assurent que $EZ_t = 1$, $t \geq 0$, et donc que Z est martingale. Cette dernière condition assure la validité du Théorème de Girsanov. La condition la plus faible est donnée par la

Proposition 2.5.6 (Critère de Novikov) *Soit $\varphi \in [M^2_{loc}(0,T)]^d$, si*

$$E \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T |\varphi_t|^2 \, dt\right) < \infty \tag{2.34}$$

alors $EZ_T = 1$.

Preuve *On note $Z_t = Z_t(\varphi)$ et, pour tout $a > 0$,*

$$\tau_a \triangleq \inf\left\{t \leq T \, ; \int_0^t \langle \varphi_s \, , \, dB_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t |\varphi_s|^2 \, ds = -a\right\} \wedge T \ .$$

Soit $\lambda \leq 0$, on montre

$$EZ_{\tau_a}(\lambda\,\varphi) = 1 \ . \tag{2.35}$$

On a $EZ_{\tau_a}(\lambda\,\varphi) = 1 + \lambda \int_0^{\tau_a} Z_s(\lambda\,\varphi)\,\varphi_s \, dB_s$, il suffit donc de montrer que

$$E\int_0^{\tau_a} Z_s^2(\lambda\,\varphi)\,\varphi_s^2 ds < \infty \ . \tag{2.36}$$

Par hypothèse

$$E\int_0^{\tau_a} \varphi_s^2 ds \leq 2\,E\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^{\tau_a} \varphi_s^2 ds\right) \leq 2\,E\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^T \varphi_s^2 ds\right) < \infty \ . \tag{2.37}$$

Par ailleurs, pour $\lambda \leq 0$ et $0 \leq s \leq \tau_a$,

$$\begin{aligned}
Z_s(\lambda\,\varphi) &= \exp\left(\lambda\int_0^s \varphi_u \, dB_u - \frac{\lambda^2}{2}\int_0^s \varphi_u^2 \, du\right) \\
&= \exp\left(\lambda\left[\int_0^s \varphi_u \, dB_u - \frac{1}{2}\int_0^s \varphi_u^2 \, du\right]\right)\ \exp\left(\left[\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right]\int_0^s \varphi_u^2 \, du\right) \\
&\leq \exp\left(\lambda\left[\int_0^s \varphi_u \, dB_u - \frac{1}{2}\int_0^s \varphi_u^2 \, du\right]\right) \leq \exp(|\lambda|\,a) \ .
\end{aligned}$$

Donc, pour $0 \leq s \leq \tau_a$, $Z_s(\lambda\,\varphi) \leq \exp(|\lambda|\,a)$ et (2.36) se déduit de (2.37).

Il faut montrer (2.35) pour $\lambda \leq 1$. On définit $\rho_{\tau_a}(\lambda\,\varphi) = e^{\lambda\,a}\,Z_{\tau_a}(\lambda\,\varphi)$. Si $\lambda \leq 0$, d'après (2.35)

$$E\rho_{\tau_a}(\lambda\,\varphi) = e^{\lambda\,a} \ . \tag{2.38}$$

Posons

$$A \triangleq \int_0^{\tau_a} \varphi_s^2 \, ds \ , \quad B \triangleq \int_0^{\tau_a} \varphi_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^{\tau_a} \varphi_s^2 \, ds + a \geq 0 \ .$$

On définit la fonction $u(z) = \rho_{\tau_a}(\lambda\,\varphi)$ *avec* $\lambda = 1 - \sqrt{1-z}$ *(si* $0 \le z \le 1$ *alors* $0 \le \lambda \le 1$*). On a*

$$u(z) = \exp\left(\frac{z}{2}\,A + (1-\sqrt{1-z})\,B\right) \ .$$

Pour $z < 1$*, p.s. la fonction* $u(z)$ *peut s'écrire*

$$u(z) = \sum_{k\ge 0} \frac{z^k}{k!}\,p_k$$

avec $p_k \ge 0$ *p.s..*

Si $z \le 1$*, d'après le Lemme 2.5.1,* $Eu(z) \le \exp(a\,(1-\sqrt{1-z}))$ *et donc, pour tout* $0 \le z_0 < 1$*,* $Eu(z_0) < \infty$*. On en déduit que pour tout* $|z| \le z_0$*,*

$$E\sum_{k\ge 0} \frac{|z|^k}{k!}\,p_k \le E\sum_{k\ge 0} \frac{z_0^k}{k!}\,p_k = Eu(z_0) < \infty \ ,$$

et par le théorème de Fubini, pour tout $|z| < 1$*,*

$$Eu(z) = E\sum_{k\ge 0} \frac{z^k}{k!}\,p_k = \sum_{k\ge 0} \frac{z^k}{k!}\,Ep_k \ . \tag{2.39}$$

Avec $z < 1$*,* $\exp(a\,(1-\sqrt{1-z})) = \sum_{k\ge 0} z^k\,c_k/k!$ *où* $c_k \ge 0$*. On en déduit, avec (2.38) et (2.39), pour* $-1 < z \le 0$*, que*

$$\sum_{k\ge 0} \frac{z^k}{k!}\,Ep_k = \sum_{k\ge 0} \frac{z^k}{k!}\,c_k$$

et donc $Ep_k = c_k$ *et ainsi, pour* $0 \le z < 1$*,* $Eu(z) = \sum_{k\ge 0} \frac{z^k}{k!}\,c_k = \exp(a\,(1-\sqrt{1-z}))$*. Ce qui montre l'Équation (2.38) pour tout* $z < 1$*. Comme* A *et* B *sont non négatifs p.s., on a*

$$\rho_{\tau_a}(\lambda\,\varphi) = \exp\left(\lambda\,B + \left(\lambda - \frac{\lambda^2}{2}\right)\,A\right) \uparrow \rho_{\tau_a}(\varphi) \quad \textit{quand} \quad \lambda \uparrow 1 \ .$$

Par convergence monotone et (2.38), $E\rho_{\tau_a}(\varphi) = \lim_{\lambda\uparrow 1} E\rho_{\tau_a}(\lambda\,\varphi) = \lim_{\lambda\uparrow 1}\exp(\lambda\,a) = e^a$ *et par conséquent* $EZ_{\tau_a}(\varphi) = 1$*.*

En conclusion

$$\begin{aligned} 1 &= EZ_{\tau_a}(\varphi) = E(Z_{\tau_a}(\varphi)\,\mathbf{1}_{\{\tau_a<T\}}) + E(Z_{\tau_a}(\varphi)\,\mathbf{1}_{\{\tau_a=T\}}) \\ &= E(Z_{\tau_a}(\varphi)\,\mathbf{1}_{\{\tau_a<T\}}) + E(Z_T(\varphi)\,\mathbf{1}_{\{\tau_a=T\}}) \end{aligned}$$

donc

$$EZ_T(\varphi) = 1 - E(Z_{\tau_a}(\varphi)\,\mathbf{1}_{\{\tau_a<T\}}) + E(Z_T(\varphi)\,\mathbf{1}_{\{\tau_a<T\}})$$

mais $\mathbf{1}_{\{\tau_a<T\}} \to 0$ *p.s. et* $EZ_T(\varphi) \le 1$ *donc* $E(Z_T(\varphi)\,\mathbf{1}_{\{\tau_a<T\}}) \to 0$*. De plus, sur l'ensemble* $\{\tau_a < T\}$ *:*

$$Z_{\tau_a}(\varphi) = \exp\left(-a + \frac{1}{2}\int_0^{\tau_a} \varphi_s^2\,ds\right) \le \exp\left(-a + \frac{1}{2}\int_0^{T} \varphi_s^2\,ds\right)$$

on en déduit $E(Z_{\tau_a}(\varphi)\,\mathbf{1}_{\{\tau_a<T\}}) \le e^{-a}\,E\exp(\frac{1}{2}\int_0^T \varphi_s^2\,ds) \to 0.$ □

Proposition 2.5.7 *(*Lipster–Shiryayev [18], pp. 220–222*) Soit* $\varphi \in [M^2_{loc}(0,T)]^d$*, si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(i) $|\varphi_t| \le K < \infty$*, p.s.,* $0 \le t \le T$ *;*

(ii) $\varphi \perp\!\!\!\perp B$ *;*

(iii) $\sigma\{\varphi_v\,;\, v \le u+\varepsilon\} \perp\!\!\!\perp \sigma\{B_v - B_s\,;\, s \le v \le t\}$ *pour tout* $0 \le u \le s \le t \le T$ *et* $\varepsilon > 0$ *;*

(iv) il existe $\delta > 0$ *tel que* $E\exp(\delta\,\varphi_t) < \infty$*,* $0 \le t \le T$ *;*

alors le critère de Novikov (2.34) est vérifié et on peut utiliser le Théorème de Girsanov (car $EZ_T = 1$*).*

Le critère (iv) de la précédente proposition s'applique dans le cas gaussien suivant :

Exemple 2.5.8 *Supposons que* φ *est un processus gaussien tel que*

$$E|\varphi_t| + \mathrm{Var}(\varphi_t) < \infty\ , \quad 0 \le t \le T\ .$$

Alors en prenant $\delta < [2\,\sup_{t\le T}\mathrm{Var}(\varphi_t)]^{-1}$ *alors*

$$E\exp(\delta\,|\varphi_t|^2) \le \sup_{t\le T}\exp\left(\frac{\delta\,(E\varphi_t)^2}{1-2\,\delta\,\mathrm{Var}(\varphi_t)}\right)\times\left(1-2\,\delta\,\mathrm{Var}(\varphi_t)\right)^{-1/2} < \infty\ .$$

Remarque 2.5.9 *Plaçons–nous sur l'espace canonique* $\Omega = \mathcal{C}([0,T];\mathbb{R}^d)$ *muni de sa tribu borélienne* $\mathcal{F}$*. Sur* $(\Omega,\mathcal{F})$ *on considère* P *la* mesure de Wiener*, i.e. la loi de probabilité d'un processus d'un mouvement brownien standard (voir Exercice 1.1.11). Soit* $X_t(\omega) = \omega(t)$ *(processus canonique) et* $\mathcal{F}_t$ *la filtration telle que* X *soit un* $\mathcal{F}_t$ *mouvement brownien. Si* φ *est un processus* $\mathcal{F}_t$*–adapté et borné, il existe une loi de probabilité* $\bar{P}$ *sur* $(\Omega,\mathcal{F})$ *telle que* $\bar{X}$ *définit par*

$$\bar{X}_t = X_t - \int_0^t \psi_s\,ds$$

soit un $\bar{P}$*–mouvement brownien.*

Par définition de $(\Omega,\mathcal{F})$ *et* X*, pour toute mesure de probabilité* Q *sur* $(\Omega,\mathcal{F})$*, la loi du processus* X *sur* $(\Omega,\mathcal{F},Q)$ *est* Q*. Donc* P *est la loi d'un mouvement brownien (mesure de Wiener) et* $\bar{P}$ *est la loi de la somme d'un mouvement brownien et d'une intégrale stochastique. Le théorème de Girsanov nous dit en particulier que ces deux lois sont équivalentes (i.e. possèdent les mêmes ensembles de mesure nulle). Ce résultat est cohérent avec le fait que, pour la loi d'un mouvement brownien (comme pour la loi de la somme d'un mouvement brownien et d'une intégrale de Lebesgue), l'ensemble des fonctions continues dont la variation quadratique sur* $[0,t]$ *est* t *(pour tout* $t \in [0,T]$*) est de mesure 1.*

Par contre, les lois d'un mouvement brownien et du processus $\{\int_0^t g_s\,dB_s\,;\, 0 \le t \le T\}$ *ne sont pas équivalentes dès qu'il existe* $t \in [0,T]$ *tel que* $P(\int_0^t g_s^2\,ds \ne t) > 0$*.*

Remarque 2.5.10 *Le critère de Novikov est, d'une certaine façon, génériquement le plus fin. En effet la condition*

$$E\exp\left(\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\int_0^T \varphi_s^2\,ds\right)<\infty$$

n'implique pas nécessaire que $EZ_T=1$ et ce quelque soit $\varepsilon>0$. L'exemple suivant le prouve.

Proposition 2.5.11 *On pose*

$$\tau_\varepsilon \triangleq \{t\leq T\,;\,B_t-(1-\varepsilon)\,t=-a\}$$

avec $0<\varepsilon<1/2$ et $a>0$.

On a

$$E\exp\left(\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\int_0^T \mathbf{1}^2_{[0,\tau_\varepsilon]}(s)\,ds\right)=E\exp\left(\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon\right)<\infty \tag{2.40}$$

mais

$$E\exp\left(B_{\tau_\varepsilon}-\frac{1}{2}\,\tau_\varepsilon\right)<1\ . \tag{2.41}$$

Preuve *On pose*

$$\tau_\varepsilon^n \triangleq \inf\{t\leq T\,;\,n\leq B_t\leq -a+(1-\varepsilon)\,t\}$$

et on vérifie que

$$E\exp\left(\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\tau_\varepsilon^n\right)=v_n(0)\ , \tag{2.42}$$

où

$$v_n(x)\triangleq \frac{e^{-2\varepsilon n}-e^{-(1-2\varepsilon)a-n}}{e^{-(a+2\varepsilon n)}-e^{-(1-2\varepsilon)a}}\,e^x+\frac{e^{-(a+n)}-1}{e^{-(a+2\varepsilon n)}-e^{-(1-2\varepsilon)a}}\,e^{(1-2\varepsilon)x}$$

est solution de l'équation différentielle

$$v_n''(x)-2\,(1-\varepsilon)\,v_n'(x)+(1-2\,\varepsilon)\,v_n(x)=0\quad\text{avec}\quad v_n(-a)=v_n(n)=1\ .$$

Pour prouver (2.42), on considère la fonction $v_n(x)\,e^{(1/2-\varepsilon)t}$, d'après la formule de Itô

$$v_n(X_{\tau_\varepsilon^n})\,\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,\tau_\varepsilon^n\right]=v_n(0)+\int_0^{\tau_\varepsilon^n} v_n'(X_s)\,\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,s\right]\,dB_s$$

où $X_t\triangleq B_t-(1-\varepsilon)\,t$. De même, pour tout $N\geq 0$,

$$v_n(X_{\tau_\varepsilon^n\wedge N})\,\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,(\tau_\varepsilon^n\wedge N)\right]=v_n(0)+\int_0^{\tau_\varepsilon^n\wedge N} v_n'(X_s)\,\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,s\right]\,dB_s\ .$$

Donc, puisque pour $-a\leq x\leq n$ la fonction $v_n'(x)$ est bornée,

$$E\int_0^{\tau_\varepsilon^n\wedge N} v_n'(X_s)\,\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,s\right]\,dB_s=0$$

et donc

$$E\left\{v_n(X_{\tau_\varepsilon^n \wedge N})\, \exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,(\tau_\varepsilon^n \wedge N)\right]\right\} = v_n(0)\ . \tag{2.43}$$

Comme $0 < \inf_{-a\le x\le n} v_n(x) < \sup_{-a\le x\le n} v_n(x) < \infty$, *on a*

$$E \exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,(\tau_\varepsilon^n \wedge N)\right] \le \frac{v_n(0)}{\inf_{-a\le x\le n} v_n(x)} < \infty\ .$$

En passant à la limite ($N \to \infty$), *on déduit*

$$E \exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,\tau_\varepsilon^n\right] \le \frac{v_n(0)}{\inf_{-a\le x\le n} v_n(x)}\ .$$

De cette inégalité et de

$$v_n(X_{\tau_\varepsilon^n})\, \exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,(\tau_\varepsilon^n \wedge N)\right] \le \sup_{-a\le x\le n} v_n(x)\, \exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,\tau_\varepsilon^n\right]$$

on déduit qu'il est possible de passer à la limite ($N \to \infty$) *dans l'équation (2.43) dans la mesure où* $v_n(X_{\tau_\varepsilon^n}) = 1$ *p.s. Ceci démontre donc (2.42). En prenant la limite* ($n \to \infty$), *on obtient (2.40).*

Enfin, notons que

$$\exp[B_{\tau_\varepsilon} - \tau_\varepsilon/2] = \exp[B_{\tau_\varepsilon} - (1-\varepsilon)\tau_\varepsilon]\exp\left[\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,\tau_\varepsilon\right] = \exp\left[-a\left(\frac{1}{2}-\varepsilon\right)\,\tau_\varepsilon\right]$$

d'où l'on déduit, à l'aide de (2.40), que $E\exp[B_{\tau_\varepsilon} - \tau_\varepsilon/2] = \exp[-2\,a\,\varepsilon] < 1$, *c'est à dire (2.41).* □

2.6 Exercices supplémentaires

Exercice 2.6.1 *Soit* B *un mouvement brownien, on pose*

$$\tau = \inf\{0 \le t \le 1\,;\ t + B_t^2 = 1\}$$

et

$$X_t = \begin{cases} -\dfrac{2}{(1-t)^2}\, B_t \mathbf{1}_{\{t\le\tau\}}\,, & 0 \le t < 1 \\ 0\,, & t = 1\ . \end{cases}$$

(i) *Montrer que* $P(\tau < 1) = 1$ *et donc que* $\int_0^1 X_t^2 dt < \infty$ *p.s.*

(ii) *Appliquer la formule de Itô au processus :* $\{(B_t/(1-t))^2\,;\ 0 \le t < 1\}$ *pour montrer que*

$$\int_0^1 X_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^1 X_s^2 ds = -1 - 2\int_0^\tau \left(\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t)^3}\right) B_t^2 dt \le -1\ .$$

(iii) La surmartingale exponentielle

$$Z_t(X) = \exp\left(\int_0^t X_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s^2 ds\right)$$

n'est pas une martingale, pourtant, pour tout $n \geq 1$, *et* $\sigma_n = 1 - (1/\sqrt{n})$, *le processus* $\{Z_{t\wedge\sigma_n}(X)\,;\ 0 \leq t \leq 1\}$ *est une martingale.*

Exercice 2.6.2 *Soit* B *un mouvement brownien et*

$$S_t = \sup_{s\leq t} B_s\ .$$

Soit f *une fonction de classe* $\mathcal{C}^2$, *montrer que*

$$N_t^f \triangleq f(S_t) - (S_t - B_t)f'(S_t)$$

est une martingale locale.

Soit g *une fonction borélienne bornée sur tout compact de* $\mathbb{R}$ *et*

$$G(x) = \int_0^x g(u)du\ .$$

Montrer que $G(S_t)-(S_t-B_t)g(S_t)$ *est une martingale locale (on peut utiliser un argument de classe monotone).*

Exercice 2.6.3 *Soit* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ *un mouvement brownien réel standard. On pose*

$$\mathrm{signe}(x) \triangleq 1 \text{ si } x > 0\,,\ -1 \text{ sinon.}$$

Montrer que l'intégrale stochastique

$$X_t \triangleq \int_0^t \mathrm{signe}(B_s)\, dB_s$$

est bien définie et que X *est un mouvement brownien standard mais que* (X, B) *n'est pas un mouvement brownien à valeurs dans* $\mathbb{R}^2$. *[*(X, B) *n'est pas gaussien car* X_t *et* B_t *sont non corrélés mais non indépendants].*

2.7 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 2.1.10 *Supposons que* h *est à support dans* $[0, b]$, *posons*

$$D_n = \left\{b_k^n = \frac{k}{2^n}\,b\,;\ k = 0, \ldots, 2^n\right\}\,,\ n \geq 1\ .$$

D_n *est une partition de* $[0, b]$. *On choisit une modification de* $\int_0^t M_{]x,\infty[}(B_s)dB_s$ *qui est continue en* x. *L'intégrale de Lebesgue (ou Reimann) du terme de gauche de (2.5) est approchée par la somme :*

$$\sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{b}{2^n} h(b_k^n) \int_0^t \mathbf{1}_{]b_k^n,\infty[}(B_s)dB_s = \int_0^t F_n(B_s)dB_s$$

où la suite de fonctions :

$$F_n(x) \triangleq \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{b}{2^n} h(b_k^n) \mathbf{1}_{]b_k^n,\infty[}(x)$$

est uniformément bornée et converge, quand $n \to \infty$, vers l'intégrale de Lebesgue (ou Reimann) :

$$F(x) \triangleq \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \mathbf{1}_{]y,\infty[}(x) dy \ .$$

Donc la suite $\left\{ \int_0^t F_n(B_s) dB_s \ ; \ n \geq 1 \right\}$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers $\int_0^t F(B_s) dB_s$ qui est le terme de droite de (2.5). □

Solution de l'Exercice 2.1.12 *Le processus $\{\mathbf{1}_{[0,\tau]}(t) \ : \ t \geq 0\}$ est progressivement mesurable et*

$$P\left(\int_0^\infty \mathbf{1}^2_{[0,\tau]}(s) ds < \infty \right) = P\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) ds < \infty \right) = P(\tau < \infty) = 1 \ .$$

Donc $\{M_{[0,\tau]}(t) \ ; \ t \geq 0\}$ est un élément de $M^2_{loc}(\mathbb{R}^+)$. Par ailleurs

$$\int_0^t \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) dB_s = \int_0^{t\wedge\tau} dB_s = B_{t\wedge\tau} \ .$$

Donc

$$B_\tau = \int_0^\tau \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) dB_s \ .$$

On a

$$E \int_0^\infty \mathbf{1}^2_{[0,\tau]}(S) = \int_0^\infty E(\mathbf{1}_{[0,\tau]}(s))\, ds = E\tau < \infty \ .$$

Donc

$$\begin{aligned} EB_\tau &= E \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) dB_s = 0 \\ EB_\tau^2 &= E\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,\tau]}(s) dB_s \right)^2 = E \int_0^\infty \mathbf{1}^2_{[0,\tau]}(s) ds = E\tau \ . \end{aligned}$$

□

Solution de l'Exercice 2.1.18 *Dans toute la démonstration C_p désignera une constante strictement positive ne dépendant que de p.*

On pose

$$\tau_n \triangleq \inf \left\{ t \leq T \ ; \ \left| \int_0^t \varphi_s \, dB_s \right| \vee \int_0^t \varphi_s^2 \, ds \geq n \right\} \wedge T$$

et $\varphi_t^n = \varphi_t \, \mathbf{1}_{[0,\tau_n]}(s)$. On a $\varphi^n \in M^2(0,T)$, on peut donc, en utilisant le lemme de Fatou, supposer que $\varphi \in M^2(0,T)$ et que X est une martingale.

D'après la formule de Itô

$$|X_t|^p = p \int_0^t \mathrm{signe}(X_s) \, |X_s|^{p-1} \, \varphi_s \, dB_s + \frac{p\,(p-1)}{2} \int_0^t |X_s|^{p-2} \, |\varphi_s|^2 \, ds \ .$$

donc, en prenant l'épérance et faisant tendre $n \to \infty$, on obtient à l'aide du Lemme de Fatou,

$$\begin{aligned}
\|X_T\|_p^p &= C_p\, E \int_0^T |X_s|^{p-2}\, |\varphi_s|^2\, ds \\
&\leq C_p\, E \left(\sup_{t \leq T} |X_t|^{p-2} \int_0^T |\varphi_s|^2\, ds \right) \\
&\leq C_p \left\| \sup_{t \leq T} |X_t|^{p-2} \right\|_{\frac{p}{p-2}} \left\| \int_0^T |\varphi_s|^2\, ds \right\|_{\frac{p}{2}} .
\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\varphi \in M^2(0,T)$, le processus $X = B(\varphi)$ est donc une martingale et d'après l'inégalité de Doob

$$\left\| \sup_{t \leq T} |X_t|^{p-2} \right\|_p \leq \frac{p}{p-1}\, \|X_T\|_p .$$

On en déduit

$$\|X_T\|_p^p \leq C_p\, \|X_T\|_{\frac{p}{p-2}} \left\| \int_0^T |\varphi_s|^2\, ds \right\|_{\frac{p}{2}}$$

ce qui démontre le résultat cherché. □

Solution de l'Exercice 2.4.1 *La première partie est triviale puisque*

$$S_n^\varepsilon \stackrel{\triangle}{=} \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_{k+1}^n}\, (B_{t_k^n} - B_{t_k^n}) + \varepsilon \sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_k^n} - B_{t_k^n})^2$$

Le premier terme du membre de gauche tend vers $\int_0^t B_s\, dB_s = \frac{1}{2}\,(B_t^2 - t)$ dans $L^2(\Omega)$, le second vers $\varepsilon\, t$ p.s.

On pose $X_t = \frac{1}{2}\, B_t^2 + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right)\, t$. Soit $0 \leq s \leq t$,

$$\begin{aligned}
E(X_t \,|\, X_u\,;\; u \leq s) &= \frac{1}{2} E \left(B_t^2 \left| \frac{B_u^2}{2} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) u\,;\; u \leq s \right.\right) + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) t \\
&= \frac{1}{2} E \left(E(B_t^2 \,|\, B_u\,;\; u \leq s) \left| \frac{B_u^2}{2} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) u\,;\; u \leq s \right.\right) + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) t \\
&= E(B_t^2 - t | B_u\,;\; u \leq s) + t \\
&= B_s^2 - s + t
\end{aligned}$$

(d'après le théorème de caractérisation de Levy), donc

$$\begin{aligned}
E(X_t | \mathcal{F}_s^X) &= \frac{1}{2} E \left(t - s + B_s^2 \left| \frac{B_u^2}{2} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) u\,;\; u \leq s \right.\right) + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) t \\
&= \frac{t-s}{2} + \left(\varepsilon - \frac{1}{2}\right) t + \frac{B_s^2}{2} \\
&= X_s + \varepsilon\,(t - s)
\end{aligned}$$

donc X une martingale si et seulement si $\varepsilon = 0$. Ce cas correspond à l'intégrale de Itô. Avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$, on obtient l'intégral de Stratonovich, qui satisfait les règles habituelles du calcul différentielle telles que $\int_0^t B_s\, o dB_s = \frac{1}{2} B_t^2$.

Enfin pour $\varepsilon = 1$, on obtient l'intégrale de Itô rétrograde (voir McKean (1969), p.35). La sensibilité de la limite (2.27) respectivement au paramètre ε est due au fait que les trajectoires du mouvement brownien sont à variations non bornées. □

Solution de l'Exercice 2.6.3 *Posons $\varphi_s = signe\,(B_s)$, $\varphi \in M^2$ puisque, pour tout $T > 0$,*

$$E \int_0^T \varphi_s^2 ds = E \int_0^T 1 ds = T < \infty \ .$$

Donc X est bien défini. Par ailleurs X est une martingale est on pose $Y_t = X_t^2 - t$. Soit $0 \leq s \leq t$

$$\begin{aligned}
E(Y_t|\mathcal{F}_s) &= E\left(\left(\int_0^t \varphi_u dB_u\right)^2 \middle| \mathcal{F}_s\right) - t \\
&= E\left(\left(\int_0^s \varphi_u dB_u\right)^2 + \left(\int_s^t \varphi_u dB_u\right)^2 + 2\int_s^t \varphi_u dB_u \int_0^s \varphi_u dB_u \middle| \mathcal{F}_s\right) - t \\
&= \left(\int_0^s \varphi_u dB_u\right)^2 + E\left(\left(\int_s^t \varphi_u dB_u\right)^2\right) + 2E\left(\int_s^t \varphi_u dB_u\right)\int_0^s \varphi_u dB_u - t \\
&= X_s^2 + (t-s) - t \\
&= X_s^2 - s = Y_s \quad p.s.
\end{aligned}$$

Donc d'après le théorème de caractérisation de Levy, X est un mouvement brownien.

On a

$$B_t\, X_t = \int_0^t \mathrm{signe}(B_s)\, dB_s + \int_0^t |B_s|\, dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{signe}(B_s)\, ds \ .$$

Donc

$$E(B_t\, X_t)\frac{1}{2}\int_0^t E\mathrm{signe}(B_s)\, ds = 0 \ .$$

Ce qui montre que B et X sont non corrélés. Maintenant soit $s < t$, l'événement $A = \{B_u\,;\, s \leq u \leq t\}$ est $\mathcal{F}_t^B$ mesurable, mais

$$E\left[(X_t - X_s)\,\mathbf{1}_A\right] = E\left[\int_s^t \mathrm{signe}(B_u)\, dB_u\, \mathbf{1}_A\right] = E\left[(B_t - B_s)\,\mathbf{1}_A\right] > 0$$

en revanche si X et B avaient été indépendants :

$$E\left[(X_t - X_s)\,\mathbf{1}_A\right] = E(X_t - X_s)\, E(B_u\,;\, s \leq u \leq t) = 0$$

ce qui est contradicatoire. □

Solution de l'Exercice 2.6.1 *Posons $Y_t = t + B_t^2$, Y est un processus continue, $Y_0 = 0$, $Y_1 = 1 + B_1^2 \geq 1$ et $P(B_1^2 = 0) = 0$, donc pour tout ω p.s., $Y_1 > 1$, il existe donc $\rho(\omega) < 1$ tel que $Y_{\rho(\omega)} = 1$, ce qui montre que $P(\tau < 1) = 1$.*

Par ailleurs, pour $t \leq \tau$, $B_t^2 < 1 - t$. On en déduit

$$\int_0^1 X_t^2\, dt = 4\int_0^1 \frac{B_t^2}{(1-t)^4}\,\mathbf{1}_{t\leq\tau}\, dt \leq 4\int_0^\tau \frac{1}{(1-t)^3}\, dt < \infty \ .$$

D'après la formule de Itô avec $\varphi(t,x) = (x/(1-t))^2$

$$\frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial t} = \frac{2\,x^2}{(1-t)^3}\,,\quad \frac{\partial \varphi(t,x)}{\partial x} = \frac{2\,x}{(1-t)^2}\,,\quad \frac{\partial^2 \varphi(t,x)}{\partial x^2} = \frac{2}{(1-t)^2}\ .$$

$$d\varphi(t,B_t) = +\frac{2\,B_t^2}{(1-t)^3}\,dt + \frac{2\,B_t}{(1-t)^2}\,dB_t + \frac{1}{(1-t)^2}\,dt$$

Donc

$$\varphi(\tau,B_\tau) - \varphi(0,B_0) = +\int_0^\tau \frac{2\,B_t^2}{(1-t)^3}\,dt + \int_0^\tau \frac{2\,B_t}{(1-t)^2}\,dB_t + \int_0^\tau \frac{1}{(1-t)^2}\,dt$$

c'est à dire, par définition de τ *et de* X,

$$\frac{1}{1-\tau} - 0 = +\int_0^\tau \frac{2\,B_t^2}{(1-t)^3}\,dt - \int_0^1 X_t\,dB_t + 1 - \frac{1}{1-\tau}$$

i.e.

$$\frac{1}{1-\tau} - 0 = +\int_0^\tau \frac{2\,B_t^2}{(1-t)^3}\,dt - \int_0^1 X_t\,dB_t - 1 + \frac{1}{1-\tau}$$

i.e.

$$\int_0^1 X_t\,dB_t - \frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2\,dt + \int_0^\tau \frac{2\,B_t^2}{(1-t)^3}\,dt - 1$$

i.e.

$$\int_0^1 X_t\,dB_t - \frac{1}{2}\int_0^1 X_t^2\,dt = -2\int_0^\tau \left[\frac{1}{(1-t)^4} - \frac{1}{(1-t)^3}\right] B_t^2\,dt - 1 \leq -1\ .$$

On a donc $Z_t(X) \leq e^{-1} < 1$, *donc,* $E[Z_t(X)|\mathcal{F}_0] < 1$, *mais* $Z_0(X) = 1$, *donc* $Z(X)$ *n'est pas une martingale. On pose* $\sigma_n = 1 - 1/\sqrt{n}$ *et on considère*

$$Z_{t\wedge\sigma_n}(X) = Z_t(X^n)$$

avec

$$X_t^n \triangleq X_t\,\mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_n\wedge\tau\}} = -\frac{2}{(1-t)^2}\,B_t\,\mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_n\wedge\tau\}}\ .$$

Le critère de Novikov est satisfait puisque

$$\int_0^1 |X_t^n|^2\,dt = \int_0^1 \frac{4}{(1-t)^4}\,B_t^2\,\mathbf{1}_{\{t\leq\sigma_n\wedge\tau\}}\,dt \leq \int_0^{\sigma_n} \frac{4}{(1-t)^3}\,dt$$

qui est une constante finie. □

Solution de l'Exercice 2.6.2 *Si* f *est de classe* $\mathcal{C}^2$, *soit*

$$F(x,y) = f(y) - (y-x)f'(x)\ .$$

La formule de Itô permet d'écrire

$$\begin{aligned} F(B_t,S_t) &= f(0) + \int_0^t f'(S_s)dB_s - \int_0^t f''(S_s)(S_s-B_s)dS_s \\ &= f(0) + \int_0^t f'(S_s)dB_s \end{aligned}$$

car la mesure dS_s est portée par l'ensemble $\{s\,;\ S_s = B_s\}$ et $\{M_t^f\}$ est une martingale locale.

Pour tout $a > 0$, notons

$$\tau_a \stackrel{\triangle}{=} \inf\{t \geq 0\,;\ S_t \geq a\}$$

$\{M_{t\wedge a}^f\,;\ t \geq 0\}$ est une martingale locale.

Soit $a > 0$, notons $\tau = \tau_a$, et $\mathcal{H}_a$ l'espace vectoriel des fonctions boréliennes bornées g telles que

$$M_{t\wedge\tau}^g = G(S_{t\wedge\tau}) - (S_{t\wedge\tau} - B_{t\wedge\tau})g(S_{t\wedge\tau}),$$

soit une martingale. $\mathcal{H}_a$ contient l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $\{g_a\}$ une suite de $\mathcal{H}_a$ et g une fonction borélienne sur $[0,a]$. On a

$$(G_n(S_{t\wedge\tau}) - G(S_{t\wedge\tau}))^2 \leq S_{t\wedge\tau}\int_0^{t\wedge\tau}(g_n(u) - g(u))^2 du$$

et $E(S_{t\wedge\tau})^2 \leq 4E(B_{t\wedge\tau}^2) = E(t\wedge\tau) \leq 4t$.

Donc, dès que $g_n \to g$ sur $[0,a]$, la suite étant uniformément bornée sur $[0,a]$, on a

$$\begin{array}{rcl} g_n(S_{t\wedge\tau}) & \to & g(S_{t\wedge\tau}) \\ G_n(S_{t\wedge\tau}) & \to & G(S_{t\wedge\tau}) \end{array}$$

dans $L^2(\Omega)$. Cela implique

$$M_{t\wedge\tau}^{g_n} \to M_{t\wedge\tau}^g$$

dans $L^2(\Omega)$ et l'espérance conditionnelle étant un opérateur continue L^2, $g \in \mathcal{H}_a$.

En particulier : si $g_a \to g$ uniformément sur $[0,a]$, $g \in \mathcal{H}_a$ donc $\mathcal{H}_a$ contient les fonctions continues sur $[0,a]$.

On termine avec un argument de classe monotone. □

Chapitre 3

Équations différentielles stochastiques

3.1 Existence et unicité

Hypothèses 3.1.1 *On se donne*

(*i*) $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ *un mouvement brownien standard à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$ *;*

(*ii*) ξ *un vecteur aléatoire à valeurs dans* $\mathbb{R}^n$*, de carré intégrable et* $\mathcal{F}_0$*–mesurable (et donc indépendant du mouvement brownien* B*);*

(*iii*) *deux applications*

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \ni (t,x) \mapsto f(t,x) \in \mathbb{R}^d \ , \\ g &: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \ni (t,x) \mapsto g(t,x) \in \mathbb{R}^{d\times n} \ . \end{aligned}$$

On note $|f| = (\sum_{i=1}^d f_i^2)^{1/2}$, $|g| = (\mathrm{trace}(g\,g^*))^{1/2}$*. On suppose qu'il existe une constante* K *telle que pour tout* $t \geq 0$, $x, y \in \mathbb{R}^d$ *:*

$$|f(t,0)| + |g(t,0)| \leq K \ , \tag{3.1}$$

$$|f(t,x) - f(t,y)| + |g(t,x) - g(t,y)| \leq K\,|x-y| \ . \tag{3.2}$$

Les hypothèses (3.1) et (3.2) impliquent que f *et* g *sont à croissance au plus linéaire :*

$$|f(t,x)| + |g(t,x)| \leq K\,(1+|x|) \ . \tag{3.3}$$

*On considère l'équation différentielle stochastique (*EDS*)*[1]

$$X_t = \xi + \int_0^t f(s,X_s)\,ds + \int_0^t g(s,X_s)\,dB_s \ , t \geq 0 \ . \tag{3.4}$$

Dans (3.4), le coefficient de "ds", i.e. $f(s,X_s)$*, s'appelle le* coefficient de dérive*, celui de "*dB_s*", i.e.* $g(s,X_s)$*, s'appelle le* coefficient de diffusion.

1. Si $g \equiv 0$, l'EDS (3.4) devient une e.d.o. (équation différentielle ordinaire). La condition de Lipschitz (3.2) assure l'existence et l'unicité d'une solution et l'hypothèse (3.1) permet d'étendre cette solution à tout $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^d$, on désigne par $X^{s,x} = \{X_t^{s,x} \,;\, t \geq 0\}$ le processus solution de l'équation

$$X_t^{s,x} = x + \int_s^{t \vee s} f(r, X_r^{s,x})\, dr + \int_s^{t\vee s} g(r, X_r^{s,x})\, dB_r \ , \quad t \geq 0 \ . \tag{3.5}$$

On note $X^x = X^{0,x}$. Étant donnée une variable aléatoire ξ $\mathcal{F}_0$–mesurable et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, on désigne par $X^{s,\xi}$, le processus : $X_t^{s,\xi}(\omega) = X_t^{s,\xi(\omega)}(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Théorème 3.1.2 *Sous les Hypothèses 3.1.1, il existe une unique solution $X \in [M^2]^d$ à l'*EDS *(3.4).*

Preuve *On définit une application $\Phi : [M^2]^d \mapsto [M^2]^d$ par*

$$\Phi(U)_t \triangleq \xi + \int_0^t f(s, U_s)\, ds + \int_0^t g(s, U_s)\, dB_s \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

avec $U \in [M^2]^d$. D'après les Hypothèses 3.1.1, on a $\Phi(U) \in [M^2]^d$. Ainsi, une solution de (3.4) est un point fixe de l'application Φ. Nous allons déduite l'existence et l'unicité d'un point unique du fait que, pour tout $T > 0$, Φ est une contraction stricte de $[M^2(0,T)]^d$ muni de la norme

$$\| U \|_\beta \triangleq \left(E \int_0^T e^{-\beta t}\, |U_t|^2\, dt \right)^{1/2}$$

pour β suffisamment grand.

Soit U, $U' \in [M^2]^d$, posons $\bar{U} = U - U'$, $\bar{f}_t = f(t, U_t) - f(t, U'_t)$, $\bar{g}_t = g(t, U_t) - g(t, U'_t)$, $\bar{\Phi}_t = \Phi(U)_t - \Phi(U')_t$. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}$, on développe $e^{-\beta t}\, |\bar{\Phi}_t|^2$ par la formule de Itô :

$$e^{-\beta T}\, |\bar{\Phi}_T|^2 = -\beta \int_0^T e^{-\beta t}\, |\bar{\Phi}_t|^2\, dt + 2 \int_0^T e^{-\beta t}\, \langle \bar{\Phi}_t \,,\, \bar{f}_t\, dt + \bar{g}_t\, dB_t \rangle + \int_0^T e^{-\beta t}\, \mathrm{trace}(\bar{g}_t\, \bar{g}_t^*)\, dt \ .$$

Comme U, $U' \in [M^2]^d$, on peut prendre l'espérance dans cette dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned}
\beta \, \| \bar{\Phi} \|_\beta^2 &\leq 2E \int_0^T e^{-\beta t}\, \langle \bar{\Phi}_t, \bar{f}_t \rangle\, dt + E \int_0^T e^{-\beta t}\, \mathrm{trace}(\bar{g}_t\, \bar{g}_t^*)\, dt \\
&\leq E \int_0^T e^{-\beta t}\, |\bar{\Phi}_t|^2\, dt + E \int_0^T e^{-\beta t}\, |\bar{f}_t|^2\, dt + E \int_0^T e^{-\beta t}\, |\bar{g}_t|^2\, dt \\
&\leq E \int_0^T e^{-\beta t}\, |\bar{\Phi}_t|^2\, dt + 2\, K^2\, E \int_0^T e^{-\beta t}\, |\bar{U}_t|^2\, dt = \| \bar{\Phi} \|_\beta^2 + 2\, K^2 \, \| \bar{U} \|_\beta^2 \ .
\end{aligned}$$

Avec $\beta = 1 + 4\, K^2$, on obtient $\| \Phi(U) - \Phi(U') \|_\beta^2 \leq \frac{1}{2} \| U - U' \|_\beta^2$, ce qui prouve le théorème. □

Exercice 3.1.3 *(EDS linéaires)* *On considère le processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution de l'*EDS *linéaire à coefficients constants :*

$$dX_t = F\, X_t\, dt + G\, dB_t \ , \quad X_0 = \xi \ , \tag{3.6}$$

où F et G sont des constantes, B est un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien et ξ est $\mathcal{F}_0$–mesurable.

En s'inspirant des équations différentielles ordinaires (formule de variation de la constante), déterminer $\Phi(t)$ la solution fondamentale de (3.6), i.e. la solution de l'équation

$$\frac{d}{dt}\Phi(t) = F\,\Phi(t)\ , \quad \Phi(0) = 1\ , \tag{3.7}$$

et montrer que

$$X_t = \Phi(t)\,\xi + \Phi(t)\int_0^t [\Phi(s)]^{-1}\,G\,dB_s$$

est la solution de (3.6).

(*i*) *Étendre le résultat précédent au cas de l'équation*

$$dX_t = (F\,X_t + f)\,dt + G\,dB_t\ , \quad X_0 = \xi\ ,$$

où f est une constante.

(*ii*) *Étendre le résultat précédent au cas des coefficients non constants, i.e. $F(t)$, $f(t)$ et $G(t)$ sont des fonctions mesurables de t.*

(*iii*) *Étendre le résultat précédent au cas multidimensionnel : X [resp. B] est à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ [resp. $\mathbb{R}^n$], $F(t)$, $f(t)$ et $G(t)$ sont des matrices $\mathbb{R}^{d\times d}$, $\mathbb{R}^d$ et $\mathbb{R}^{d\times n}$.*

(*iv*) *Supposer que ξ admet une loi gaussienne. Vérifier que le processus X est gaussien : $X_t \sim N(\mu(t), R(t))$. Écrire l'équation de $\mu(t)$ et $R(t)$ (en dimension 1 dans un premier temps).*

Exercice 3.1.4 *(Processus d'Ornstein–Ulhenbeck) On considère le processus X à valeurs dans $\mathbb{R}$ solution de l'EDS linéaire à coefficients constants :*

$$dX_t = -\alpha\,X_t\,dt + \beta\,dB_t\ , \quad X_0 = \xi\ , \tag{3.8}$$

où α et β sont des constantes, B est un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien et ξ est une variable $\mathcal{F}_0$–mesurable. On suppose que $\alpha > 0$.

(*i*) *Montrer que la solution de (3.8) est donnée par*

$$X_t = e^{-t\alpha}\,\xi + \int_0^t e^{-(t-s)\,\alpha}\,\beta\,dB_s\ , \quad t \geq 0\ .$$

(*ii*) *En déduire que si ξ est une variable gaussienne, alors X est un processus gaussien d'espérance et de fonction de covariance[2] données par*

$$\begin{aligned} \mu(t) &\triangleq E(X_t) = e^{-t\alpha}\,E(\xi)\ , \\ R(t+\delta, t) &\triangleq Cov(X_{t+\delta}, X_t) = e^{-(t+\delta)\,\alpha}\,Var(\xi)\,e^{-t\alpha} + \int_0^t e^{-(t+\delta-u)\alpha}\,\beta^2\,e^{-(t-u)\alpha}\,du \end{aligned}$$

pour $t \geq 0$, $\delta \geq 0$.

2. Fonction de covariance : $\mathrm{Cov}(X_t, X_s) \triangleq E[(X_t - EX_t)\,(X_s - EX_s)^*]$.

(iii) *Si* $E(\xi) = 0$ *et* $Var(\xi) = \beta^2/(2\alpha)$ *alors le processus* X *est centré (i.e.* $\mu(t) = 0$*) et de covariance stationnaire, i.e.* $R(t+\delta, t)$ *ne dépend plus de que de* δ *:*

$$R(t+\delta, t) = \frac{\beta^2}{2\,\alpha}\, e^{-\delta\,\alpha}\ , \quad \forall t \geq 0,\ \delta \geq 0\ .$$

(iv) *Si* ξ *est une variable gaussienne, alors quand* $t \to \infty$*, l'espérance et la fonction de covariance du processus* $\{X_{t+\delta}\,;\,\delta \geq 0\}$ *tendent vers celles du cas stationnaire :*

$$E(X_{t+\delta}) \to 0\ , \quad Cov(X_{t+\delta}, X_t) \to \frac{\beta^2}{2\,\alpha}\, e^{-\delta\,\alpha}\ .$$

3.2 Propriétés de la solution d'une EDS

Proposition 3.2.1 *Soit* f^n *et* g^n *des coefficients qui vérifient les Hypothèses 3.1.1 uniformément en* n *(i.e. avec une constante* K *ne dépendant pas de* n*). On suppose de plus que*

$$f^n(t,x) \to f(t,x)\ , \quad g^n(t,x) \to g(t,x)\ , \quad \text{quand } n \to \infty\ , \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d\ .$$

Alors

$$X_t^n \to X_t\ , \quad \text{quand } n \to \infty \text{ dans } L^2(\Omega; \mathbb{R}^d)\ , \quad t \in \mathbb{R}^+$$

où X^n *[resp.* X*] désigne la solution de l'EDS (3.4) avec coefficients* f^n *et* g^n *[resp.* f *et* g*].*

Preuve

$$\begin{aligned}
X_t - X_t^n &= \int_0^t [f(s,X_s) - f^n(s,X_s^n)]\,ds + \int_0^t [g(s,X_s) - g^n(s,X_s^n)]\,dB_s \\
&= \int_0^t [f(s,X_s) - f^n(s,X_s)]\,ds + \int_0^t [f^n(s,X_s) - f^n(s,X_s^n)]\,ds \\
&\qquad + \int_0^t [g(s,X_s) - g^n(s,X_s)]\,dB_s + \int_0^t [g^n(s,X_s) - g^n(s,X_s^n)]\,dB_s
\end{aligned}$$

donc[3]

$$E(|X_t - X_t^n|^2) \leq 4\,\rho_n(t) + 4\,(1+t)\,K^2 \int_0^t E(|X_s - X_s^n|^2)\,ds$$

où

$$\rho_n(t) \triangleq t\ E\int_0^t |f(s,X_s) - f^n(s,X_s)|^2\,ds + E\int_0^t |g(s,X_s) - g^n(s,X_s)|^2\,ds\ .$$

$\rho_n(t)$ *est une fonction croissante de* t*, donc*

$$E(|X_s - X_s^n|^2) \leq 4\,\rho_n(t) + 4\,(1+t)\,K^2 \int_0^s E(|X_u - X_u^n|^2)\,du\ , \quad 0 \leq s \leq t$$

3. $(a+b+c+d)^2 \leq 4\,(a^2+b^2+c^2+d^2)$.

avec le Lemme de Gronwall B.2.2 on a

$$E(|X_t - X_t^n|^2) \leq 4\,\rho_n(t)\,\exp(4\,(1+t)\,K^2\,t)\ , \quad t \geq 0\ .$$

Pour conclure, il suffit de démontrer que $\rho_n(t) \to 0$. $\zeta_s^n \triangleq g(s,X_s) - g^n(s,X_s) \to 0$ *p.s. pour tout* $s \geq 0$ *et d'après (3.3)* $|\zeta_s^n|^2 \leq Cte\,(1+|\xi|^2)$ *qui est* $dP \times ds$*–intégrable. Avec le mme raisonnement pour* $f(s,X_s) - f^n(s,X_s)$, *on montre* $\rho_n(t) \to 0$ *par convergence dominée.* □

Proposition 3.2.2 *Soit* $p \geq 2$ *tel que* $E|\xi|^p < \infty$, *il existe alors une constante* C_p *telle que*

$$E\left(\sup_{0\leq s\leq t}|X_s|^p\right) \leq C_p\,(1+E|\xi|^p)\,(1+t^p)\,\exp(C_p\,(t^{p/2}+t^p))\ , \quad t \geq 0\ . \tag{3.9}$$

Preuve C_p *désignera une constante qui ne dépend que de pmais qui varie au cours de la démonstration. On note* $Y_t = \sup_{0\leq s\leq t}|X_s|^p$,

$$Y_t \leq C_p\,\left(|\xi|^p + t^{p-1}\int_0^t |f(s,X_s)|^p\,ds + \sup_{0\leq s\leq t}\left|\int_0^s g(s,X_s)\,dB_s\right|^p\right)\ .$$

De l'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy et des hypothèses (3.1–3.2), on déduit

$$EY_t \leq C_p\,E\left(|\xi|^p + t^p + t^{p-1}\int_0^t |X_s|^p\,ds + t^{p/2} + t^{p/2-1}\int_0^t |X_s|^p\,ds\right)\ ,$$

et

$$EY_t \leq C_p\,(E|\xi|^p + t^{p/2} + t^p) + C_p\,(t^{p/2-1} + t^{p-1})\int_0^t EY_s\,ds\ ,$$

le théorème se déduit donc du Lemme de Gronwall B.2.2. □

Proposition 3.2.3 *Pour tout* $T > 0$ *et* $p \geq 2$, *il existe une constante* $C(p,T)$ *telle que*

$$E\left(\sup_{0\leq t\leq T}|X_t^{s,x} - X_t^{s',x'}|^p\right) \leq C(p,T)\ (1+|x|^p+|x'|^p)\ (|s-s'|^{p/2}+|x-x'|^p)$$

pour tout $s,\ s' \in [0,T]$ *et* $x,\ x' \in \mathbb{R}^d$.

Preuve *Supposons* $s' \leq s$ *et désignons* $X^{s,x}$ *[resp.* $X^{s,x}$*] par* X *[resp* X'*],* $X - X'$ *par* $\bar{X}$, $x - x'$ *par* $\bar{x}$. *On considère trois cas :*

- *Si* $t \leq s'$, *alors* $|\bar{X}_t|^p = |\bar{x}|^p$ *donc*

$$E\sup_{0\leq t\leq s'}|\bar{X}_t|^p = |\bar{x}|^p\ . \tag{3.10}$$

- *Si* $s' < t \leq s$, *alors*

$$|\bar{X}_t|^p = \left|\bar{x} - \int_{s'}^t f(r,X_r')\,dr - \int_{s'}^t g(r,X_r')\,dB_r\right|^p\ .$$

L'argument utilisé dans la preuve de la Proposition 3.2.2 conduit à

$$E\left(\sup_{s'\le t\le s}|\bar{X}_t|^p\right) \le C_p\left(|\bar{x}|^p + |s-s'|^{p-1}\int_{s'}^{s}(1+|X'_r|^p)\,dr + |s-s'|^{p/2-1}\int_{s'}^{s}(1+|X'_r|^p)\,dr\right)$$

et d'après la Proposition 3.2.2, $E(|X'_r|^p) \le C(p,T)\,(1+|x'|^p)$, *donc*

$$E\sup_{s'\le t\le s}|\bar{X}_t|^p \le C(p,T)\,(1+|x'|^p)\,(|s-s'|^{p/2}+|\bar{x}|^p)\ . \tag{3.11}$$

- *Si* $t > s$, *alors*

$$|\bar{X}_t|^p \le C_p\left(|\bar{X}_s|^p + \left|\int_s^t [f(r,X_r)-f(r,X'_r)]\,dr\right|^p + \left|\int_s^t [g(r,X_r)-g(r,X'_r)]\,dB_r\right|^p\right)\ ,$$

et

$$E\sup_{s\le t\le T}|\bar{X}_t|^p \le C_p\,E\left(|\bar{X}_s|^p + K^p\,t^{p-1}\int_s^T|\bar{X}_r|^p\,dr + K^p\,t^{p/2-1}\int_s^T|\bar{X}_r|^p\,dr\right)\ ,$$

et par suite

$$E\sup_{s\le t\le T}|\bar{X}_t|^p \le C(p,T)\,E(|\bar{X}_s|^p)\ . \tag{3.12}$$

La proposition se déduit en combinant (3.10), (3.11) et (3.12). □

Corollaire 3.2.4 *Soit* X *[resp.* X' *la solution de l'*EDS *(3.4) avec condition initiale* ξ *[resp.* ξ'*]. Pour tout* $T>0$ *et* $p\ge 2$, *tels que* $E(|\xi|^p)+E(|\xi'|^p)<\infty$, *alors il existe une constante* $C(p,T)$ *telle que*

$$E\left(\sup_{0\le t\le T}|X_t-X'_t|^p\right) \le C(p,T)\,E(|\xi-\xi'|^p)\ .$$

3.3 Processus de diffusion

Le processus X *solution de l'*EDS *(3.4) est un processus de Markov. Les processus de Markov de ce type sont appelés* processus de diffusion.

Définition 3.3.1 *On appelle* générateur infinitésimal *du processus de diffusion* X *solution de l'*EDS *(3.4), l'opérateur aux dérivées partielles du second ordre défini par*

$$\mathcal{L}_t\varphi(x) \triangleq \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d} a_{ij}(t,x)\,\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\,\partial x_j} + \sum_{1\le i\le d} f_i(t,x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i}\ ,x\in\mathbb{R}^d\ , \tag{3.13}$$

où $a = g\,g^*$.

Remarque 3.3.2 *Le générateur infinitésimal* $\mathcal{L}$ *apparaît de manière naturelle dans la formule de Itô. En effet, avec les notations du Théorème 2.2.5 pour tout fonction* $\Phi\in\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ *et tout* $0\le t\le T$, *on a*

$$d\Phi(X_t) = \mathcal{L}_t\Phi(X_t)\,dt + \Phi'(X_t)\ g_t\,dB_t\ .$$

Lemme 3.3.3 *Soit $s \geq 0$. Pour tout vecteur aléatoire ξ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_s$–mesurable, le processus X^ξ est solution de l'équation*

$$X_t^{s,\xi} = \xi + \int_s^t f(u, X_u^\xi)\, du + \int_s^t g(u, X_u^\xi)\, dB_u \ , \quad t \geq s \ . \tag{3.14}$$

Preuve *On suppose $s = 0$, on considère donc X^ξ. Comme il y a unicité de la solution, il suffit d'établir que X^ξ est une solution de (3.14). Soit ξ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_0$–mesurable.*

ξ variable étagée. *Supposons que ξ est une variable étagée, i.e. il existe n, $x_i \in \mathbb{R}^d$ et $A_i \in \mathcal{F}_0$ $(i = 1, \dots, n)$ tels que $\xi = \sum_{i=1}^n x_i\, \mathbf{1}_{A_i}$ (pour toute fonction h : $h(\xi) = \sum_{i=1}^n h(x_i)\, \mathbf{1}_{A_i}$). On a donc $X_t^\xi = \sum_{i=1}^n X_t^{x_i}\, \mathbf{1}_{A_i}$. Par définition de X^{x_i}, on a*

$$X_t^{x_i} = x_i + \int_0^t f(u, X_u^{x_i})\, du + \int_0^t g(u, X_u^{x_i})\, dB_u \ , \quad t \geq 0 \ , \quad i = 1, \dots, n.$$

En multipliant cette égalité par $\mathbf{1}_{A_i}$ et compte tenu du fait que A_i est $\mathcal{F}_0$–mesurable (ce qui permet d'intervertir la multiplication par $\mathbf{1}_{A_i}$ et l'intégrale stochastique), on obtient (3.14) après sommation sur i.

ξ de carré intégrable. *Si ξ est de carré intégrable, il existe une suite $\{\xi^n\}$ de variables étagées $\mathcal{F}_0$–mesurables qui converge vers ξ dans $L^2(\Omega)$. Soit Y [resp. Y^n] la solution de l'*EDS *(3.14) avec condition initiale ξ [resp. ξ^n].*

D'après le cas précédent, $Y^n = X^{\xi^n}$. De plus $Y_t^n \to Y_t$ en moyenne quadratique (voir Corollaire 3.2.4). Enfin, $\xi^n \to \xi$ en moyenne quadratique, on peut donc en extraire une sous–suite (également notée ξ^n) qui converge p.s. Par continuité de l'application $x \mapsto X_t^x$: $X_t^{\xi^n} \to X_t^\xi$ p.s. Récapitulons :

$$Y_t^n = X_t^{\xi^n} \to X_t^\xi \ p.s. \quad et\ Y_t^n \to Y_t \ dans\ L^2(\Omega)$$

on en déduit que $X_t^\xi = Y_t$ p.s. $(t \geq 0)$., i.e. ces deux processus sont une modification l'un de l'autre, comme ils sont également continus, ils sont donc indistinguables, ce qui montre (3.14).

Cas général. *On note $\xi^n \triangleq \xi\, \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq n\}}$, ξ^n est une suite de variables $\mathcal{F}_0$–mesurables, de carré intégrable et qui converge presque sûrement vers ξ quand $n \to \infty$. Par continuité de l'application $x \mapsto X_t^x$: $X_t^{\xi^n} \to X_t^\xi$ p.s. D'autre part, $Y_t^n \to Y_t$ p.s. Donc, pour tout t fixé, $X_t^\xi = Y_t$ p.s., Par continuité, ces processus sont donc indistinguables.* □

Remarque 3.3.4 *Soit ξ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_0$–mesurable et X le processus solution de $X_t = \xi + \int_0^t f(u, X_u)\, du + \int_0^t g(u, X_u)\, dB_u$, $t \geq 0$, alors X_s est un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\mathcal{F}_s$–mesurable. On a donc trivialement $X_t = X_t^{s, X_s}$, $t \geq s$.*

Théorème 3.3.5 *Sous les Hypothèses 3.1.1, la solution de l'EDS (3.4) est un processus de Markov.*

Preuve *Soit $t \geq s \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, d'après le Remarque 3.3.4*

$$E(\mathbf{1}_A(X_t)|\mathcal{F}_s) = E(\mathbf{1}_A(X_t^{s,X_s})|\mathcal{F}_s) \ .$$

D'une part $\varphi = \mathbf{1}_A$ est une application borélienne et bornée, d'autre part $\{X_t^{s,x}\,;\, x \in \mathbb{R}^d\}$ est une fonction aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendante de $\mathcal{F}_s$.

En appliquant le Lemme A.2.7, on obtient

$$E(\mathbf{1}_A(X_t^{s,X_s})|\mathcal{F}_s) = E(\mathbf{1}_A(X_t^{s,X_s})|X_s)$$

c'est à dire $P(X_t \in A|\mathcal{F}_s) = P(X_t \in A|X_s)$. □

Remarque 3.3.6 *Au processus de Markov X on associe sa loi initiale, i.e. sa loi de $X_0 = \xi$, et sa probabilité de transition*

$$p(s,x;t,A) \stackrel{\triangle}{=} P(X_t \in A|X_s = x) \ , \quad t \geq s \geq 0 \ , \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \ .$$

À t, s, x fixés, l'application $A \mapsto p(s,x;t,A)$ est une probabilité sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ qui coïncide avec la loi de $X_t^{s,x}$. Ainsi, la probabilité de transition ne dépend que des coefficients de dérive et de diffusion.

3.4 Cas homogène

On considère un processus X solution de l'EDS homogène en temps

$$dX_t = f(X_t)\,dt + g(X_t)\,dB_t \ , \quad t \geq 0 \ , \quad X_0 = \xi \ ,$$

sous les Hypothèses 3.1.1.

Proposition 3.4.1 *Les processus $\{X_{t+s}^{s,x}\,;\, t \geq 0\}$ et $\{X_t^{0,x}\,;\, t \geq 0\}$ ont même loi, i.e. le processus X est homogène en temps.*

Preuve

$$\begin{aligned} X_{t+s}^{s,x} &= x + \int_s^{s+t} f(X_u^{s,x})\,du \int_s^{s+t} g(X_u^{s,x})\,dB_u \\ &= x + \int_0^t f(X_{s+v}^{s,x})\,dv + \int_0^t g(X_{s+v}^{s,x})\,d\tilde{B}_v \qquad (u = s+v) \end{aligned}$$

où $\tilde{B}_v = B_{s+v} - B_s$ $(v \geq 0)$ est un mouvement brownien (voir Exercice 1.2.4). Par ailleurs,

$$X_t^{0,x} = x + \int_0^t f(X_v^{0,x})\,dv + \int_0^t g(X_v^{0,x})\,dB_v \ .$$

Comme B et $\tilde{B}$ ont même loi, on en déduit la proposition. $\square$

Les probabilités de transition $p(s,x;t,\cdot)$ et $p(0,x;t-s,\cdot)$ coïncident, on pose donc

$$p_t(x,A) \triangleq p(0,x;t,A) \ , \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \ . \tag{3.15}$$

Proposition 3.4.2 *Soit $t \geq 0$ et $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ borélienne, on pose*

$$[P_t\varphi](x) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y)\, p_t(x,dy) = E[\varphi(X_t^x)] \ , \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \ . \tag{3.16}$$

L'opérateur $P_t : \varphi \mapsto P_t\varphi$ est un opérateur linéaire continu. La famille $\{P_t\,;\, t \geq 0\}$ vérifie une propriété de semi–groupe, i.e. :

$$P_s \circ P_t = P_t \circ P_s = P_{s+t} \ , \quad s,\, t \geq 0 \ , \quad P_0 = I \ .$$

Preuve

$$\begin{aligned} &E[\varphi(X_{t+s}^{t,y})] = E[\varphi(X_s^y)] = [P_s\varphi](y) \ , \\ &[P_{s+t}\varphi](x) = E[\varphi(X_{s+t}^x)] = E[\varphi(X_{s+t}^{t,X_t^x})] = E[(P_s\varphi)(X_t^x)] \ , \end{aligned}$$

donc $[P_{s+t}\varphi](x) = [P_t\,(P_s\varphi)](x) = [P_t \circ P_s](\varphi)(x)$. $\square$

$\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et nulles à l'infini. $\mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$ désigne l'espace des fonctions deux fois continument différentiables définies sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et à support compact.

Théorème 3.4.3 *On suppose que les fonction f et g sont lipschitziennes et bornées. Les opérateurs $\{P_t\,;\, t \geq 0\}$ forment un semi–groupe fortement continus d'opérateurs markoviens sur $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.*

De plus, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$, le processus $M^\varphi(x)$

$$M_t^\varphi(x) \triangleq \varphi(X_t^x) - \varphi(x) - \int_0^t \mathcal{L}\varphi(X_s^x)\, ds \ , \quad t \geq 0 \ , \tag{3.17}$$

est une $\mathcal{F}_t$–martingale et

$$[P_t\varphi](x) = \varphi(x) + \int_0^t [P_s(\mathcal{L}\varphi)](x)\, ds \ , \quad t \geq 0,\ x \in \mathbb{R}^d \ . \tag{3.18}$$

où $\mathcal{L}$ désigne le générateur infinitésimal de la diffusion X.

L'opérateur P_t est dit markovien *si $P_t 1 = 1$ et si $f \geq 0$ implique $P_t f \geq 0$.*

Preuve

Point 1 : Si $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ alors $P_t\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$. *L'application $(t,x) \mapsto \varphi(X_t^x)$ étant p.s. continue bornée, la continuité de l'application $x \mapsto P_t\varphi(x) = E[\varphi(X_t^x)]$ est une conséquence du théorème de convergence dominée. Il faut maintenant vérifier que $P_t\varphi$ est nulle à l'infini.*

Soit $r > 0$,

$$|P_t\varphi(x)| \leq \sup_{y,\, |x-y|\leq r} |\varphi(y)| + \|\varphi\|_\infty \; P(|X_t^x - x| > r) \; .$$

Par ailleurs

$$\begin{aligned} P(|X_t^x - x| > r) &\leq \frac{1}{r^2}\, E(|X_t^x - x|^2) \\ &\leq \frac{2}{r^2}\left[E\left(\left|\int_0^t f(X_s^x)\, ds\right|^2\right) + E\left(\left|\int_0^t g(X_s^x)\, dB_s\right|^2\right)\right] \\ &\leq \frac{2\,K^2}{r^2}\, t\,(1+t) \end{aligned}$$

et $|\varphi(y)| \to 0$ quand $|y| \to \infty$. Donc

$$\lim_{|x|\to\infty} |P_t\varphi(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \; \frac{2\,K^2}{r^2}\, t\,(1+t) \; .$$

En faisant tendre $r \to +\infty$ on montre que $[P_t\varphi](x) \to 0$ quand $|x| \to \infty$.

Point 2 : Caractère continu du semi–groupe. *Soit $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$, il faut montrer que*

$$\|P_t\varphi - P_s\varphi\|_\infty \to 0 \text{ quand } |t-s| \to 0 \; .$$

En se ramenant à $s = 0$, il suffit de montrer que

$$\|P_t\varphi - \varphi\|_\infty \to 0 \text{ quand } t \to 0 \; . \tag{3.19}$$

On a

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |P_t\varphi(x) - \varphi(x)| &\leq \sup_{\{(x,y)\,;\, |x-y|\leq r\}} |\varphi(x) - \varphi(y)| + 2\,\|\varphi\|_\infty\, P(|X_t^x - x| > r) \\ &\leq \sup_{\{(x,y)\,;\, |x-y|\leq r\}} |\varphi(x) - \varphi(y)| + 2\,\|\varphi\|_\infty\, \frac{t\,(1+t)}{r^2} \end{aligned}$$

donc

$$\limsup_{t\to 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} |P_t\varphi(x) - \varphi(x)| \leq \sup_{\{(x,y)\,;\, |x-y|\leq r\}} |\varphi(x) - \varphi(y)|$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand $r \to \infty$ car $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ est uniformément continu. Ce qui démontre (3.19).

Point 3: Preuve de (3.17) et (3.18). *Soit* $\varphi \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$, *avec la formule de Itô*

$$\varphi(X_t^x) = \varphi(x) + \int_0^t \mathcal{L}\varphi(X_s^x)\,ds + \int_0^t \varphi_x'(X_s^x)\,g(X_s^x)\,dB_s$$

donc

$$M_t^\varphi(x) = \int_0^t \varphi_x'(X_s^x)\,g(X_s^x)\,dB_s$$

qui est une $\mathcal{F}_t$ *martingale.*

En prenant l'espérance dans (3.17) et en appliquant le théorème de Fubini on obtient (3.18). □

Corollaire 3.4.4 *Pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$

$$\mathcal{L}\varphi = \lim_{t\to 0} \frac{P_t\varphi - \varphi}{t}$$

pour la topologie de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Preuve

$$\frac{P_t\varphi - \varphi}{t} - \mathcal{L}\varphi = \frac{1}{t}\int_0^t (P_s[\mathcal{L}\varphi] - \mathcal{L}\varphi)\,(x)\,ds$$

□

Remarques 3.4.5 (*i*) *On définit le domaine du générateur* $\mathcal{L}$ *par*

$$D(\mathcal{L}) = \left\{ f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)\ ;\ \frac{P_t\varphi - \varphi}{t} \text{ a une limite quand } t \to 0 \right\}$$

(limite pour la topologie de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$*).* $\mathcal{L}$ *est un opérateur non borné de* $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d)$ *de domaine* $D(\mathcal{L})$ *dense (puisque, d'après le Corollaire 3.4.4, il contient* $\mathcal{C}_K^2(\mathbb{R}^d)$*).* $\mathcal{L}$ *est appelé* générateur infinitésimal *du semi–groupe* $\{P_t\,;\,t \geq 0\}$.

(*ii*) *En dimension finie un semi–groupe est caractérisé par son générateur infinitésimal. En dimension infinie, le théorème de Hille–Yoshida fournit des conditions suffisantes pour qu'un semi–groupe soit caractérisé par son générateur infinitésimal (voir* Ethier–Kurtz *[11] pp. 10–16).*

3.5 Solution faible d'EDS

On peut affaiblir les hypothèses d'existence et d'unicité de la solution d'une EDS introduites précédemment (notamment les conditions de Lipschitz) et donc introduire une nouvelle notion de solution dite faible, *en opposition aux solutions* fortes. *Ceci a des implications importantes aussi bien pour la théorie que pour les applications.*

Définition 3.5.1 *La* solution faible *de l'équation (3.21) est un triplet :*

– $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, *un espace de probabilité filtré,*

- *B, un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien (standard),*
- *X, un processus $\mathcal{F}_t$–adapaté*

(ces deux processus étant définis sur l'espace donné) tel que

$$P\left(\int_0^t \left[|f(s,X_s)| + |g(s,X_s)|^2\right] ds\right) = 1 \ , \quad t \geq 0 \ , \tag{3.20}$$

et

$$dX_t = f(t,X_t)\,dt + g(t,X_t)\,dB_t \ , \quad X_0 = \xi \ . \tag{3.21}$$

Définition 3.5.2 (Unicité en loi) *L'EDS (3.21) admet une* unique solution faible en loi *si, étant données deux solutions faibles*

$$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P,B,X) \quad et \quad (\tilde{\Omega},\tilde{\mathcal{F}},\tilde{\mathcal{F}}_t,\tilde{P},\tilde{B},\tilde{X})$$

(avec conditions initiales de même loi), alors les processus X et $\tilde{X}$ ont même loi.

Dans ce cadre, il existe également un autre concept d'unicité : L'EDS (3.21) admet une unique solution faible au sens trajectoriel *si, étant données deux solutions faibles*

$$(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_t,P,B,X) \quad et \quad (\Omega,\mathcal{F},\tilde{\mathcal{F}}_t,P,B,\tilde{X})$$

(donc seuls les processus et les filtrations sont différentes B est un mouvement brownien pour les deux filtrations) avec même condition initiale, alors les processus X et $\tilde{X}$ sont indistingables.

Exemple 3.5.3 *L'équation*

$$dX_t = \mathrm{signe}(X_t)\,dB_t \ , \quad X_0 = 0 \ ,$$

admet une solution faible unique en loi. En effet, X est une martingale telle que de variation quadratique t, il s'agit d'un mouvment brownien. Il n'y a pas unicité au sens trajectoriel car $-X$ est aussi solution cette équation. Enfin, on peut montrer que cette équation n'admet pas de solution forte (cf. Karatzas–Shreve *[16] p. 302), cela demande un peu de travail...*

La transformation de Girsanov est un outil fondamental pour démontrer l'existence et l'unicité de solution faible d'EDS :

Proposition 3.5.4 (Existence) *On considère l'équations*

$$dX_t = f(t,X_t)\,dt + dB_t \ . \tag{3.22}$$

On suppose que f est borélienne et qu'il existe $K < \infty$ tel que

$$|f(t,x)| \leq K\,(1+|x|) \ , \quad t \geq 0 \ , \quad x \in \mathbb{R}^d \ . \tag{3.23}$$

Alors pour toute mesure de probabilité μ définie sur $\mathbb{R}^d$, (3.22) admet une solution faible de loi initiale $loi(X_0) = \mu$.

Preuve *On considère l'espace canonique $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, X le processus canonique, $\mathcal{F}_t$ la filtration naturelle associée et P_x la loi du "mouvement brownien issu de x" (i.e. du processus x+mouvement brownien). On sait que*

$$Z_t \triangleq \exp\left(\int_0^t \langle f(s, X_s)\,,\, dX_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^t |X_s|^2\, ds\right)$$

est une $\mathcal{F}_t$–P_x–martingale quelque soit $x \in \mathbb{R}^d$. On définit alors la loi

$$\left.\frac{dQ_x}{dP_x}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t\ , \quad t \geq 0\ .$$

Alors

$$B_t \triangleq X_t - x - \int_0^t f(s, X_s)\, ds$$

est un $\mathcal{F}_t$–Q_x–mouvement brownien avec $Q_x(B_0 = 0) = 1$. D'où

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s)\, ds + B_t\ , \quad t \geq 0\ .$$

Enfin, sous la loi $Q_\mu(A) \triangleq \int_{\mathbb{R}^d} Q_x(A)\, \mu(dx)$, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, Q_\mu)$, B, X est une solution faible de (3.22) avec loi initiale μ. □

Proposition 3.5.5 (Unicité) *On considère $(\Omega^i, \mathcal{F}^i, \mathcal{F}^i_t, P^i)$, B^i, X^i $(i = 1, 2)$ deux solution faibles de l'équation (3.22) avec même loi initiale. Si, pour tout $T > 0$,*

$$P^i\left(\int_0^T |f(t, X^i_t)|^2\, dt < \infty\right) = 1\ , \quad i = 1, 2\ , \tag{3.24}$$

alors (X^1, B^1) et (X^2, B^2) admettent la même loi sous leur mesure de probabilité respective.

Preuve *On se fixe $T > 0$. Pour tout k on définit le temps d'arrêt*

$$\tau^i_k \triangleq \inf\left\{t \geq 0\,;\, \int_0^t |f(s, X^i_s)|^2\, ds = k\right\} \wedge T$$

$\tau^i_k \uparrow T$, P^i–p.s. quand $k \to \infty$. On pose

$$\xi_t(X^i) \triangleq \exp\left(-\int_0^t \langle f(s, X^i_s), dX^i_s\rangle + \frac{1}{2}\int_0^t |f(s, X^i_s)|^2\, ds\ .\right)$$

À l'aide du critère de Novikov on montre que $\{\xi_{t\wedge\tau^i_k}(X^i)\,;\, t \geq 0\}$ est une martingale sous P^i. On peut donc définir un loi $Q^i_{T,k}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ telle que

$$X^i_{t\wedge\tau^i_k} = X^i_0 + \int_0^{t\wedge\tau^i_k} f(s, X^i_s)\, ds + B^i_{t\wedge\tau^i_k}$$

est une $Q^i_{T,k}$–mouvement brownien.

$Q^i_{T,k}$ est la restriction d'une mesure de probabilité Q^i_T aux processus continues, constants après l'instant τ^i_k et arrêtés en T, pour tout k.

Enfin, pour tout n, $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n < T$ et tout borélien Γ de $\mathbb{R}^{2\,d\,(n+1}$

$$\begin{aligned} &P^1\left[(X^1_{t_0}, B^1_{t_0}, \ldots, X^1_{t_n}, B^1_{t_n}) \in \Gamma,\, \tau^1_k = T\right] \\ &\quad = \int_{\Omega^1} \frac{1}{\xi^1_{T\wedge\tau_k}(X^1)} \mathbf{1}_{\{(X^1_{t_0}, B^1_{t_0}, \ldots, X^1_{t_n}, B^1_{t_n}) \in\Gamma,\, \tau^1_k = T\}}\, dQ^1_{T,k} \\ &\quad = \int_{\Omega^2} \frac{1}{\xi^2_{t\wedge\tau_k}(X^2)} \mathbf{1}_{\{(X^2_{t_0}, B^2_{t_0}, \ldots, X^2_{t_n}, B^2_{t_n}) \in\Gamma,\, \tau^2_k = T\}}\, dQ^2_{T,k} \\ &\quad = P^2\left[(X^2_{t_0}, B^2_{t_0}, \ldots, X^2_{t_n}, B^2_{t_n}) \in \Gamma,\, \tau^2_k = T\right] \ . \end{aligned}$$

Pour conclure, il suffit de faire tendre $k \to \infty$. □

3.6 EDS & EDP

Soit $P_{t,x}$ la loi sur l'espace canonique sous laquelle

$$dX_s = f(s, X_t)\, ds + g(s, X_s)\, dB_s \ , X_t = x \ , \quad t \le s < \infty \ , \tag{3.25}$$

où B est un $P_{t,x}$ mouvement brownien. On note $E_{t,x}$ l'esprérance associée à $P_{t,x}$. On note $P_x = P_{0,x}$ et $E_x = E_{0,x}$.

On fait les hypothèses suivantes

Hypothèses 3.6.1

(i) Les coefficients f et g sont continus et à croissance au plus linéaire.

(ii) Quelque soit $(t, x) \in [0, \infty[\times\mathbb{R}^d$, l'équation (3.25) admet une solution faible, unique en loi.

On se fixe $T > 0$, $L > 0$, $\lambda \ge 1$ et on considère des fonctions continues $\alpha : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, $\beta : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$, $\gamma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \mapsto [0, \infty[$ telles ques

$$\begin{cases} (i) \quad |\alpha(x)| \le L\,(1 + |x|^{2\lambda}) \ , \\ ou \\ (ii) \quad \alpha(x) \ge 0 \ , \end{cases} \tag{3.26}$$

pour tout $x \in R^d$, et

$$\begin{cases} (i) \quad |\beta(t, x)| \le L\,(1 + |x|^{2\lambda}) \ , \\ ou \\ (ii) \quad \beta(t, x) \ge 0 \ , \end{cases} \tag{3.27}$$

pour tout $0 \le t \le T$, $x \in \mathbb{R}^d$.

On définit le générateur infinitésimal associé à la diffusion (3.25):

$$[\mathcal{L}_t\varphi](x) \triangleq \sum_{i=1}^{d} f_i(t,x)\,\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2}\sum_{1\le i,j\le d} a_{i,j}(t,x)\,\frac{\partial^2\varphi(x)}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

avec $a \triangleq g\,g^*$.

Théorème 3.6.2 *Sous les hypothèses 3.6.1, supposons que* $v : \mathbb{R}^d \times [0,T] \mapsto \mathbb{R}^d$ *est de classe* $\mathcal{C}^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^d)$ *et vérifie le problème de Cauchy suivant*

$$-\frac{\partial v}{\partial t} + \gamma\, v = \mathcal{L}_t v + \beta \ \text{ sur } [0,T[\times\mathbb{R}^d\ , \quad v(T,x) = \alpha(x)\ , \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{3.28}$$

et est à croissance polynomiale

$$\max_{0\le t\le T} v(t,x) \le M\,(1+|x|^{2\mu})\ , \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{3.29}$$

pour des constantes $M>0$ *et* $\mu \ge 1$ *données. Alors* v *admet la représentation suivante*

$$v(t,x) = E_{t,x}\left[\alpha(X_T)\,e^{-\int_t^T \gamma(u,X_u)\,du} + \int_t^T \beta(s,X_s)\,e^{-\int_t^s \gamma(u,X_u)\,du}\,ds\right] \tag{3.30}$$

sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$*, en particulier une telle solution est unique.*

Preuve *On applique la formule de Itô au processus* $v(s,X_s)\,e^{-\int_t^s \gamma(u,X_u)\,du}$, $s \in [t,T]$. *Avec* $\tau_n = \inf\{s \ge t\,;\, |X_s| \ge n\}$

$$\begin{aligned} v(t,x) \;&=\; E_{t,x}\left[\int_t^{T\wedge\tau_n} \beta(s,X_s)\,e^{-\int_t^s \gamma(u,X_u)\,du}\,ds\right] \\ &\quad + E_{t,x}\left[v(\tau_n,X_{\tau_n})\,e^{-\int_t^{\tau_n} \gamma(u,X_u)\,du}\,\mathbf{1}_{\{\tau_n\le T\}}\right] \\ &\quad + E_{t,x}\left[\alpha(X_T)\,e^{-\int_t^T \gamma(u,X_u)\,du}\,\mathbf{1}_{\{\tau_n> T\}}\right] \end{aligned} \tag{3.31}$$

L'estimée suivante

$$E_{t,x}\max_{t\le r\le s}|X_r|^{2m} \le C\,(1+|x|^{2m})\,e^{C\,(s-t)}\ , \quad t\le s\le T\ , \tag{3.32}$$

est valide pour tout $m \ge 1$ *(*C *est une constante strictement positive fonction de* m, K, T *et* d *uniquement).*

Par convergence dominée et à l'aide de (3.32) et (3.26)–(i) [ou par convergence monotone et à l'aide de (3.32) et (3.26)–(ii)], le premier terme du membre de droite de (3.31) converge, quand $n \to \infty$, *vers*

$$E_{t,x}\left[\int_t^T \beta(s,X_s)\,e^{-\int_t^s \gamma(u,X_u)\,du}\,ds\right]\ .$$

Le deuxième terme est borné en valeur absolue par

$$E_{t,x}\left(|v(\tau_n, X_{\tau_n})|\,\mathbf{1}_{\{\tau_n\le T\}}\right) \le M\,(1+n^{2\mu})\,P_{t,x}(\tau_n \le T)\ , \tag{3.33}$$

mais, d'après (3.32) et l'inégalité de Chebycheff

$$\begin{aligned} P_{t,x}(\tau_n \le T) &\le P_{t,x}\left(\max_{t\le r\le T}|X_r| \ge n\right) &(3.34)\\ &\le n^{-2m}\,E_{t,x}\left(\max_{t\le r\le T}|X_r|\right) &(3.35)\\ &\le C\,n^{-2m}\,(1+|x|)\,e^{C\,T}\ . &(3.36)\end{aligned}$$

En choisissant $m>\mu$, le membre de droite de (3.33) converge vers 0 quand $n\to\infty$.

Enfin, le dernier terme de (3.31) converge, par convergence dominée ou par convergence monotone, vers

$$E_{t,x}\left[\alpha(X_T)\,e^{-\int_t^T \gamma(u,X_u)\,du}\right]\ .$$

□

Proposition 3.6.3 *Une condition suffisante pour l'existance d'une solution v du problème de Cauchy (3.28) satisfaisant aux conditions de croissance polynomiale (3.29) est donnée par (cf.* Freidman [13]*) :*

(i) Ellipticité uniforme *: Il existe une constante $\delta>0$ telle que*

$$\langle y, a(t,x)\,y\rangle \ge \delta\,|y|^2$$

pour tout $x,\ y\in\mathbb{R}^d$, $t\ge 0$;

(ii) Bornitude *: Les fonctions $a(t,x)$, $f(t,x)$, $\gamma(t,x)$ sont bornées sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$;*

(iii) Continuité hölderienne *: Les fonctions $a(t,x)$, $f(t,x)$, $\gamma(t,x)$, $\beta(t,x)$ sont uniformément hölderiennes sur $[0,T]\times\mathbb{R}^d$;*

(iv) Croissance polynomiale *: Les fonctions $\alpha(x)$ et $\beta(t,x)$ vérifient (3.26)–(i) et (3.27)–(i) respectivement.*

On admet la résultat suivant (cf . Karatzas–Shreve [16] *p. 367) :*

Proposition 3.6.4 *Supposons les coefficients bornés, i.e.*

$$|f_i(t,x)| + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}^2(t,x) \le K\ ,\quad i=1,\ldots,d\ ,\quad x\in\mathbb{R}^d\ ,\quad 0\le t\le T\ . \tag{3.37}$$

Alors la condition de croissance polynomiale (3.29) dans le Théorème 3.6.2 peut être remplacée par

$$\max_{0\le t\le T}|v(t,x)| \le K\,e^{\mu\,|x|^2}\ ,\quad x\in\in\mathbb{R}^d\ , \tag{3.38}$$

pour un certain $K>0$ et $0<\mu<1/18\,\rho\mathbb{T}\,d$.

3.7 Exercices supplémentaires

Exercice 3.7.1 *Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P, B_t)$ un mouvement brownien réel standard et X un processus de Itô*

$$X_t = X_0 + \int_0^t f_s\, ds + \int_0^t g_s\, dB_s \ , \quad 0 \le t \le T \ .$$

On suppose que $X_t > 0$ p.s. ($0 \le t \le T$). Il s'agit d'établir la formule

$$X_t^{-1} = X_0^{-1} - \int_0^t X_s^{-2}\, dX_s + \int_0^t X_s^{-3}\, g_s^2\, ds \ . \tag{3.39}$$

On procède par étapes

(*i*) *On pose $\tau_n = \inf\{0 \le t \le T \, ; \, X_t \le \frac{1}{n}\}$. Montrer que τ_n est un temps d'arrêt ($\forall n \in \mathbb{N}^*$) et que $\tau_n \to \infty$ p.s. quand $n \to \infty$.*

(*ii*) *Établir (3.39) avec t remplacé par $t \wedge \tau_n$. [On appliquera la formule de Itô à une fonction $\varphi_n \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telle que $\varphi_n(x) = \frac{1}{x}$ pour $x \ge \frac{1}{n}$.*

(*iii*) *Établir (3.39).*

Nous avons définit les équations différentielles stochastiques à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, il est également possible de définir des équations à valeurs dans d'autres types d'espaces (ex. des variétés). Dans les deux exercices suivants on considères des équations différentielles stochastiques à valeurs dans un intervalle de $\mathbb{R}$.

Exercice 3.7.2 *On considère l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = (1 - X_t)\, X_t\, dB_t \tag{3.40}$$

et on suppose que $0 \le X_0 \le 1$.

(*i*) *Montrer que $P(X_t \in [0,1] \ \ \forall t \ge 0) = 1$ et que si $X_s = 0$ [resp. $X_s = 1$] alors $X_t = 0$ [resp. $X_t = 1$] pour tout $t \ge s$. Ainsi l'équation (3.40) a un sens (i.e. vérifie les conditions du théorème d'existence et d'unicité sur le domaine $]0,1[$).*

(*ii*) *On pose $\tau \triangleq \inf\{t \ge 0 \, ; \, X_t = 0 \text{ ou } 1\}$, on considère l'équation (3.40) pour $t \in [0, \tau[$, dans ce cas on a $X_t \in]0,1[$.*

(*iii*) *La fonction $]0,1[\ni x \mapsto \log(x/(1-x))$ est de classe $\mathcal{C}^2$. On pose $Y_t = \log(X_t/(1-X_t))$, utiliser la formule de Itô pour trouver l'équation dont Y_t est solution [aide : sur $]0,1[$ le processus $t \mapsto (1 - X_t)\, X_t$ est dans M^2. Solution :*

$$dY_t = dB_t + \frac{1}{2}\, \frac{e^{Y_t} - 1}{e^{Y_t} + 1}\, dt \ .]$$

Exercice 3.7.3 *On considère l'équation différentielle stochastique*

$$dX_t = (a\, X_t + c)\, dt + 2\sqrt{X_t}\, dB_t \tag{3.41}$$

on suppose que $X_0 \ge 0$.

(*i*) *Sous quelle condition $P(X_t \ge 0 \, , \, \forall t \ge 0) = 1$ [réponse : $c > 0$]. Montrer que l'*EDS *(3.41) a un sens (i.e. vérifie les conditions d'existence et d'unicité sur l'ensemble $[0, \infty[$).*

(ii) *On pose $Y_t = \sqrt{X_t}$, utiliser la formule de Itô pour trouver l'équation dont Y_t est solution. [Solution :*

$$dY_t = dB_t + \frac{1}{2Y_t}\,(aY_t^2 + c - 1)\,dt\ .]$$

Exercice 3.7.4 *Soit X solution de*

$$dX_t = c\,X_t\,dt + X_t^\alpha\,dB_t\ ,\quad X_0 \neq 0$$

avec $\alpha \neq 1$. Trouver $u(\cdot)$ telle que $Y_t = u(Y_t)$ soit solution d'une équation avec coefficient de diffusion égale à 1.

Exercice 3.7.5 *On considère l'eds linéaire à valeurs dans $\mathbb{R}$*

$$dX_t = (F_t\,X_t + f_t)\,dt + \langle G_t\,X_t + g_t\,,\,dB_t\rangle\ ,\quad X_0 = \xi\ , \tag{3.42}$$

où B est un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Les coefficients F_t, f_t, G_t, g_t (à valeurs dans $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^n$ respectivement) sont $\mathcal{F}_t$–adaptés et localement bornés. On pose

$$\Phi_t \triangleq \exp \int_0^t \left(F_s\,ds + \langle G_s\,,\,dB_t\rangle - \frac{1}{2}|G_s|^2\,ds\right)\ . \tag{3.43}$$

Montrer que l'unique solution de l'équation (3.42) est

$$X_t = \Phi_t\left[\xi + \int_0^t \Phi_s^{-1}(f_s - \langle G_s, g_s\rangle)\,ds + \int_0^t \Phi_s^{-1}\langle g_s, dB_s\rangle)\right]\ . \tag{3.44}$$

En particulier, la solution de l'équation

$$dX_t = F_t\,X_t\,dt + \langle G_t\,X_t\,,\,dB_t\rangle\ ,\quad X_0 = \xi\ , \tag{3.45}$$

est donnée par

$$X_t = \xi \exp \int_0^t \left[(F_s - \frac{1}{2}|G_s|^2)\,ds + \langle G_s, dB_s\rangle\right]\ . \tag{3.46}$$

Dans le cas de coefficients constants $F_t \equiv F$, $G_t \equiv G$, si $2\,F < |G|^2$ alors $X_t \to 0$ p.s. pour tout condition initiale ξ.

Exercice 3.7.6 *On considère l'eds à valeurs dans $\mathbb{R}$*

$$dX_t = F_t\,X_t\,dt + G\,dB_t\ ,\quad X_0 = x\ . \tag{3.47}$$

On suppose que $F_t \leq -\alpha < 0$, pour tout $t \geq 0$. Montrer que

$$E(X_t^2) \leq \frac{G^2}{2\alpha} + \left(x^2 - \frac{G^2}{2\alpha}\right)\,e^{-2\alpha t}\ ,\quad t \geq 0\ .$$

3.8 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 3.7.1 *On pose*

$$\tau_n \overset{\triangle}{=} \inf\{t \le T\,;\, X_t \le 1/n\} \wedge T$$

$[1/n,\infty[$ *est un fermé, donc* τ_n *est un temps d'arrêt (voir Exercice 1.3.10). Pour tout* ω *p.s.,* $t \mapsto X_t(\omega) > 0$ *est continu sur* $[0,T]$*, il existe* $\kappa(\omega) > 0$ *tel que* $X_t(\omega) \ge \kappa(\omega)$*, ce qui montre que* $\tau_n \to T$ *p.s.*

On considère $\varphi_n \in \mathcal{C}_b^2(]0,\infty[)$ *telle que* $\varphi_n(x) = 1/x$ *pour* $x \ge 1/n$*. D'après la formule de Itô*

$$\varphi_n(X_t) = \varphi_n(X_0) + \int_0^t \varphi_n'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\varphi''(X_s)\,g_s^2\,ds\ , \quad 0 \le t \le T\ .$$

Mais pour $t \le \tau_n$*,* $\varphi_n(X_t) = X_t^{-1}$*, donc*

$$X_t^{-1} = X_0^{-1} - \int_0^t X_s^{-2}\,dX_s + \frac{1}{2}X_s^{-3}\,g_s^2\,ds\ , \quad 0 \le t \le \tau_n\ .$$

En faisant $n \to \infty$*, on obtient le résultat cherché.* □

Solution de l'Exercice 3.7.4 *D'après la formule de Itô : le coefficient de diffusion de l'équation de* Y_t *est*

$$u'(Y_t)\,Y_t^{\alpha}$$

il suffit donc de prendre $u'(x)\,x^{\alpha} = 1$*, c'est à dire* $u(x) = x^{1-\alpha}/(1-\alpha)$*. On obtient :*

$$dY = dB_t + \left(c(1-\alpha)Y_t - \frac{\alpha}{2(1-\alpha)Y_t}\right)\,dt\ .$$

□

Solution de l'Exercice 3.7.5 *Il suffit d'appliquer la formule de Itô au membre de droite de l'égalité (3.44) pour montrer que* X_t *défini par cette même égalité est solution de l'équation (3.42). Le Théorème d'existence et d'unicité prouve que cette solution est unique.*

L'équation 3.45 avec coefficients constants admet pour solution

$$X_t = \xi \exp\left[(F - \frac{1}{2}|G|^2)\,t + \langle G, dB_s\rangle\right]\ .$$

Si $|G| = 0$*, l'exercice est trivial. Si* $|G| \neq 0$*, alors* $W_t = \langle G, dB_s\rangle/|G|$ *est un mouvement brownien standard, posons* $\mu = F - \frac{1}{2}|G|^2$ *et* $\sigma = |G|$*, alors*

$$\frac{1}{t}(\mu\,t + \sigma\,W_t) \to \mu < 0 \quad p.s.$$

car $W_t/t \to 0$*. Donc*

$$X_t = X_0\,\exp\left(t\,\left[\frac{1}{t}(\mu\,t + \sigma\,W_t)\right]\right) \to 0 \quad p.s.$$

□

Solution de l'Exercice 3.7.6 *Posons* $V_t = E(X_t^2)$*. D'après la formule de Itô*

$$\dot V_t = 2\,F_t\,V_t + G^2 \le -2\,\alpha\,V_t + G^2\ .$$

Le résultat s'obtient à l'aide du Lemme de Gronwall. □

Chapitre 4

Application en finance

4.1 Introduction

La bourse offre un grande variété de produits financiers. *Certains produits ne garantissent pas de revenu, d'autres proposent plus de garanties. Voici quelques intruments classiques (liste très succinte !) :*

Actions, *représente une fraction de l'entreprise. Elle donne un droit de vote aux assemblées d'actionnaires. L'actionnaire a droit au dividende (si la société réalise des profits et décide d'en distribuer une partie, au lieux de réinvestir). Une action est une "brique" d'une société : elle correspond à une part de l'actif net de la société (fonds de commerce et tous les biens possédés de l'entreprise, déduction faite de ses dettes). En achetant une action on court le risque de perdre, au plus, le prix de l'action, même en cas de faillite. Certains types d'action ne donnent pas les mêmes droits (actions à dividendes prioritaires et certificats d'investissements n'ont pas de droit de vote).*

Obligations, *représente la fraction d'une créance sur l'organisme émetteur (celui–ci vous doit de l'argent). Les obligations sont émises par l'État, les collectivités publiques et les entreprises, publiques ou privées. La valeur nominale d'une obligation est le prix facial du titre, celui qui servira de base de remboursement et au calcul des intérêts. Une obligation peut être émise à un prix inférieur à sa valeur nominale : on dit qu'il y a prime d'émission. À l'échéance d'une obligation, l'émetteur devra la rembourser à son détenteur, au minimum à la valeur nominale. S'il la rembourse plus cher, on dit qu'il y a prime de remboursement. Une obligation donne droit à un intérêt exprimé en pourcentage de sa valeur nominale. Une obligation est cotée en bourse donc cessible à tout moment.*

Titre composite, *à la fois proche de l'action et de l'obligation : les titres participatifs et les obligations convertibles. Un titre participatif est un emprunt perpétuel émis par des sociétés appartenant à l'etat. Il offre à la fois une rémunération fixe (un pourcentage de sa valeur nominale), et une rémunération variable fonction d'un indicateur (évolution du chiffre d'affaires, du résultat etc.). Sa rémunération peut être comprise entre un plancher et un plafond. Une obligation convertible reprend les principales caractéristiques de l'obligation mais peut être convertie en action de l'émetteur, dans des conditions définies initialement. Elle offre une rémunération inférieure à la moyenne des obligations de risque et de durée identique. Le jour de son échéance, une obligation convertible est soit transformée en action, soit remboursée à sa valeur nominale.*

Contrat à terme, *engage deux parties. L'acheteur s'engage à acquérir à une date ultérieure, appelée échéance, un bien à un prix fixé aujourd'hui. Il peut porter sur des matières premières mais également sur des taux d'intérêt ou des obli-*

gation : ce sont alors des contrats à terme financiers. Un contrat à terme peut être revendu (par l'acheteur initial) ou racheté par le vendeur initial jusqu'à son échéance.

Bon de souscription, *permet de souscrire une action nouvelle à un prix fixé le jour de son émission, jusqu'à une date déterminée.*

Nous nous intéresserons plus particulièrement au problème des options. En effet, c'est un des domaines de la finance où l'analyse stochastique brownienne s'est montrée la plus fructueuse. Les premiers travaux, de Black–Scholes [2] *et de* Merton [19], *ont porté sur l'évaluation et la couverture des options.*

Contrat d'option négociable

A. Définition

Une option est un titre donnant droit à son détenteur, et non l'obligation, *d'acheter ou de vendre (suivant la nature de l'option), une certaine quantité d'un actif financier, à une date convenue et à un prix fixé d'avance. Les éléments d'un contrat d'option sont :*

- *la nature de l'option :* option d'achat *(call) ou* option de vente *(put).*
- L'actif sous–jacent *(titre, valeur, instrument financier ou matière première) sur lequel porte l'option ;*
- *Le* montant, *i.e. la quantité d'actif sous–jacent à vendre ou à acheter.*
- *Le* prix d'exercice *de référence auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option ;*
- L'échéance, *en principe trimestrielle, au delà de laquelle l'option ne pourra plus être exercée ou négociée*[1] *;*

Ces paramètres restent constants pendant toute la durée de vie du contrat.

L'option a un un prix, appelée prime. *Lorsque l'option est cotée sur un marché organisé, la valeur de la prime est donnée par ce marché. En l'absence de cotation, le problème du calcul de la prime se pose. De même pour une option cotée, il est intéressant d'évaluer cette prime afin de détecter une anomalie du marché.*

L'acheteur de l'option a le droit, mais non l'obligation, *d'exercer son option jusqu'à l'échéance fixée, c'est–à–dire d'acheter (option d'achat) ou de vendre (option de vente) l'actif sous–jacent, au prix d'exercice et pour la quantité prévus dans le contrat, une somme correspondant au cours coté de l'option (le* premium*), qui reste définitivement acquise à ce dernier.*

Le vendeur de l'option est dépendant de la décision de l'acheteur *: en cas d'exercice de l'option par ce dernier, il est tenu de livrer (option d'achat) ou de payer (option de vente) la quantité d'actif sous–jacent prévue au contrat, au prix d'exercice fixé.*

1. On ne parlera ici que des options *européennes* qui ne peut être exercée qu'à l'échéance. Il existe aussi les options *américaines* qui peuvent être exercées à n'importe quel instant précédent l'échéance. Il existe également les options *asiatiques* qui sont de type européen (exerçable uniquement à échéance) dont le prix de référence est calculé selon la valeur moyenne du prix du titre à des dates fixées à l'avance au cours de la vie de l'option.

Prenons, à titre d'exemple, le cas d'une option d'achat (call) d'échéance T, sur une action dont le cours à la date t est P_t. On note q le prix d'exercice. À l'échéance, deux cas se présentes :

(i) *si $P_T < q$, le détenteur de l'option n'a pas intérêt à exercer son option,*

(ii) *si $P_T > q$, le détenteur exerce son option et réalise un profit de $[P_T - q]$.*

À l'échéance, la valeur de l'option d'achat est donc de

$$[P_T - q]^+ \ .$$

En cas d'exercice (cas (ii)), le vendeur de l'option doit être en mesure de fournir une action au prix q. Il doit donc produire, à l'échéance une richesse égale à $[P_T - q]^+$. Au moment de la vente de l'option, que l'on fixe à $t = 0$, le cours P_T est inconnu et deux questions se posent :

(Q1) *Combien faut–il payer à l'acheteur de l'option ? Pour répondre à cette question, il faut évaluer, à l'instant $t = 0$, la richesse $[P_T - q]^+$ disponible à la date T. C'est le problème de* l'évaluation *ou* pricing

(Q2) *Le vendeur touche la prime q à la date $t = 0$. Comment parviendra–t–il à produire la richesse $[P_T - q]^+$ à l'échéance ? C'est le problème de* stratégie de couverture.

B. Arbitrage

Les questions que l'on vient voir ne peuvent se poser qu'avec un minimum d'hypothèses. La plus importante est que, dans un marché, il est impossible de faire des profits sans prendre des risques. *On dit qu'il n'y a pas* d'opportunité d'arbitrage. *Ceci ce traduit par des hypothèses mathématiques développées plus loin.*

Cette hypothèse, induit une relation entre option d'achat et option de vente. Supposons qu'il est possible d'emprunter ou de placer de l'argent à un taux r constant.

Soit $\mathcal{O}_t^a$ [resp. $\mathcal{O}_t^v$] le prix de l'option d'achat [resp. de vente]. Supposons qu'ils ont la même date d'échéance T et le même prix d'exercice q. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, on a la relation suivant, dite de parité call/put *:*

$$\mathcal{O}_t^a - \mathcal{O}_t^v = P_t - q\, e^{-r\,(T-t)} \ , \quad 0 \le t \le T \ . \tag{4.1}$$

Exemple 4.1.1 (Opportunité d'arbitrage) *Supposons qu'à un instant t, (4.1) ne soit pas vérifiée, par exemple : $\mathcal{O}_t^a - \mathcal{O}_t^v > P_t - q\, e^{-r\,(T-t)}$. On achète alors une action et une option de vente et on vend une option d'achat. À cet instant t, cette opération nous coûte donc :*

$$\kappa = \mathcal{O}_t^a - \mathcal{O}_t^v - P_t$$

Si $\kappa > 0$, on place cette somme au taux r jusqu'à l'échéance, sinon on emprunte au même taux. À la date T, deux cas se présentent :

(i) *Si $P_T > q$ alors on exerce son option d'achat, on livre l'action, on encaisse la somme q et on solde l'emprunt ou le prêt, on obtient donc une richesse*

$$q + e^{r\,(T-t)}(\mathcal{O}_t^a - \mathcal{O}_t^v - P_t) > 0 \ .$$

(*ii*) *Si $P_T \leq q$, alors on exerce son option de vente et on solde l'emprunt ou le prêt. On obtient donc une richesse*

$$q + e^{r\,(T-t)}(\mathcal{O}_t^a - \mathcal{O}_t^v - P_t) > 0 \ .$$

Dans les deux cas on a réalisé un profit : c'est un exemple d'arbitrage (pour plus de détails sur ces relations d'arbitrage voir Cox–Rubinstein [7]*).*

C. Modèle de Black & Scholes

Bien que les relations d'arbitrage donnent beaucoup d'informations, elles ne permettent pas d'évaluer les prix (ce qui est le but rechercher). Il est nécessaire de modéliser l'évolution des cours. Black et Scholes ont les premiers établi un modèle conduisant à une formule explicite pour le prix d'une option d'achat européenne et une stratégie de gestion qui permet au vendeur de l'option de se couvrir parfaitement, i.e. d'éliminer totalement le risque. Dans ce modèle, le prix de l'option d'achat est la somme exacte dont on doit disposer initialement pour suivre la strategie de couverture et produire ainsi exactement la richesse $[P_t - q]^+$. Cette formule dépend d'un paramètre, appelé coefficient de volatilité*, qui n'est pas directement observable et qu'il est nécessaire d'estimer.*

La suite du chapitre se décompose de la façon suivante :

- *Nous présentons un modèle d'évolution du prix des titres d'un marché pour lequel nous développons la notion de processus de portefeuille et de consommation. Nous décrirons dans quelle mesure une couple portefeuille/consommation est "admissible".*
- *Dans le cadre des* biens contigents*, un peu plus général que celui des options, nous répondrons aux questions* (Q1) *et* (Q2)*. Nous présenterons les résultats de Black & Scholes. Nous ne considérons que le cas des options européennes (les options américaines font apparaître des techniques de temps d'arrêt : à quel moment faut–il exercer son option ?).*
- *Nous nous intéresserons enfin au problème du choix optimal de processus de portefeuille/consommation.*

4.2 Portefeuille et consommation

4.2.1 Définitions

On considère un marché composé de $d+1$ titres (ou actifs) négociés en temps continu. Dans tout ce chapitre on se fixe un horizon fini $T < \infty$. À l'instant t, P_t^i désigne le prix de l'actif i $(i = 0, \dots, d)$.

on suppose que l'un des actifs $(i = 0)$ est sans risque*, i.e. son prix évolue suivant l'équation différentielle ordinaire :*

$$\dot{P}_t^0 = r_t\, P_t^0 \ , \quad P_0^0 = p^0 \ , \tag{4.2}$$

(le taux d'intérêt instantané r est un processus stochastique).

Le cours des d autres actifs "à risque" est régi par le système linéaire d'EDS :

$$dP_t^i = P_t^i\, b_t^i\, dt + P_t^i \sum_{j=1}^{d} \sigma_t^{ij}\, dB_t^j \ , \quad P_0^i = p^i \ , i = 1, \ldots, d \ . \tag{4.3}$$

où $B = [B^1 \cdots B^n]^*$ est un $\mathcal{F}_t$–mouvement brownien standard à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ (on suppose que $\mathcal{F}_t$ est la tribu naturelle de B).

Le processus de taux d'intérêt r, *le vecteur des* taux moyens de rendement

$$b_t \triangleq \left[b_t^1 \cdots b_t^d\right]^*$$

et la matrice de dispersion *(généralisation du coefficient de* volatilité*)*

$$\sigma_t = [\sigma_t^{ij}]_{1 \le i,j \le d}$$

sont des processus $\mathcal{F}_t$–adaptés (à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^{d\times d}$ respectivement) et bornés uniformément en $[0,T] \times \Omega$.

On pose $a_t \triangleq \sigma_t \sigma_t^*$ et on suppose :

$$a_t \ge \varepsilon\, I > 0 \ , \quad 0 \le t \le T \ , \quad p.s. \tag{4.4}$$

Cette hypothèse signifie que le marché est complet *(cf.* Bensoussan [1]*). Sous cette condition, σ_t^* admet une inverse et*[2]

$$\left|[\sigma_t^*]^{-1}\, x\right| \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, |x| \ , \quad x \in \mathbb{R}^d \ , \quad 0 \le t \le T \ , \quad p.s. \tag{4.5}$$

Imaginons qu'un investisseur dispose d'une dotation initiale $x \ge 0$. *Il souhaite investir dans les $d+1$ titres décrits précédemment.*

Définition 4.2.1 *On pose :*

$$N_t^i \triangleq \text{ nombre de parts du titre } i \text{ que possède l'investisseur à l'instant } t.$$

---

2. Pour une matrice M de dimension $d\times d$, on définit la norme $|M| \triangleq \sup_{x\neq 0}(|Mx|/|x|)$. On a $|M| = |M^*|$. À l'aide de l'inégalité de Cauchy–Schwarz

$$|x^*\, M^*\, y| = |y^*\, M\, x| \le |y|\, |Mx| \le |y|\, |M|\, |x| \ .$$

Prenons $y = M^*\, x$, on obtient $|M^*\, x| \le |M|\, |x|$ et donc $|M^*| \le |M|$. L'inégalité inverse se montre de la même manière.

Maintenant (4.4) implique que σ_t^* est inversible. En effet, dans le cas contraire, il existe $x \neq 0$ tel que $\langle x, a_t\, x\rangle = |\sigma_t^*\, x|^2 = 0$. Posons $x = [\sigma_t^*]^{-1}\, y$, on peut réécrire (4.4) comme

$$|[\sigma_t^*]^{-1}\, y| \le \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\, |y|$$

pour tout $y \in \mathbb{R}^d$, $0 \le t \le T$, p.s., c'est à dire $|[\sigma_t^*]^{-1} \le 1/\sqrt{\varepsilon}$. Comme $|\sigma_t^{-1}| = |[\sigma_t^*]^{-1}|$, il y a équivalence entre (4.4) et (4.5).

$N = [N^0, \ldots, N^d]$ *est appelée* stratégie de gestion. *La* valeur du portefeuille *ou* processus de richesse *à l'instant t est donc définie par*

$$X_t = \langle N_t \,,\, P_t \rangle \;, \quad X_0 \equiv x = \langle N_0 \,,\, p \rangle \;. \tag{4.6}$$

La somme investie sur le i–ème titre ($1 \le i \le d$) est

$$\Pi_t^i \stackrel{\triangle}{=} N_t^i \, P_t^i$$

Si le négoce des titres se fait à des instants discrets, disons à t et à $t+h$, et s'il n' y a pas injection ou retrait de fonds, alors

$$X_{t+h} - X_t = \langle N_t \,,\, P_{t+h} - P_t \rangle \;. \tag{4.7}$$

Par ailleurs, si l'investisseur choisit à l'instant $t+h$ de consommer un montant de $h\,C_{t+h}$ (et donc de déduire sa "richesse" d'autant) alors (4.7) doit être remplacé par

$$X_{t+h} - X_t = \langle N_t \,,\, P_{t+h} - P_t \rangle - h\, C_{t+h} \;. \tag{4.8}$$

En temps continu (4.8) devient

$$dX_t = \langle N_t \,,\, dP_t \rangle - C_t \, dt \;.$$

Avec (4.2), (4.3), (4.6), on a

$$dX_t = (r_t \, X_t - C_t)\, dt + \langle b_t - r_t \, \underline{1} \,,\, \Pi_t \rangle \, dt + \langle \Pi_t \,,\, \sigma_t \, dB_t \rangle \tag{4.9}$$

où $\underline{1} \stackrel{\triangle}{=} [1 \cdots 1]^* \in \mathbb{R}^d$. Cette équation admet une unique solution explicite :

$$X_t = e^{\int_0^t r_u \, du} \, x + \int_0^t e^{\int_s^t r_u \, du} \, \left(\langle \Pi_s \,,\, b_s - r_s \underline{1} \rangle - C_s \right) ds + \int_0^t e^{\int_s^t r_u \, du} \langle \Pi_s \,,\, \sigma_s \, dB_s \rangle \;. \tag{4.10}$$

Définition 4.2.2 *Un processus de portefeuille Π est un processus de $[M^2_{loc}(0,T)]^d$. Un processus de* consommation *C est un processus positif tel que $\int_0^T C_t \, dt < \infty$ p.s. Les composantes de Π peuvent devenir négatives ce qui s'interprète comme une* vente à découvert. *La quantité investie sur le titre sans risque $\Pi_t^0 = X_t - \langle \Pi_t \,,\, \underline{1} \rangle$ peut aussi devenir négative, ce qui signifie que l'on emprunte au taux r_t.*

Définition 4.2.3 *La paire (Π, C), composée d'un processus de portefeuille et d'un processus de consommation, est dite admissible pour une dotation initiale $x \ge 0$ si le processus de richesse (4.6) satisfait*

$$X_t \ge 0 \,, \;\; 0 \le t \le T \,, \;\; p.s. \tag{4.11}$$

4.2.2 Changement de loi de probabilité

Posons

$$\theta_t \triangleq (\sigma_t)^{-1} (b_t - r_t \underline{1}) \tag{4.12}$$

et borné, alors

$$Z_t \triangleq \exp\left(\int_0^t \langle \theta_s \, , \, dB_s \rangle - \frac{1}{2} \int_0^t |\theta_s|^2 \, ds \right) \tag{4.13}$$

est une martingale, on peut donc définir une nouvelle mesure de probabilité

$$d\tilde{P} \triangleq Z_T \, dP \tag{4.14}$$

sous laquelle

$$\tilde{B}_t \triangleq B_t + \int_0^t \theta_s \, ds \tag{4.15}$$

*est un $\mathcal{F}_t - \tilde{P}$–mouvement brownien. X est alors solution de l'*EDS

$$dX_t = (r_t \, X_t - C_t) \, dt + \langle \Pi_t \, , \, \sigma_t \, d\tilde{B}_t \rangle \ , \quad X_0 = x \ . \tag{4.16}$$

En ce sens, $\tilde{P}$ est appelée loi corrigée du risque *(comparer avec l'Équation (4.9)). La solution explicite de (4.16) est*

$$X_t \, e^{-\int_0^t r_u \, du} + \int_0^t e^{-\int_0^s r_u \, du} \, C_s \, ds = x + \int_0^t e^{-\int_0^s r_u \, du} \, \langle \Pi_s \, , \, \sigma_s \, d\tilde{B}_s \rangle \ . \tag{4.17}$$

Lemme 4.2.4 *Soit* (Π, C) *une paire portefeuille/consommation optimale, alors*

$$\tilde{E} \int_0^T e^{-\int_0^t r_u \, du} \, C_t \, dt \le x \ . \tag{4.18}$$

Preuve *Pour une paire admissible* (Π, C)*, le terme de gauche de (4.17) est positif et le terme droite est une $\mathcal{F}_t$–$\tilde{P}$–martingale locale.*

On en déduit que le terme de gauche, mais aussi $X_t \, \exp(-\int_0^t r_u \, du)$, sont des $\tilde{P}$–sur–martingales (car une martingale locale positive est une sur–martingale [à vérifier]). On pose :

$$\tau = \inf\{t \le T \, ; \, X_t = 0\} \wedge T \ . \tag{4.19}$$

D'après l'Exercice 1.5.2

$$X_t = 0 \ , \quad \tau \le t \le T \ , \quad p.s. \ sur \ \{\tau < T\} \ .$$

Si $\tau < T$, on dit qu'il y a faillite *à l'instant τ.*

D'après les propriétés des sur–martingales, on a

$$\tilde{E} \left(X_T \, e^{-\int_0^T r_u \, du} + \int_0^T e^{-\int_0^t r_u \, du} \, C_t \, dt \right) \le x \tag{4.20}$$

On en déduit le lemme. □

La condition (4.18) est aussi suffisante au sens de la

Proposition 4.2.5 *On se donne $x \geq 0$ et un processus de consommation C qui vérifie (4.18). Alors il existe un processus de portefeuille Π tel que (Π, C) est admissible pour la dotation initiale x.*

Preuve *Soit $D = \int_0^T C_t \, e^{-\int_0^t r_u \, du} dt$ et*

$$\xi_t \triangleq \tilde{E}\left(\int_t^T C_s \, e^{-\int_0^s r_u \, du} ds \middle| \mathcal{F}_t \right) + (x - \tilde{E}D) \, e^{\int_0^t r_u \, du} \; .$$

On a donc

$$\xi_t = e^{\int_0^t r_u \, du} \left(x - m_t - \int_0^t C_s \, e^{-\int_0^s r_u \, du} ds \right) \tag{4.21}$$

où

$$m_t \triangleq \tilde{E}(D|\mathcal{F}_t) - \tilde{E}D = \frac{E(DZ_T|\mathcal{F}_t)}{E(Z_T|\mathcal{F}_t)} - E(DZ_T)$$

(cf. formule de Bayes, Proposition 2.5.5). Comme $\mathcal{F}_t$ est une filtration brownienne, P–presque toutes les trajectoire de la martingale

$$N_t \triangleq E(DZ_T|\mathcal{F}_t) \; , \quad 0 \leq t \leq T$$

sont continues et d'après la Proposition 2.3.4 il existe un processus $Y \in [M^2_{loc}(0,T)]^d$ tel que

$$N_t = E(D \, Z_T) + \int_0^t \langle Y_s \, , \, dB_s \rangle \; , \quad 0 \leq t \leq T \; , \quad P\text{–}p.s. \tag{4.22}$$

Par ailleurs, $m_t = u(N_t, Z_t) - E(D \, Z_T)$ avec $u(x,y) = x/y$. D'après la formule de Itô, en posant $\varphi_t \triangleq (Y_t + N_t\theta_t)/Z_t$, on obtient

$$m_t = \int_0^t \langle \varphi_s \, , \, d\tilde{B}_s \rangle \; , \quad 0 \leq t \leq T \tag{4.23}$$

(utiliser l'équation $dZ_t = -Z_t \, \theta_t \, dB_t$ et (4.15)).

Maintenant posons :

$$\Pi_t \triangleq e^{\int_0^t r_u \, du} \, (\sigma_t^*)^{-1} \, \varphi_t \tag{4.24}$$

de telle sorte que (4.21) devienne (4.17) en prenant $X = \xi$.

$\Pi \in [M^2_{loc}(0,T)]^d$ se déduit de (4.5), du fait que $Y \in [M^2_{loc}(0,T)]^d$, de la bornitude de θ et de la continuité de Z et N (la continuité de N est une conséquence de (4.22)). □

4.3 Évaluation (pricing) des options

Nous considérons une généralisation de la notion d'option introduite au début de ce chapitre :

Définition 4.3.1 *Un* bien contingent *(ou actif conditionnel) est un instrument financier composé d'un taux de remboursement g et d'une rémunération finale f_T à maturité. g est un $\mathcal{F}_t$–processus positif et f_T est une v.a.r. $\mathcal{F}_T$–mesurable positif. On suppose q'il existe $\mu > 1$ tel que*

$$E\left(f_T + \int_0^T g_t\,dt\right)^{\mu} < \infty\ . \tag{4.25}$$

Une option est un cas particulier de bien contingent avec $g \equiv 0$ et $f_T = (P_T^v - q)^+$.

Définition 4.3.2 *On se donne $x > 0$ et (Π, C) une paire admissible portefeuille/consommation pour l'investissement initial x. La paire (Π, C) est appelée* stratégie de couverture *contre le bien contingent (g, f_T) si*

$$C_t = g_t\ ,\quad 0 \le t \le T\ ,\quad X_T = f_T\ ,$$

p.s. où X est le processus d'enrichissement associé à la paire (Π, C) avec dotation initiale $X_0 = x$.

Le concept de stratégie de couverture est introduit afin de permettre une solution au problème d'évaluation du bien contingent : quel est le prix équitable à payer, à l'instant $t = 0$, pour un bien contingent ? S'il existe une stratégie de couverture qui est admissible pour une dotation initiale $X_0 = x$, l'agent qui achète alors à l'instant $t = 0$ le bien contingent (g, f_T) au prix x aurait pû, à la place, investir sa richesse de telle sorte à dupliquer la rémunération du bien contingent. Le prix du bien contigent ne doit donc pas être supérieur à x. Peut–on également, avec une dotation initiale strictement inférieur à x, dupliquer le gain du bien contingent ? La réponse peut être affirmative.

Exercice : *Considérons le cas $r \equiv 0$, $d = 1$, $b_1 \equiv 0$ et $\sigma \equiv 1$. On se donne le bien contingent $g \equiv 0$ et $f_T \equiv 0$, donc il existe trivialement une stratégie de couverture $x = 0$, $C \equiv 0$ et $\Pi \equiv 0$. Montrer que pour tout $x > 0$, il existe une stratégie avec $X_0 = x$.*

Définition 4.3.3 *Le* prix équitable *d'un bien contingent est la plus petite somme $x \ge 0$ qui permet la mise en œuvre d'une stratégie du couverture avec dotation initiale x.*

Nous allons montrer que sous la condition (4.4) et les hypothèses la précédent, le bien contingent possède un prix équitable.

Lemme 4.3.4 *Soit un bien contingent (g, f_T), on définit*

$$Q \stackrel{\triangle}{=} e^{-\int_0^T r_u\,du} f_T + \int_0^T e^{-\int_0^s r_u\,du} g_s\,ds\ . \tag{4.26}$$

Alors $\tilde{E}Q < \infty$ et $\tilde{E}Q$ est inférieur au prix équitable de (g, f_T).

Preuve *Comme r est uniformément borné en t et ω, on a $Q \leq L(f_T + \int_0^T g_s\, ds)$ où L est une constante déterministe. D'après (4.13), pour tout $\nu \geq 1$:*

$$\begin{aligned}(Z_T)^\nu &= \exp\left(\int_0^T \langle -\nu\,\theta_s\,,\, dB_s\rangle - \frac{\nu}{2}\int_0^T |\theta_s|^2\, ds\right)\\ &= \exp\left(\int_0^T \langle -\nu\,\theta_s\,,\, dB_s\rangle - \frac{1}{2}\int_0^T |\nu\,\theta_s|^2\, ds\right) \times \exp\left(\frac{\nu(\nu-1)}{2}\int_0^T |\theta_s|^2 ds\right)\end{aligned}$$

et comme $|\theta|$ est borné pour une constante K, on a

$$EZ_T^\nu \leq \exp\left(\frac{\nu(\nu-1)}{2}K^2T\right) < \infty\ .$$

Avec μ vérifiant (4.25) et ν donné par $(1/\nu)+(1/\mu)=1$, l'inégalité de Hölder implique :

$$\tilde{E}Q \leq L\,E\left(Z_T\left(f_T + \int_0^T g_s\, ds\right)\right) \leq L\,(EZ_T^\nu)^{1/\nu}\left(E\left(f_T + \int_0^T g_s\, ds\right)^\mu\right)^{1/\mu} < \infty\ .$$

Maintenant, soit (Π, C) est une stratégie du couverture contre le bien contingent (g, f_T) et le processus de richesse X de condition initiale $X_0 = x$. Avec la Définition 4.3.2 et (4.26), on réécrit (4.20) comme $\tilde{E}Q \leq x$. □

Théorème 4.3.5 *Sous la condition (4.4) et les hypothèses la précédent, le prix équitable du bien contingent (g, f_T)*

$$\tilde{E}Q = \tilde{E}\left(e^{-\int_0^T r_u\, du}\, f_T + \int_0^T e^{-\int_0^s r_u\, du}\, gs\, ds\right)\ .$$

De plus, il existe une stratégie de couverture avec condition initiale $X_0 = x$.

Preuve *Posons*

$$\xi_t \triangleq e^{\int_0^t r_u\, du}\left(\tilde{E}Q + m_t - \int_0^T e^{\int_0^t r_u\, du}\, g_s\, ds\right)\ , \tag{4.27}$$

où $m_t \triangleq \tilde{E}(Q|\mathcal{F}_t) - \tilde{E}(Q)$. En utilisant la même démarche que celle de la preuve de la proposition 4.2.5 en remplaçant D par Q, on définit Π par (4.24) et $C \equiv g$, de telle sorte que (4.27) devient (4.17) en identifiant $X = \xi$, $x = \tilde{E}Q$. Mais alors, (4.27) peut aussi s'écrire :

$$X_t = \tilde{E}\left(e^{-\int_t^T r_u\, du}\, f_T + \int_0^T e^{-\int_t^s r_u\, du} g_s\, ds \middle|\, \mathcal{F}_t\right)\ ,\qquad 0 \leq t \leq T \tag{4.28}$$

d'où l'on tire que $X_t \geq 0,\ 0 \leq t \leq T$ et $X_T = f_T$ p.s. □

4.3.1 Modèle de Black & Scholes

A. Le modèle

Nous supposons $d = 1$ *(un actif sans risque et un actif risqué) et les coefficients constants :*

$$r_t \equiv r > 0 \ , \quad b_t^1 \equiv b \ , \quad \sigma_t^{11} \equiv \sigma > 0 \ .$$

L'évolution du prix de l'actif sans risque est donné par

$$P_t^0 = p^0 \, e^{rt} \ ,$$

celui de l'actif risqué par

$$dP_t^1 = b \, P_t^1 \, dt + \sigma P_t^1 \, dB_t \ , \quad P_0^1 = p^1 \ . \tag{4.29}$$

Cette équation admet la solution explicite

$$P_t^1 = p^1 \ \exp\left(b \, t - \frac{\sigma^2}{2} \, t + \sigma \, B_t \right)$$

P_t^1 *suit donc une loi log–normale. En fait* P^1 *vérifie (4.29) si et seulement si le processus* $\log(P^1)$ *est la somme d'un mouvement brownien et d'une dérive constante (linéaire en* t*). Cela conduit aux propriétés suivantes :*

Proposition 4.3.6 *Le processus* P^1 *est continue, ses accroissements relatifs sont indépendants, i.e.*

$$\frac{P_t^1 - P_s^1}{P_s^1} \perp\!\!\!\perp \sigma(P_u^1 \, ; \, u \leq s) \ , \quad 0 \leq s \leq t \ ,$$

et stationnaires, i.e.

$$loi \left(\frac{P_t^1 - P_s^1}{P_s^1} \right) = loi \left(\frac{P_{t-s}^1 - P_0^1}{P_0^1} \right) \ , \quad 0 \leq s \leq t \ .$$

Ces propriétés sont des hypothèses "raisonnables" pour décrire l'évolution du cours de l'action.

B. Changement de loi de probabilité

Sous la probabilité $\tilde{P}$*, définie par (4.14), on a la représentation :*

$$dP_t^1 = r \, P_t^1 dt + \sigma P_t^1 \, d\tilde{B}_t \ , \quad P_0^1 = p^1 \ ,$$

Pour l'option consistant à acheter une part de l'actif sous–jacent à l'échéance T *au prix* q*, on a, d'après (4.28),*

$$X_t = \tilde{E} \left[e^{-r(T-t)} (P_T^1 - q)^+ \middle| \, \mathcal{F}_t \right] \ , \quad 0 \leq t \leq T \ . \tag{4.30}$$

C. Solution explicite du problème de Cauchy

Posons :

$$v(t,x) \triangleq \begin{cases} x\,\Phi(\rho_+(T-t,x)) - q\,e^{-r\,(T-t)}\,\Phi(\rho_-(T-t,x)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \textit{pour} \quad 0 \le t < T,\ x \ge 0\ , \\ \\ (x-q)^+ \quad \textit{si} \quad t = T,\ x \ge 0\ , \end{cases} \tag{4.31}$$

avec

$$\rho_\pm(t,x) \triangleq \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\log\frac{1}{q} + t\left(r \pm \frac{\sigma^2}{2}\right) \quad \textit{et} \quad \Phi(x) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}dz\ .$$

La fonction $v(t,x)$ est solution du problème de Cauchy(3)

$$-\dot v + r\,v = \frac{1}{2}\,\sigma^2\,x^2\,v'' + v\,x\,v' \quad \textit{sur} \quad [0,T[\times]0,\infty[$$

avec condition finale

$$v(T,x) = (x-q)^+\ , \quad x \ge 0\ .$$

Elle vérifie également les conditions du Théorème de Feynman–Kac. On conclue de ce dernier théorème et de la propriété de Markov appliquée à (4.30) que

$$X_t = v(t, P_t^1)\ , \quad 0 \le t \le T\ , \quad p.s. \tag{4.32}$$

On a donc une formule explicite pour la valeur d'une option à l'instant t en terme du prix courant P_t^1 de l'actif 1, du temps à maturité $T-t$ et du prix d'exercice q.

4.4 Investissement et consommation optimal. Cas général

On se donne maintenant

- β, *un* processus d'escompte $\mathcal{F}_t$–*adapté,*
- *une* fonction d'utilité $U : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+$ *strictement croissante, strictement concave et de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :*

$$U(0) = 0\ , \quad U'(\infty) \triangleq \lim_{C\to\infty} U'(C) = 0\ .$$

Éventuellement $U'(0^+) = \infty$.

Étant donnée une dotation initiale $x \ge 0$, l'investisseur veut choisir une paire admissible (Π, C) de processus de portefeuille/consommation dans le but de maximiser la fonction coût

$$V_{\Pi,C}(x) \triangleq E\int_0^T e^{\int_0^s -\beta_u\,du}\,U(C_s)\,ds\ .$$

3. Soit $v : [0,T]\times\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, dans ce chapitre nous utiliserons les notations suivantes : $\dot v(t,x) = \partial v(t,x)/\partial t$, $v'(t,x) = \partial v(t,x)/\partial x$, $v''(t,x) = \partial^2 v(t,x)/\partial x^2$,.

La fonction valeur *de ce problème est*

$$V(x) \triangleq \sup \{V_{\Pi,C}(x)\,;\,(\Pi,C)\ \textit{admissible}\}\ . \tag{4.33}$$

D'après la condition nécessaire d'admissibilité (4.18), $V(0) = 0$.

On déduit de la Proposition 4.2.5, pour un processus de consommation C, *(4.18) est vérifié si et seulement si il existe un portefeuille* Π *tel que* (Π, C) *est admissible pour* x. *On définit*

$$\mathcal{D}(x) \triangleq \left\{ \textit{processus de consommation } C\ ;\ \tilde{E}\int_0^T e^{-\int_0^t r_u\,du}\, C_t\,dt = x \right\}\ . \tag{4.34}$$

Dans la maximisation de la fonction valeur (4.33) on peut donc ignorer Π *et seulement considérer* $C \in \mathcal{D}(x)$.

Proposition 4.4.1

$$V(x) = \sup_{C\in\mathcal{D}(x)} E\int_0^T e^{\int_0^t -\beta_s\,ds}\, U(C_t)\,dt\ ,\quad x \geq 0\ .$$

Preuve *Supposons que* (Π, C) *est admissible pour* $x > 0$, *posons*

$$y \triangleq \tilde{E}\int_0^T e^{-\int_0^t r_u\,du}\, C_t\,dt \leq x\ .$$

Si $y > 0$, *on définit* $\bar{C}_t = \frac{x}{y} C_t$, $\bar{C} \in \mathcal{D}(x)$. *Il existe un portefeuille* $\bar{\Pi}$ *tel que* $(\bar{\Pi}, \bar{C})$ *est admissible pour* x *et*

$$V_{\Pi,C}(x) \leq V_{\bar{\Pi},\bar{C}}(x)\ . \tag{4.35}$$

Si $y = 0$, *alors* $C_t = 0$, *pour presque tout* t, *presque sûrement. On peut donc trouver une constante* $c > 0$ *telle que* $\bar{C}_t \equiv c \in \mathcal{D}(x)$. *À nouveau, (4.35) est vérifiée pour un certain* $\bar{\Pi}$ *choisi tel que* $(\bar{\Pi}, \bar{C})$ *est admissible pour* x. □

Définition 4.4.2 (La fonction** $\mathcal{I}(x)$**) *La bijection* $U' : [0,\infty] \mapsto [0, U'(0)]$ *est strictement décroissante, elle admet donc une inverse* $\mathcal{I} : [0, U'(0)] \mapsto [0,\infty]$, *que l'on étend à* $\mathcal{I}(y) = 0$ *pour* $y > U'(0)$. *On a* $\mathcal{I}(0) = \infty$ *et* $\mathcal{I}(\infty) = 0$. *On vérifie aisément la relation suivante :*

$$U(\mathcal{I}(y)) - y\,\mathcal{I}(y) \geq U(c) - y\,c\ ,\quad 0 \leq c < \infty\ ,\quad 0 < y < \infty\ . \tag{4.36}$$

Définition 4.4.3 (Les fonction** $\mathcal{X}(y)$ **et** $\mathcal{Y}(x)$**) *On définit la fonction* $\mathcal{X}$ *de* $[0,\infty]$ *à valeurs dans* $[0,\infty]$ *par*

$$\mathcal{X}(y) \triangleq \tilde{E}\int_0^T e^{\int_0^s r_u\,du}\, \mathcal{I}\left(y\,Z_s\, e^{\int_0^s (\beta_u - r_u)\,du}\right)\,ds\ . \tag{4.37}$$

On suppose que

$$\mathcal{X}(y) < \infty \ , \quad 0 < y < \infty \ . \tag{4.38}$$

On pose

$$\bar{y} \stackrel{\triangle}{=} \sup\{y \geq 0\,;\ \mathcal{X} \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [0,y]\}$$

Sous l'Hypothèse (4.38), $\mathcal{X}$ est continue et strictement décroissante sur $[0,\bar{y}]$ avec $\mathcal{X}(0) = \infty$ et $\mathcal{X}(\bar{y}) = 0$ ([4]). On peut donc définir $\mathcal{Y} : [0,\infty] \mapsto [0,\bar{y}]$, l'inverse de $\mathcal{X}$.

Théorème 4.4.4 *Pour une dotation initiale $x \geq 0$, on définit*

$$\hat{C}_s \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{I}(\hat{\eta}_s) \quad \text{avec} \quad \hat{\eta}_s \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{Y}(x)\, Z_s\, e^{\int_0^s (\beta_u - r_u)\, du} \ , \tag{4.39}$$

la définition de $\mathcal{Y}$ implique $\hat{C} \in \mathcal{D}(x)$. Sous l'Hypothèse (4.38), le processus de consommation $\hat{C}$ est optimal :

$$V(x) = E \int_0^T e^{-\int_0^t \beta_s\, ds}\, U(\hat{C}_t)\, dt \ . \tag{4.40}$$

Preuve *Soit $C \in \mathcal{D}(x)$,*

$$\begin{aligned}
E \int_0^T e^{-\int_0^t \beta_s\, ds} [U(\hat{C}_t) - U(C_t)]\, dt = \\
&= E \int_0^T e^{-\int_0^t \beta_s\, ds}\ [(U(\mathcal{I}(\hat{\eta}_t)) - \hat{\eta}_t\, \mathcal{I}(\hat{\eta}_t)) - (U(C_t) - \hat{\eta}_t\, C_t)]\ dt \\
&\quad + \mathcal{Y}(x)\, \tilde{E} \int_0^T e^{-\int_0^t r_s\, ds}\, (\hat{C}_t - C_t)\, dt
\end{aligned}$$

D'après (4.36), le premier terme du membre de droite est positif, le deuxième est nul car $C,\, \hat{C} \in \mathcal{D}(x)$. □

Nous avons donc déterminé la fonction valeur et le processus de consommation optimal, mais nous n'avons toujours pas n'avons toujours pas de forme explicite pour le processus de portefeuille $\hat{\Pi}$. On peut obtenir des formulations plus explicites dans des cas particuliers.

4. $\mathcal{I}$ est strictement décroissante sur $[0, U'(0)]$ et constante sur $[U'(0), \infty[$, on en déduit que $\mathcal{X}$ est non décroissante et, pour $0 < y_1 < y_2 < \infty$

$$\mathcal{X}(y_1) = \mathcal{X}(y_2) \iff P\left(\min_{0 \leq t \leq T} Z_t\, e^{\int_0^t (\beta_u - r_u)\, du} < \frac{U'(0)}{y_1}\right) = 0 \ ,$$

dans ce cas $\mathcal{X}(y_1) = \mathcal{X}(y_2) = 0$, d'où l'égalité $\mathcal{X}(\bar{y}) = 0$. L'égalité $\mathcal{X}(0) = \lim_{y \downarrow 0} \mathcal{X}(y) = \infty$ est une conséquence du théorème de convergence monotone. La continuité de $\mathcal{X}$ sur $]0, \bar{y}]$, et donc sa surjectivité, se déduit de (4.38) et du théorème de convergence monotone.

4.5 Investissement et consommation optimal. Cas des coefficients constants

On suppose que U *est trois fois continument différentiable et que*

$$\beta_t \equiv \beta \ , \quad r_t \equiv r \ , \quad b_t \equiv b \ , \quad \sigma_t \equiv \sigma \ , \tag{4.41}$$

où $b \in \mathbb{R}^d$, $\sigma \in \mathbb{R}^{d\times d}$ *est inversible.*

4.5.1 Le cadre du problème

Le prix de l'actif sans risque est donné par

$$P_t^0 = p^0 \, e^{rt} \ , \tag{4.42}$$

celui des actifs risqués évolue suivant le système :

$$dP_t^i = P_t^i \, b^i \, dt + P_t^i \, \sigma^i \, dB_t^i \ , \quad P_0^i = p^i \ , i = 1, \ldots, d \ . \tag{4.43}$$

La valeur du portefeuille évolue suivant l'équation :

$$dX_t = (r \, X_t - C_t) \, dt + \langle b - r \, \underline{1} \, , \, \Pi_t \rangle \, dt + \langle \Pi_t \, , \, \sigma \, dB_t \rangle \ . \tag{4.44}$$

À $\Pi_t = \pi \in \mathbb{R}^d$ *et* $C_t = c \in [0, \infty[$ *fixés, on définit le générateur infinitésimal associé à (4.44) :*

$$\mathcal{L}^{\pi,c}\varphi(x) \triangleq [r \, x - c + \langle b - r \, \underline{1} \, , \, \pi \rangle] \, \varphi'(x) + \frac{1}{2} \, |\sigma^* \pi|^2 \, \varphi''(x) \ . \tag{4.45}$$

4.5.2 Forme explicite de la fonction valeur

Hypothèse 4.5.1 *On suppose que* $\theta \neq 0$ *et qu'il existe des fonctions* G, S : $[0, T] \times]0, \infty[\mapsto [0, \infty[$ *de classe* $\mathcal{C}^{1,3}$ *telles que pour tout* $0 \leq t \leq T$ *et* $y > 0$,

$$\begin{aligned} -\dot{G}(t, y) + \beta \, G(t, y) &= \mathcal{N} G(t, y) + U(\mathcal{I}(y)) \ , \quad G(T, y) = 0 \ , & (4.46) \\ -\dot{S}(t, y) + \beta \, S(t, y) &= \mathcal{N} S(t, y) + y \, \mathcal{I}(y) \ , \quad S(T, y) = 0 \ . & (4.47) \end{aligned}$$

où $\mathcal{N}$ *est l'opérateur :*

$$\mathcal{N}\varphi(y) \triangleq (\beta - r) \, y \, \varphi'(y) + \frac{1}{2} \, |\theta|^2 \, y^2 \, \varphi''(y)$$

avec $\theta = \sigma^{-1} (b - r \, \underline{1})$.

On suppose de plus qu'il existe $M > 0$ *et* $\lambda > 0$ *tels que pour tout* $y > 0$,

$$\max_{0 \leq t \leq T} H(t, y) \leq M \, (1 + y^{-\lambda} + y^{\lambda}) \tag{4.48}$$

pour $H = G$, $\partial G / \partial y$, S *et* $\partial S / \partial y$.

Exercice 4.5.2 *Soit* $H : [0,T]\times]0,\infty[\mapsto [0,\infty[$ *de classe* $\mathcal{C}^{1,2}$ *vérifiant (4.48). Supposons que* H *est solution du problème de Cauchy suivant: pour tout* $0 \le t \le T$ *et* $y > 0$

$$-\frac{\partial H(t,y)}{\partial t} + \beta\, H(t,y) = \mathcal{N} H(t,y) + g(t,y)\ , \quad H(T,y) = 0\ .$$

Alors H *admet la représentation suivante*

$$H(t,y) = E\int_t^T e^{-\beta\,(s-t)}\, g(s, Y_s^{t,y})\, ds$$

où

$$Y_s^{t,y} \triangleq y\, e^{-(\beta-r)\,(s-t)}\, Z_s^t\ , \tag{4.49}$$

$$Z_s^t \triangleq \exp\left[-\langle\theta, B_s - B_t\rangle - \frac{1}{2}\,|\theta|^2\,(s-t)\right]\ . \tag{4.50}$$

[Aide: Considérez le changement de variable $\ell = \log y$*].*

De l'Exercice 4.5.2, on déduit les représentation suivantes

$$G(t,y) = E\int_t^T e^{-\beta\,(s-t)}\, U(\mathcal{I}(Y_s^{t,y}))\, ds\ , \tag{4.51}$$

$$S(t,y) = y\, E\int_t^T e^{-r\,(s-t)}\, Z_s^t\, \mathcal{I}(Y_s^{t,y})\, ds\ . \tag{4.52}$$

On définit

$$V(t,x) \triangleq \sup\left\{E\int_t^T e^{-\beta\, s}\, U(C_s)\, ds\, ;\, (\Pi, C)\ \textit{admissible pour}\ (t,x)\right\}\ , \tag{4.53}$$

"admissible pour (t,x)*" signifiant que* $P_{t,x}(X_s \ge 0\,;\, t \le s \le T) = 1$*.*

Étant donné un processus de consommation C*, il existe un portefeuille* Π *pour lequel* (Π, C) *est admissible pour* (t,x) *si et seulement si (cf. Proposition 4.2.5)*

$$E\int_t^T e^{-r\,(t-s)}\, Z_s^t\, C_s\, ds \le x\ . \tag{4.54}$$

Définition 4.5.3 (Les fonctions $\mathcal{X}(t,y)$ ***et*** $\mathcal{Y}(t,x)$***)*** *Pour* $0 \le t \le T$*, on définit* $\mathcal{X}(t,\cdot) : [0,\infty] \mapsto [0,\infty]$ *par*

$$\mathcal{X}(t,y) \triangleq E\int_t^T e^{-r\,(s-t)}\, Z_s^t\, \mathcal{I}(Y_s^{t,y})\, ds\ , \tag{4.55}$$

ainsi

$$y\,\mathcal{X}(t,y) = S(t,y) < \infty\ , \quad 0 < y < \infty\ . \tag{4.56}$$

Par ailleurs

$$\bar{y}(t) \triangleq \sup\{t \ge 0\, ;\, \mathcal{X}(t,\cdot)\ \textit{est strictement décroissante sur}\ [0,y]\} = \infty$$

et comme au paragraphe précédent, pour $0 \le t < T$, $\mathcal{X}(t,\cdot)$ *est strictement décroissante sur* $[0,\infty]$ *avec* $\mathcal{X}(t,0) = \infty$ *et* $\mathcal{X}(t,\infty) = 0$. *On définit la bijection* $\mathcal{Y}(t,\cdot) : [0,\infty] \mapsto [0,\infty]$, *l'inverse de* $\mathcal{X}(t,\cdot)$:

$$\mathcal{Y}(t, \mathcal{X}(t,y)) = y \ , \quad 0 \le y \le \infty \ , \quad 0 \le t < T \ . \tag{4.57}$$

Proposition 4.5.4

$$V(t,x) = e^{-\beta\, t}\, G(t, \mathcal{Y}(t,x)) \ , \quad 0 \le t < T \ , \quad x > 0 \ . \tag{4.58}$$

On peut ainsi résoudre les problèmes de Cauchy (4.46) et (4.47) et déduire une forme explicite pour $V(t,x)$.

Preuve *Pour* $t \le s \le T$ *et* $x \ge 0$, *on définit*

$$\hat{C}_s \triangleq \mathcal{I}(\eta_s^{t,x}) \qquad avec \qquad \eta_s^{t,x} \triangleq \mathcal{Y}(t,x)\, Z_s^t\, e^{(\beta - r)\,(t-s)} \ , \tag{4.59}$$

alors

$$V(t,x) = E \int_t^T e^{-\beta s}\, U(\hat{C}_s)\, ds \tag{4.60}$$

Ceci se déduit comme au Théorème 4.4.4, la différence est que pour $y = \mathcal{Y}(t,x)$, *on a* $\eta^{t,x} = Y^{t,y}$, *on obtient donc (4.58).* □

Exercice 4.5.5 *Prenons* $U(c) \triangleq c^\delta$, *avec* $0 < \delta < 1$. *Montrer que si*

$$k \triangleq \frac{1}{1-\delta} \left(\beta - r\,\delta - \frac{1}{2}\,|\theta|^2\, \frac{\delta}{1-\delta} \right)$$

est différent de 0, alors

$$\begin{aligned} G(t,y) &= \frac{1}{k}\,(1 - e^{-k\,(T-t)})\, \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\delta/(\delta-1)} \ , \\ S(t,y) &= \delta\, G(t,y) \ , \\ V(t,x) &= e^{-\beta\, t} \left(\frac{1 - e^{-k\,(T-t)}}{k} \right)^{1-\delta} x^\delta \ . \end{aligned}$$

Si $k = 0$, *alors*

$$\begin{aligned} G(t,y) &= (T-t)\, \left(\frac{y}{\delta}\right)^{\delta/(\delta-1)} \ , \\ S(t,y) &= \delta\, G(t,y) \ , \\ V(t,x) &= e^{-\beta\, t}\, (T-t)^{1-\delta}\, x^\delta \ . \end{aligned}$$

4.5.3 Stratégie en boucle fermée

Nous avons une description explicite (4.58) de la fonction valeur, mais nous n'avons toujours pas de représentation explicite de la consommation et du portefeuille en "boucle fermée" (feedback), i.e. comme fonction du processus de richesse optimal. Pour obtenir une telle représentation nous introduisons l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman (HJB) pour ce modèle. Cette EDP non linéaire du second ordre donne une caractérisation de la fonction valeur. Cette équation est difficile à résoudre, dans notre modèle nous avons toutefois pû éviter d'avoir recours à l'équation de HJB en résolvant les deux équations linéaires (4.46–4.47).

Lemme 4.5.6 *Soit* $Q : [0,T] \times [0,\infty[\mapsto [0,\infty[$ *de classe* $\mathcal{C}^{1,2}([0,T] \times [0,\infty[)$, *une solution de l'équation de HJB suivante :*

$$\dot{Q}(t,x) + \max_{\substack{c \geq 0 \\ \pi \in \mathbb{R}^d}} \left\{ \mathcal{L}^{\pi,c} Q(t,x) + e^{-\beta\, t}\, U(c) \right\} = 0 \tag{4.61}$$

pour $0 \leq t < T$, $0 < x < \infty$ *(*$\mathcal{L}^{\pi,c}$ *est définie par (4.45)), alors*

$$V(t,x) \leq Q(t,x) \ , \quad 0 \leq t < T \ , \quad 0 \leq x < \infty \ . \tag{4.62}$$

Preuve *Pour toute condition initiale* (t,x) *et paire* (Π, C) *admissible, soit* X *le processus de richesse associé. Posons*

$$\tau_n \stackrel{\triangle}{=} \inf \left\{ s \in [t,T] \, ; \, X_s \geq n \ ou \ X_s \leq \frac{1}{n} \ ou \ \int_0^s |\Pi_u|^2 \, du = n \right\} \ .$$

On a $E_{t,x} \int_0^{\tau_n} Q'(s,X_s) \langle \Pi_s, \sigma \, dB_s \rangle = 0$, *donc, à l'aide de la formule de Itô ainsi que de (4.61)*

$$\begin{aligned} 0 &\leq E_{t,x} Q(\tau_n, X_{\tau_n}) \\ &= Q(t,x) + E_{t,x} \int_t^{\tau_n} \left\{ \dot{Q}(s,X_s) + \mathcal{L}^{\Pi_s, C_s} \, Q(s,X_s) \right\} \, ds \\ &\leq Q(t,x) - E_{t,x} \int_t^{\tau_n} e^{-\beta\, s}\, U(C_s) \, ds \ . \end{aligned}$$

En faisant $n \to \infty$, *à l'aide du théorème de convergence monotone, on obtient*

$$E_{t,x} \int_t^T e^{-\beta\, s}\, U(C_s) \, ds \leq Q(t,x) \ .$$

En maximisant le terme de gauche de cette dernière inégalité parmi toutes les paires admissibles (Π, C), *on démontre le lemme.* □

Une solution de l'équation de HJB n'est pas nécessairement unique, même si l'on précise les conditions aux bords

$$Q(t,0) = 0 \ , \quad 0 \leq t \leq T \ , \quad Q(T,x) = 0 \ , \quad 0 \leq x < \infty \ . \tag{4.63}$$

Ceci est dû au fait que la croissance d'une solution $Q(t,x)$ quand $|x| \to \infty$ peut varier. On peut espérer que la fonction valeur est une solution de HJB et, d'après (4.62), qu'elle soit la plus petite des solutions positives.

Proposition 4.5.7 *Avec les conditions précédentes la fonction valeur $V(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^{1,2}([0,T[\times]0,\infty[)$, satisfait l'équation de HJB (4.61) ainsi que les conditions aux bords (4.63).*

Preuve *Si $0 < y \leq U'(0)$, alors*

$$\frac{d}{dy} U(\mathcal{I}(y)) = U'(\mathcal{I}(y))\, \mathcal{I}'(y) = y\, \mathcal{I}'(y) \ , \tag{4.64}$$

si $y > U'(0)$, alors $\mathcal{I}(y) = \mathcal{I}'(y) = 0$ et (4.64) est encore vrai. Nous avons supposé G et S de classe $\mathcal{C}^{1,3}$, on peut donc dériver (4.46) et (4.47) par rapport à y et remarquer que les fonctions définies par

$$\varphi_1(t,y) \triangleq -y\, G'(t,y) \ , \quad \varphi_2(t,y) \triangleq -y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S(t,y)}{y} \right)$$

vérifient chacune

$$-\dot{\varphi}_i(t,y) + \beta\, \varphi_i(t,y) = \mathcal{N} \varphi_i(t,y) - y^2\, \mathcal{I}'(y) \ , \quad \varphi_i(T,y) = 0 \ , \quad 0 \leq t \leq T \ , \quad y > 0 \ .$$

En particulier, $\mathcal{I}'$ est continu en $y = U'(0)$, i.e. une condition nécessaire pour notre hypothèse est $U''(0) = 0$. L'Exercice 4.5.2 implique $\varphi_1 \equiv \varphi_2$, car les deux fonctions admettent la même interprétation probabiliste. On en déduit

$$G'(t,y) = y \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{S(t,y)}{y} \right) = y\, \mathcal{X}'(t,y) \tag{4.65}$$

et d'après (4.58), (4.57) on a

$$V'(t,x) = e^{-\beta t}\, \mathcal{Y}(t,x) \ , \tag{4.66}$$

$$\dot{\mathcal{Y}}(t, \mathcal{X}(t,y)) = -\mathcal{Y}'(t, \mathcal{X}(t,y))\, \dot{\mathcal{X}}(t,y) \ . \tag{4.67}$$

Enfin, (4.47) et (4.56) impliquent

$$-\dot{\mathcal{X}}(t,y) + r\, \mathcal{X}(t,y) - (\beta - r + |\theta|^2)\, y\, \mathcal{X}'(t,y) - \frac{1}{2} |\theta|^2\, y^2\, \mathcal{X}''(t,y) = \mathcal{I}(y) \tag{4.68}$$

pour $0 < y < \infty$, $0 \leq t < T$.

On veut maintenant vérifier que la fonction $V(t,x)$ définie par (4.58) est solution de l'équation de HJB (4.61). Avec $Q = V$, le terme de gauche de cette équation devient $e^{-\beta t}$ fois

$$\begin{aligned} &\dot{G}(t, \mathcal{Y}(t,x)) - \beta\, G(t, \mathcal{Y}(t,x)) + G'(t, \mathcal{Y}(t,x))\, \dot{\mathcal{Y}}(t,x) \\ &\quad + \max_{\substack{c \geq 0 \\ \pi \in \mathbb{R}^d}} \left[\left[(r\,x - c) + \langle b - r\,\underline{1}, \pi \rangle \right] \mathcal{Y}(t,x) + \frac{1}{2} |\sigma^* \pi|^2\, \mathcal{Y}'(t,x) + U(c) \right] \ . \end{aligned} \tag{4.69}$$

La maximisation par rapport à c est obtenue en

$$c = \mathcal{I}(\mathcal{Y}(t,x)) \ . \tag{4.70}$$

Comme $\mathcal{Y}'$ est négatif, la maximisation par rapport à π est atteinte pour

$$\pi = -(\sigma\,\sigma^*)^{-1}\,(b - r\,\underline{1})\,\frac{\mathcal{Y}(t,x)}{\mathcal{Y}'(t,x)} \ . \tag{4.71}$$

Après substitution, (4.69) devient

$$\begin{aligned}&\dot G(t,\mathcal{Y}(t,x)) - \beta\,G(t,\mathcal{Y}(t,x)) + G'(t,\mathcal{Y}(t,x))\,\dot{\mathcal{Y}}(t,x)\\ &\quad + r\,x\,\mathcal{Y}(t,x) - \mathcal{Y}(t,x)\,\mathcal{I}(\mathcal{Y}(t,x)) - \frac{1}{2}\,|\theta|^2\,\frac{\mathcal{Y}^2(t,x)}{\mathcal{Y}'(t,x)} + U(\mathcal{I}(\mathcal{Y}(t,x))) \ .\end{aligned} \tag{4.72}$$

En faisant le changement de variable $y = \mathcal{Y}(t,x)$ dans cette dernière équation et en utilisant (4.65) et (4.67) et (4.46) on obtient l'expression

$$\begin{aligned}&\dot G(t,y) - \beta\,G(t,y) - y\,\dot{\mathcal{X}}(t,y) + r\,y\,\mathcal{X}(t,y) - y\,\mathcal{I}(y) - \frac{1}{2}\,|\theta|^2\,y^2\,\mathcal{X}'(t,y) + U(\mathcal{I}(y))\\ &= y\,\Big[- \dot{\mathcal{X}}(t,y) + r\,\mathcal{X}(t,y) - (\beta - r + |\theta|^2)\,y\,\mathcal{X}'(t,y)\\ &\qquad - \frac{1}{2}\,|\theta|^2\,y^2\,\mathcal{X}''(t,y) - \mathcal{I}(y)\Big] \ ,\end{aligned}$$

qui tend vers 0 d'après (4.68). Ceci démontre que V est solution de l'équation de HJB (4.61). D'après le définition de V (4.53) et la condition d'admissibilité (4.54) en $x = 0$, les conditions aux bords (4.63) sont satisfaites. □

En conclusion, nous savons déjà que, pour tout $(t,x) \in [0,T[\times]0,\infty[$, il existe une paire optimale $(\hat\Pi,\hat C)$, soit $\hat X$ le processus de richesse associé. Si l'on répète la démonstration du Lemme 4.5.6, en remplaçant (Π,C) par $(\hat\Pi,\hat C)$ et Q par V, on obtient l'inégalité

$$\begin{aligned}0 &\le V(t,x) + E\int_t^T \Big\{\dot V(s,\hat X_s) + \mathcal{L}^{\Pi_s,C_s}V(s,\hat X_s)\Big\}\,ds\\ &\le V(t,x) - E\int_T^T e^{-\beta s}\,U(\hat C_s)\,ds \ .\end{aligned} \tag{4.73}$$

On a utilisé le théorème de convergence monotone et l'inégalité

$$\dot V(s,\hat X_s) + \mathcal{L}^{\Pi_s,C_s}V(s,\hat X_s) \le -e^{-\beta s}\,U(\hat C_s) \le 0 \ , \quad t \le s \le T \tag{4.74}$$

qui se déduit de l'équation HJB pour V. Mais, d'après (4.60), il y a donc égalité dans (4.73) et par suite également dans la première inégalité de (4.74), au moins pour tout (s,ω) p.p.$\times$p.s. dans $[0,T]\times\Omega$. Il y a égalité dans (4.74) si et seulement si $\hat\Pi$ et $\hat C$ maximisent l'expression

$$[r\,\hat X_s - c + \langle b - r\,\underline{1},\pi\rangle]\,V'(s,\hat X_s)\frac{1}{2}\,|\sigma^*\,\pi|^2\,V''(s,\hat X_s) + e^{-\beta\,s}\,U(c) \ , \quad t \le s \le T \ ,$$

c'est à dire (cf. (4.70) et (4.71))

$$\hat{C}_s = \mathcal{I}(\mathcal{Y}(s, \hat{X}_s)) \ , \tag{4.75}$$

$$\hat{\Pi}_s = -(\sigma\,\sigma^*)^{-1}\,(b - r\,\underline{1})\,\frac{\mathcal{Y}(s, \hat{X}_s)}{\mathcal{Y}'(s, \hat{X}_s)} \ . \tag{4.76}$$

pour tout (s, ω) *p.p.×p.s. dans* $[0, T] \times \Omega$. *Les expressions (4.75) et (4.76) nous donnent les processus de consommation et de portefeuille en boucle fermée.*

Exercice 4.5.8 *Montrer que dans le cadre de l'Exercice 4.5.5, les processus optimaux de consommation et de portefeuille sont des fonctions linéaires du processus de richesse* $\hat{X}$. *Résoudre celle–ci et démontrer que* $\hat{X}_T = 0$ *p.s.*

4.6 Solutions des exercices

Solution de l'Exercice 4.5.2 *Posons* $\mathcal{H}(t, l) = H(t, e^l)$. $\mathcal{H}$ *est de classe* $\mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R})$ *et vérifie*

$$\dot{\mathcal{H}} + \beta\,\mathcal{H} = \mathcal{N}\,\mathcal{H} + g(t, e^l) \ , \quad 0 \le t \le T \ \ l \in \mathbb{R}$$

et $\mathcal{H}(T, l) = 0$, $l \in \mathbb{R}$.

La condition (4.48) sur H *implique que* $\mathcal{H}$ *vérifie (3.38) pour tout* $\mu > 0$ *et* $M > 0$ *dépendant de* μ. *On déduit de la Proposition 3.6.4 que*

$$\mathcal{H}(t, l) = E\left(\int_t^T e^{-\beta(s-t)}\,g(s, e^{L_s})\,ds \,\middle|\, L_t = l\right) \ .$$

où $dL_s = (\beta - r - |\theta|^2/2)\,ds - \langle \theta, dB_s \rangle$. *C'est l'eds satisfaite par* $\log Y_s^{t,y}$, *et donc*

$$H(t, y) = \mathcal{H}(t, \log y) = E\left(\int_t^T e^{-\beta(s-t)}\,g(s, Y_s^{t,y})\,ds\right) \ .$$

Annexes

Annexe A

Probabilités

Pour des exposés détaillés voir Breiman *[5],* Shiryayev *[21] et* Cottrell–Duhamel–Genon-Catalot *[6] pour des résumés de cours et des exercices corrigés.*

A.1 Probabilités

Proposition A.1.1 *Soit X_n $(n \in \mathbb{N})$ et X des variables aléatoires,*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} E(|X_n - X|^2) < \infty \qquad \Longrightarrow \qquad X_n \to X \ p.s.$$

Preuve *Se montre en utilisant l'Inégalité de Bienaymé–Tchebycheff et le Lemme de Borel–Cantelli.* □

Proposition A.1.2 *Si $\{X_n\}$ est une suite de variables gaussiennes qui converge en loi vers une variable aléatoire X, alors X est également une variable aléatoire gaussienne.*

Proposition A.1.3 *Soit X_n $(n \in \mathbb{N})$ et X des variables aléatoires réelles, on suppose que*

$$X_n \to X \quad \text{en probabilité.}$$

Alors

- (i) *Si $\sup_n E(X_n^2) < \infty$, alors $X_n \to X$ dans $L^1(\Omega)$.*
- (ii) *Si $X_n \geq 0$ p.s. et $E(X_n) = E(X) < \infty$ $(\forall n \in \mathbb{N})$, alors $X_n \to X$ dans $L^1(\Omega)$.*
- (iii) *Si $Y_n \to Y$ $L^1(\Omega)$ et si $|X_n| \leq C$ p.s. $(\forall n \in \mathbb{N})$, alors $(X_n\, Y_n) \to (X\, Y)$ dans $L^1(\Omega)$.*

Proposition A.1.4 *Soit X_n $(n \in \mathbb{N})$ et X des variables aléatoires réelles, on suppose que*

$$X_n \to X \quad p.s.$$

Alors

- (i) *Si $\sup_n E(X_n^2) < \infty$, alors $X_n \to X$ dans $L^1(\Omega)$.*
- (ii) *Si $X_n \geq 0$ p.s. et $E(X_n) \to E(X)$, alors $X_n \to X$ dans $L^1(\Omega)$.*

Proposition A.1.5 *Si $X_n \sim N(0, \sigma^2)$ et $X_n - Y_n \to 0$ en probabilité alors $Y_n \Rightarrow N(0, \sigma^2)$.*

A.2 Espérance conditionnelle

On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$.

A.2.1 Définitions, caractérisations

Première définition

Notons $P_{\mathcal{G}}$ la restriction de P à $\mathcal{G}$ et $L^2(\mathcal{G})$ le sous espace vectoriel fermé de $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, isométrique à $L^2(\Omega, \mathcal{G}, P_{\mathcal{G}})$, défini comme l'ensemble des classes de P–équivalence contenant qu moins un représentant qui soit $\mathcal{G}$–mesurable. Alors :

> *Soit $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$, on définit $E(X|\mathcal{G})$ (l'espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{G}$) comme la projection orthogonale dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ de X sur $L^2(\mathcal{G})$.*

$E(\,\cdot\,|\mathcal{G})$ est un opérateur linéaire continu qui se prolonge par continuité à $L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$. D'autre part, la définition peut se prolonger (par limite monotone croissante) aux variables aléatoires réelles non négatives (non nécessairement intégrables).

Le paragraphe suivant présente un résultat qui peut être utilisé comme définition de l'espérance conditionnelle.

Deuxième définition

Soit X une variable aléatoire réelle intégrable [resp. non négatives], $E(X|\mathcal{G})$ est l'unique (classe d'équivalence de) variable aléatoire réelle intégrable [resp. non négative] qui vérifie :

- (i) *$E(X|\mathcal{G})$ est $\mathcal{G}$–mesurable,*
- (ii) *pour tout Z variable aléatoire réelle $\mathcal{G}$–mesurable et bornée [resp. $\mathcal{G}$–mesurable et non négative] : $E\left(Z\ E(X|\mathcal{G})\right) = E(Z\,X)$.*

Par ailleurs (ii) $\Leftrightarrow$ (ii') $\Leftrightarrow$ (ii") avec :

- *(ii')* $\int_G E(X|\mathcal{G})\,dP = \int_G X\,dP$ *pour tout $G \in \mathcal{G}$.*
- *(ii")* $\int_C E(X|\mathcal{G})\,dP = \int_C X\,dP$ *pour tout $C \in \mathcal{C}$, où $\mathcal{C}$ désigne une sous classe de $\mathcal{G}$ stable par intersection finie et telle que $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{G}$.*

A.2.2 Propriétés

Proposition A.2.1 *Soit X, X_1, $X_2 \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ [resp. $\mathcal{F}$–mesurables et non négatives] :*

- (i) *Pour tout α, $\beta \in \mathbb{R}$ [resp. $\mathbb{R}^+$] :*

$$E(\alpha\,X_1 + \beta\,X_2|\mathcal{G}) = \alpha\,E(X_1|\mathcal{G}) + \beta\,E(X_2|\mathcal{G}) \ .$$

- (ii) $X \geq 0$ *p.s.* $\Rightarrow$ $E(X|\mathcal{G}) \geq 0$ *p.s.*
- (iii) $X > 0$ *p.s.* $\Rightarrow$ $E(X|\mathcal{G}) > 0$ *p.s.*
- (iv) $\|E(X|\mathcal{G})\|_{L^1} \leq \|X\|_{L^1} < \infty$ *[resp. $\leq \infty$].*
- (v) $\sigma(X) \perp\!\!\!\perp \mathcal{G} \ \Rightarrow E(X|\mathcal{G}) = E(X)$.
- (vi) *Soit $\mathcal{H}$ une sous tribu de $\mathcal{G}$:*

$$E(\ E(X|\mathcal{H})\ |\mathcal{G}) = E(\ E(X|\mathcal{G})\ |\mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H}) \ ,$$

en particulier $E(E(X|\mathcal{G})) = E(X)$.

(vii) *Si Y est $\mathcal{G}$–mesurable et telle que XY soit intégrable [resp. et telle que $Y \geq 0$ p.s.] alors : $E(X\,Y\,|\mathcal{G}) = Y\,E(X|\mathcal{G})$.*

(viii) *Si $\mathcal{G} \perp\!\!\!\perp \{\sigma(X) \vee \mathcal{H}\}$ ([1]) alors $E(X|\mathcal{G} \vee \mathcal{H}) = E(X|\mathcal{H})$.*

Proposition A.2.2 (Convergence monotone) *Soit X_n $(n \in \mathbb{N})$ et X des variables aléatoires $\mathcal{F}$–mesurables*

(i) $0 \leq X_n \uparrow X$ *p.s.* $\quad\Rightarrow\quad E(X_n|\mathcal{G}) \uparrow E(X|\mathcal{G})$ *p.s.,*

(ii) $0 \geq X_n \downarrow X$ *p.s.* $\quad\Rightarrow\quad E(X_n|\mathcal{G}) \downarrow E(X|\mathcal{G})$ *p.s.*

Proposition A.2.3 (Lemme de Fatou) *Soit X_n $(n \in \mathbb{N})$ des variables aléatoires $\mathcal{F}$–mesurables*

(i) $X_n \geq 0$ *p.s.* $(\forall n \in \mathbb{N})$ $\quad\Rightarrow\quad E(\liminf X_n|\mathcal{G}) \leq \liminf E(X_n|\mathcal{G})$ *p.s.,*

(ii) $X_n \leq 0$ *p.s.*$(\forall n \in \mathbb{N})$ $\quad\Rightarrow\quad E(\liminf X_n|\mathcal{G}) \geq \liminf E(X_n|\mathcal{G})$ *p.s.*

Proposition A.2.4 (Convergence monotone) *Soit X_n $(n \in \mathbb{N})$ et X des variables aléatoires $\mathcal{F}$–mesurables telles que*

(i) $X_n \to X$ *p.s.,*

(ii) $\exists Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *tel que* $|X_n| \leq Z$ *p.s.* $(\forall n \in \mathbb{N})$.

Alors X_n $(n \in \mathbb{N})$ et $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ et $E(X_n|\mathcal{G}) \to E(X|\mathcal{G})$ p.s.

Proposition A.2.5 (Inégalité de Jensen) *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}^+$ une fonction convexe, alors pour toute sous tribu $\mathcal{G}$ de $\mathcal{F}$*

$$\varphi(\ E(X|\mathcal{G})\ ) \leq E(\ \varphi(X)\ |\mathcal{G})\ .$$

Proposition A.2.6 (Continuité dans L^p) *Soit X_n $(n \in \mathbb{N})$ et X des variables aléatoires $\mathcal{F}$–mesurables, et $p \geq 1$:*

(i) $X \in L^p \quad\Rightarrow\quad E(X|\mathcal{G}) \in L^p$,

(ii) $X_n \to X$ *dans* $L^p \quad\Rightarrow\quad E(X_n|\mathcal{G}) \to E(X|\mathcal{G})$ *dans* L^p.

---

1. $\mathcal{F} \vee \mathcal{G}$ est la plus petite tribu contenant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, i.e. $\mathcal{F} \vee \mathcal{G} \overset{\triangle}{=} \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{G})$.

A.2.3 Espérance conditionnelle par rapport à une variable aléatoire

À toute variable aléatoire X on associe $\sigma(X)$ la plus petite tribu qui rende X mesurable. Soit Y une variable aléatoire intégrable, on définit l'espérance conditionnelle de Y sachant X par

$$E(Y|X) \stackrel{\triangle}{=} E(Y|\sigma(X)) \ .$$

Soit X et Y des variables aléatoires définies sur $(\Omega, \mathcal{F})$, on suppose que Y est $\sigma(X)$–mesurable, alors il existe une application mesurable $\varphi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telle que

$$Y = \varphi(X) \ .$$

Comme $E(Y|X)$ est $\sigma(X)$–mesurable, il existe φ telle que $E(Y|X) = \varphi(X)$ p.s., on définit alors $E(Y|X = x)$ $(x \in \mathbb{R})$, l'espérance conditionnelle de Y sachant que $X = x$, *comme l'unique classe d'équivalence $\varphi(x)$ de variables aléatoires sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), P_X)$ telle que*

$$\int_{\{X\in B\}} Y(\omega)\, dP(\omega) = \int_B \varphi(x)\, dP_X(x) \ , \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \ .$$

A.2.4 Un lemme

Lemme A.2.7 *On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, $\mathcal{G}$ une sous tribu de $\mathcal{F}$, $\{Z_x \,;\, x \in \mathbb{R}^k\}$ une fonction aléatoire continue à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ indépendante de la tribu $\mathcal{G}$ et ξ un vecteur aléatoire $\mathcal{G}$–mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k$.*

Alors, pour toute application $\varphi : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ borélienne et bornée

$$E(\varphi(Z_x)|\mathcal{G}) = E(\varphi(Z_x)|\xi) \ . \tag{A.1}$$

Preuve *Supposons, dans un premier temps, que*

$$\left.\begin{array}{c} \forall\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d),\ \forall\xi \text{ vecteur aléatoire étagé } \mathcal{G}\text{–mesurable,} \\ E(\varphi(Z_\xi)|\mathcal{G}) = \Psi_\varphi(\xi) \ , \end{array}\right\} \tag{A.2}$$

où $\Psi_\varphi(x) \stackrel{\triangle}{=} E(\varphi(Z_x))$. On se donne $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ et ξ un vecteur aléatoire $\mathcal{G}$–mesurable.

Il existe une suite $\{\xi^n\}$ de variables étagées qui converge vers ξ p.s. et, d'après (A.2),

$$E(\varphi(Z_{\xi^n})|\mathcal{G}) = \Psi_\varphi(\xi^n) \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

On peut prendre la limite dans cette dernière équation :

(i) *Le membre de droite tend vers $\Psi_\varphi(\xi)$, en effet*

$$|\Psi_\varphi(\xi^n) - \Psi_\varphi(\xi)| \le E(|\varphi(Z_{\xi^n}) - \varphi(Z_\xi)|)$$

et $\varphi(Z_{\xi^n})$ converge vers $\varphi(Z_\xi)$ dans L^1 par convergence dominée.

(ii) *Le membre de gauche tend p.s. vers $E(\varphi(Z_\xi)|\mathcal{G})$ par convergence dominée pour l'espérance conditionnelle.*

On obtient donc, $E(\varphi(Z_\xi)|\mathcal{G}) = \Psi_\varphi(\xi)$ *et en prenant l'espérance conditionnelle par rapport à* ξ *dans cette dernière équation (en utilisant le fait que* $\Psi_\varphi(\,\cdot\,)$ *est mesurable et* ξ *est* $\mathcal{G}$*–mesurable), on déduit*

$$E(\varphi(Z_\xi)|\xi) = E(\Psi_\varphi(\xi)|\xi) = \Psi_\varphi(\xi) = E(\varphi(Z_\xi)|\mathcal{G}) \ ,$$

soit $E(\varphi(Z_\xi)|\xi) = E(\varphi(Z_\xi)|\mathcal{G})$.

On a donc démontré (A.1) pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$. *Par un argument de classe monotone, le résultat s'étend à toutes les fonctions mesurables.*

Il reste donc à démontrer (A.2). Soit $\varphi \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$ *et* ξ *étagé. Il existe donc* n, $x_i \in \mathbb{R}^k$, $A_i \in \mathcal{G}$ *tels que* $\xi(\omega) = \sum_{i=1}^n x_i \, \mathbf{1}_{A_i}(\omega)$. *Ainsi* $\varphi(Z_\xi) = \sum_{i=1}^n \varphi(Z_{x_i}) \, \mathbf{1}_{A_i}$ *et*

$$\begin{aligned} E(\varphi(Z_\xi)|\mathcal{G}) &= \sum_{i=1}^n E(\varphi(Z_{x_i}) \, \mathbf{1}_{A_i}|\mathcal{G}) \\ &= \sum_{i=1}^n E(\varphi(Z_{x_i})|\mathcal{G}) \, \mathbf{1}_{A_i} \\ &= \sum_{i=1}^n E(\varphi(Z_{x_i})) \, \mathbf{1}_{A_i} \qquad (\text{car } \{Z_x \, ; \, x \in \mathbb{R}^k\} \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}) \\ &= \sum_{i=1}^n \Psi_\varphi(x_i) \, \mathbf{1}_{A_i} = \Psi_\varphi(\xi) \ , \end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration du lemme. □

A.3 Le théorème des classes monotones

Définition A.3.1 *Une classe* $\mathcal{P}$ *de parties de* Ω *est appelée un* π–système *si elle est stable par intersections finies.*

Définition A.3.2 *Une classe* $\mathcal{L}$ *de parties de* Ω *est appelée un* λ–système *si elle vérifie*

- (λ_1) $\Omega \in \mathcal{L}$,
- (λ_2) $A, B \in \mathcal{L}$ *et* $A \subset B \quad \Rightarrow \quad B \setminus A \in \mathcal{L}$,
- (λ_3) $\{A_n\} \subset \mathcal{L}$ *et* $A_n \uparrow A \quad \Rightarrow \quad A \in \mathcal{L}$.

Théorème A.3.3 (Théorème π***–***λ***)*** *Soit* $\mathcal{P}$ *un* π*–système et* $\mathcal{L}$ *un* λ*–système tels que* $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$. *Alors* $\sigma(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$.

Preuve *Soit* $\lambda(\mathcal{P})$ *le plus petit* λ*–système qui contient* $\mathcal{P}$. *Si* $\lambda(\mathcal{P})$ *est aussi un* π*–système, alors c'est une* σ*–algèbre, d'où* $\sigma(\mathcal{P}) \subset \lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{L}$. *Montrons que* $\lambda(\mathcal{P})$ *est un* π*–système.*

Pour tout $A \subset \Omega$, *on pose* $\mathcal{G}_A = \{B \, ; \, A \subset B \in \lambda(\mathcal{P})\}$. *Si* $A \in \lambda(\mathcal{P})$ *alors* $\mathcal{G}_A$ *est un* λ*–système, a fortiori si* $A \in \mathcal{P}$. *Si* $A \in \mathcal{P}$ *alors* $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_A$ *et* $\mathcal{G}_A$ *est un* λ*–système. Donc, si* $A \in \mathcal{P}$ *alors* $\lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}_A$. *Autrement dit :*

$$A \in \mathcal{P}, \; B \in \lambda(\mathcal{P}) \quad \Rightarrow \quad A \subset B \in \lambda(\mathcal{P}) \ .$$

Donc, si $B \in \lambda(\mathcal{P})$ alors $\mathcal{P} \subset \mathcal{G}_B$ et $\mathcal{G}_B$ est un λ–système. D'où : $B \in \lambda(\mathcal{P}) \Rightarrow \lambda(\mathcal{P}) \subset \mathcal{G}_B$. Ainsi, si $B, C \in \lambda(\mathcal{P}) \Rightarrow B \cap C \in \lambda(\mathcal{P})$. On a montré que $\sigma(\mathcal{P}) \subset \lambda(\mathcal{P})$. L'inclusion $\lambda(\mathcal{P}) \subset \sigma(\mathcal{P})$ est trivial. □

Corollaire A.3.4 *Soit $\mathcal{P}$ un π–système, alors $\lambda(\mathcal{P}) = \sigma(\mathcal{P})$. C'est à dire : si $\mathcal{P}$ est stable par intersections finies, la plus petite classe contenant $\mathcal{P}$ et Ω, stable par différence et limite croissante, est $\sigma(\mathcal{P})$.*

Théorème A.3.5 (Théorème des classes monotones) *Soit $\mathcal{P}$ un π–système, $\mathcal{G} = \sigma(\mathcal{P})$ et $\mathcal{H}$ une classe de variables aléatoires réelles qui vérifie :*

(i) $\mathbf{1}_\Omega \in \mathcal{H}$ *et pour tout* $A \in \mathcal{P}$, $\mathbf{1}_A \in \mathcal{H}$,

(ii) $\mathcal{H}$ *est un espace vectoriel,*

(iii) $\{X_n\} \subset \mathcal{H}$, $X_n \uparrow X$ *et X finie [resp. bornée]* $\Rightarrow X \in \mathcal{H}$.

Alors $\mathcal{H}$ contient toutes les variables aléatoires réelles $\mathcal{G}$–mesurables [resp. toutes les variables réelles $\mathcal{G}$–mesurables et bornées].

Preuve *Soit $\mathcal{L} \triangleq \{A\,;\, \mathbf{1}_A \in \mathcal{H}\}$. $\mathcal{L}$ est un π–système qui contient $\mathcal{P}$, donc d'après le théorème π–λ (Théorème A.3.3), $\mathcal{G} \subset \mathcal{L}$.*

Soit X une variable aléatoire réelle non négative et $\mathcal{G}$–mesurable [resp. $\mathcal{G}$–mesurable et bornée]. On pose

$$X_n(\omega) \triangleq \sum_{k=0}^{n^2} \tfrac{k}{n}\, \mathbf{1}_{A_k^n}(\omega) \ , \quad \text{où } A_k^n \triangleq X^{-1}([\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}[) \ .$$

Alors $X_n \in \mathcal{H}$ et $X_{2^n} \uparrow X$ donc $X \in \mathcal{H}$.

Soit enfin une variable aléatoire réelle $\mathcal{G}$–mesurable [resp. $\mathcal{G}$–mesurable et bornée], $X = X^+ - X^- \in \mathcal{H}$ grâce à (ii). □

Annexe B

Divers

B.1 Exponentielle de matrice

Soit A une matrice $d \times d$. e^A est une matrice $d \times d$ définie par

$$e^A \triangleq \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!} A^k = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \cdots$$

où A^k est la k^e puissance de A. Attention, d'une manière générale $[e^A]_{ij} \neq e^{A_{ij}}$ sauf si la matrice A est diagonale. Par ailleurs, si A et B sont deux matrices $d \times d$,

$$\textit{si } A\,B = B\,A \textit{ alors :} \quad e^A\, e^B = e^B\, e^A = e^{A+B} \ ,$$

et donc

$$e^A\, e^{-A} = e^{-A}\, e^A = I$$

c'est à dire, e^A est inversible et

$$[e^A]^{-1} = e^{-A}$$

On considère l'application $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{tA}$, elle définit un semi–groupe, i.e.

$$e^{tA}\, e^{sA} = e^{(t+s)\,A} \ ,$$

de plus, par définition de e^{tA}, on a

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A\, e^{tA} = e^{tA}\, A \ .$$

B.2 Lemme de Gronwall

Proposition B.2.1 *Soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$ tels que*

$$\varphi(t) \leq a + b \int_0^t \varphi(s)\, ds \ , \quad t \geq 0 \ , \tag{B.1}$$

alors

$$\varphi(t) \leq a \exp(b\,t) \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Preuve *Le cas $b = 0$ est trivial, supposons $b > 0$. On multiplie (B.1) par* $\exp(-bt)$ *:*

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-bt}\int_0^t \varphi(s)\,ds\right) = e^{-bt}\,\varphi(t) - b\,e^{-bt}\int_0^t \varphi(s)\,ds \leq a\,e^{-bt} \ .$$

donc

$$\int_0^t \varphi(s)\,ds \leq a\,e^{bt}\int_0^t e^{-bs}\,ds = \frac{a}{b}\,(e^{bt}-1)$$

On conclue en utilisant à nouveau (B.1). □

Corollaire B.2.2 *Soit φ, a, b : $\mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$, a et b non décroissantes, b non négative. Si*

$$\varphi(t) \leq a(t) + b(t)\int_0^t \varphi(s)\,ds \ , \quad t \geq 0 \ ,$$

alors

$$\varphi(t) \leq a(t)\ \exp(b(t)\,t) \ , \quad t \geq 0 \ .$$

Annexe C

Finances

C.1 Glossaire

beta (coefficient), *voir* coefficient de volatilité *d'une action.*

Black & Scholes (Modèles), *modèle mathématique d'évaluation des options négociables proposé par Fisher Black et Myron Fisher en 1973.*

CAC, *voir* cotation assistée en continu, *voir* indice CAC 40.

coefficient de volatilité, *taux de variation des cours d'un titre par rapport à la tendance générale d'une marché.*

cotation, *fixation quotidienne des cours des titres par confrontation des offres et des demandes exprimées pendant la séance. Il existe plusieurs techniques de cotation : à la criée, en continu, par boîte, par casier, par fixing.*

cotation assistée en continu (CAC), *système de cotation informatisé, mis au point à Toronto, et introduit à la Bourse de Paris en juin 1986. Il consiste en la confrontation permanente des ordres introduits directement par les sociétés de bourse dans le cahier de cotation électronique tenu par l'ordinateur central : celui–ci établit un cours d'équilibre, de 9h à 10h puis de 10h à 17h, sert les ordres "au fil de l'eau" (au fur et à mesure de leur arrivée). Depuis le 2 décembre 1991, toutes les valeurs franç aises et étrangères du marché à règlement mensuel, du marché comptant, du second marché et du marché hors–cote sont introduites dans le système CAC.*

couverture (stratégie de), *appelé aussi "hedging" par les anglo–saxons, l'opération de couverture est pratiquée sur les marchés à terme dans le but de se prémunir contre les risques de variations des taux. Elle consiste à prendre sur un marché à terme une position de sens contraire à sa position sur le marché au comptant.*

Cox & Ross–Rubinstein, *auteurs d'une méthode d'évaluation théorique des options.*

delta (coefficient), *rapport entre la variation de la valeur théorique d'une option (premium) et la variation en cours au comptant de l'actif sous–jacent.*

fixing, *système de cotation. 1) Procédure de cotation générale, à un moment donné, de tous les ordres d'achat et de vente, par exemple utilisé pour la cotation de la barre d'or sur toutes les places boursières.*

gamma (ceofficient), *rapport entre la variation du* delta *d'une option et la* variation unitaire de l'actif sous–jacent.

gestion de portefeuille, *activité régie par la loi (1989, 1990). Cette nouvelle profession résulte de la fusion juridique de deux anciennes activités de remisier et gérant de portefeuille (abrogées en 1989). Elle recouvre trois fonctions : le courtage, la gestion de portefeuille proprement dite et le conseil en investissement. Son champ d'action s'étend non seulement aux valeurs mobilières mais aussi aux contrats à termes négociables et aux produits financiers, cotés ou non cotés.*

indice CAC 40, *indice boursier constitué de 40 valeurs du marché à règlement mensuel appartenant à l'ensemble des secteurs économiques et faisant partie des cent premières capitalisations boursières. Il est pondéré par la capitalisation boursière des valeurs le composant. Cet indice a été créé en 1988 pour servir de support à des contrats à termes et à des contrats d'options négociables.*

omega, *coefficient mesurant en pourcentage la variation du prix d'une option (ou prime) pour une variation de 1% du prix du support.*

portefeuille, *ensemble de valeurs mobilières détenues par une personne physique ou morale et déposées dans un compte couvert auprès d'un intermédiaires financier.*

premium, *cours coté de l'option établi séparément pour chaque série d'options négociables. Le cours exprimé en francs pour une unité du contrat doit être multiplié par le nombre de titres du contrat pour connaître le montant du premium global du contrat ou somme que l'acheteur doit immédiatement verser au vendeur lors de la conclusion d'un contrat d'option.*

titre, *instrument (certificat ou inscription en compte) représentatif d'un droit de créance et confèrent à son titulaire la propriété de la créance. Dans le langage boursier, le titre est souvent utilisé comme synonynme de valeur mobilière.*

thêta (coefficient), *rapport entre la variation du prix de l'option (ou prime) et le temps. Ce coefficient permet de mesurer la variation du prix de l'option pour une journée écoulée.*

véga (coefficient), *rapport entre la variation du prix (ou prime) d'une option et la variation de 1% de la volatilité de l'actif sous–jacent.*

volatilité, *taux de variation des cours d'un titre par rapport à la tendance générale du marché.*

C.2 Termes anglo–saxons

asset, *avoir, actif, élément d'actif.*
bankruptcy, *banqueroute, faillite.*
borrowing, *emprunt.*
consumption, *consommation.*
consume (to), *consommer.*
contigent claim, *bien contingent, actif conditionnel (ex. option).*
discount, *réduction, escompte, rabais, remise.* Discount rate, *taux d'escompte.*
endowment, *dotation*
fair price, *prix équitable.*
growth, *croissance.* Growth rate, *taux de croissance.*
hedging, *couverture contre un risque.* Hedging strategy, *stratégie de couverture.*
interest rate, *taux d'intérêt.*
investment, *investissement*
investor, *investisseur, épargnant.*
maturity, *échéance.* Maturity date, *date d'échéance.* Maturity value, *valeur à échéance.*
option, *option.*
offset (to), *compenser, équilibrer.*
payoff, *règlement, acquittement, solde.* Payoff rate, *taux de remboursement.*
portfolio, *portefeuille financier, d'investissement*
pricing, *établissement des prix, fixation des prix*
trade (to), *négocier, échanger*
trading, *commerce, négoce*
return, *revenu, rendement, bénéfice. Return of capital, rémunération du capital. Return on investment, rapport, rendement, profitabilité d'un investissment.*
securities, *valeurs boursières, titres*
share, *part, action.*
short–selling, *vente à découvert.*
wealth, *richesse, patrimoine.*
withdrawal, *retrait. Withdrawal of capital, retrait de fonds.*

Notes bibliographiques

On pourra consulter :

- *Sur la théorie des probabilités : consultera [5, 21, 3, 6].*
- *Sur les processus stochastiques : [4, 5, 8, 9, 14].*
- *Sur les processus de diffusion : [20, 16, 15, 12]. [16] est un exposé très complet et accessibles, les autres références sont plus ardues !*
- *Sur les applications en finance : [17, 16, 10, 7]. [17] est un exposé très accessible, il constitue avec [3, 4] une présentation complète de la théorie des probabilités, des processus stochastiques et de leurs applications (en particulier en finance).*

Enfin, je ne saurais que trop vivement conseiller la lecture des ouvrages qu'Étienne Pardoux tarde (sic) à publier voire à rédiger (sauf son cours à l'École Polytechnique, avec Jacques Neveu, son cours à l'École d'été CIMPA en Chine et ses nombreux polycopiés de l'Université de Provence qui circulent sous le manteau [les polycopiés, pas l'université]). Ce cours s'inspire — à ce niveau, on peut avancer le terme de pillage *— de toute cette matière.*

Bibliographie

[1] A. BENSOUSSAN. On the theory of option pricing. Acta Applicandae Mathematicae, 2:139–158, 1984.

[2] F. BLACK and M. SCHOLES. The pricing of options and corporate liabilities. Journal of Political Economy, 81:635–654, 1973.

[3] N. BOULEAU. Probabilité de l'Ingénieur. Hermann, Paris, 1986.

[4] N. BOULEAU. Processus Stochastiques et Applications. Hermann, Paris, 1988.

[5] L. BREIMAN. Probability, volume 7 of Classics in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, 1992.

[6] M. COTTRELL, C. DUHAMEL, and V. GENON-CATALOT. Exercices de Probabilités. Collection DIA / Diffusion Belin, Paris, 1980.

[7] J.C. COX and M. RUBINSTEIN. Options Markets. Prentice–Hall, London, 1985.

[8] D. DACUNHA-CASTELLE and M. DUFLO. Probabilité et Statistiques. 2. Problèmes à Temps Mobile. Masson, Paris, 1983.

[9] D. DACUNHA-CASTELLE, M. DUFLO, and V. GENON-CATALOT. Exercices de Probabilités et Statistiques. 2. Problèmes à Temps Mobile. Masson, Paris, 1983.

[10] D. DUFFIE. Security Markets – Stochastic Models. Academic Press, 1988.

[11] N. ETHIER and Th.G. KURTZ. Markov Processes – Characterization and Convergence. John Wiley & Sons, New York, 1986.

[12] A. FREIDMAN. Stochastic Differential Equations and Applications I and II. Academic Press, New–York, 1975 and 1976.

[13] A.V. FRIEDMAN. Partial Differential Equations of Parabolic Type. Prentice–Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1964.

[14] I. GUIKHMAN and A. SKOROKHOD. Introduction à la Théorie des Processus Aléatoires. Éditions Mir, Moscou, 1980.

[15] N. IKEDA and S. WATANABE. Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes. North–Holland/Kodansha, Amsterdam, 1981.

[16] I. KARATZAS and S.E. SHREVE. Brownian Motion and Stochastic Calculus, volume 113 of Graduate Texts in Mathematics. Springer Verlag, New York, 1988.

[17] D. LAMBERTON and B. LAPEYRE. Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance. Mathématiques et Applications. Éllipses, Paris, 1991.

[18] R.Sh. LIPTSER and A.N. SHIRYAYEV. Statistics of Random Processes I. General Theory, volume 5 of Applications of Mathematics. Springer Verlag, New York, 1977.

[19] *R.C. MERTON. Theory of rational option pricing.* Bell Journal of Economy and Management Sciences*, 4:141–183, 1973.*

[20] *D. REVUZ and M. YOR.* Continuous Martingales and Brownian Motion*, volume 293 of* A Serie of Comprehensive Studies in Mathematics*. Springer Verlag, Berlin, 1991.*

[21] *A.N. SHIRYAYEV.* Probability*, volume 95 of* Graduate Texts in Mathematics*. Springer Verlag, New York, 1984.*

Index