

UNIVERSITE DE PROVENCE  
CENTRE SAINT CHARLES

THESE

PRESENTEE POUR OBTENIR LE  
DOCTORAT DE TROISIEME CYCLE DE MATHEMATIQUES APPLIQUEES

par

Fabien CAMPILLO

FILTRAGE ET DETECTION DE RUPTURES  
DE PROCESSUS PARTIELLEMENT OBSERVES

Soutenu le 28 Septembre 1984 devant le jury:

MM. Didier DACUNHA-CASTELLE

PRESIDENT

Pierre BERNHARD

EXAMINATEURS

Robert BOUC

Bernard MARTINET

Etienne PARDOUX



*Je tiens à exprimer mes remerciements:*

- *A Monsieur Didier DACUNHA-CASTELLE, dont la présence comme président de mon jury de thèse est pour moi un privilège.*
- *A Monsieur Pierre BERNHARD, qui me fait l'honneur de participer à ce jury.*
- *A Monsieur Robert BOUC, qui par sa présence témoigne de l'intérêt qu'il porte à mes travaux.*
- *A Monsieur Bernard MARTINET, qui a forgé mon goût pour les mathématiques appliquées.*
- *A Monsieur Jean DESHAYES, qui a accordé à mon travail une attention sans réserves.*

*En la personne de Monsieur Bernard NAYROLES, je désire remercier l'ensemble du Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique (CNRS), qui m'a permis de préparer cette thèse dans les meilleurs conditions.*

*Que Monsieur Etienne PARDOUX trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour avoir dirigé mon travail de thèse avec autant de disponibilité que d'effcience.*

---



**FILTRAGE ET DETECTION DE RUPTURES  
DE PROCESSUS PARTIELLEMENT OBSERVES**

**PREMIERE PARTIE**

**DETECTION DE RUPTURES  
DANS UN MODELE STOCHASTIQUE LINEAIRE  
PARTIELLEMENT OBSERVE**

**DEUXIEME PARTIE**

**LA METHODE D'APPROXIMATION DE GAUSS-GALERKIN  
EN FILTRAGE NON LINEAIRE**



Première Partie

**DETECTION DE RUPTURES  
DANS UN MODELE STOCHASTIQUE LINEAIRE  
PARTIELLEMENT OBSERVE**





## TABLE DES MATIERES

### INTRODUCTION

### NOTATIONS

<b>Chapitre I. <u>DETECTION DE RUPTURES "ADDITIVES"</u></b> .....	01
I.1 L'ALGORITHME GLR .....	03
I.2 RUPTURE D'AMPLITUDE CONNUE .....	08
I.2.1 Normalité asymptotique locale .....	09
I.2.2 Test d'existence de ruptures .....	12
I.2.3 Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance .....	18
I.3 RUPTURE D'AMPLITUDE INCONNUE .....	26
I.3.1 Normalité asymptotique locale .....	27
I.3.2 Test d'existence de ruptures .....	33
I.3.3 Propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance .....	42
I.4 CONCLUSIONS .....	51
<b>Chapitre II. <u>DETECTION DE RUPTURES DANS LA DYNAMIQUE</u></b> .....	56
II.1 PRESENTATION DU MODELE .....	58
II.2 CONSTRUCTION D'UN MODELE STATISTIQUE DOMINE .....	65
II.3 NORMALITE ASYMPTOTIQUE LOCALE .....	68
II.4 TEST D'EXISTENCE DE RUPTURES .....	73
II.5 CONCLUSIONS .....	76

### BIBLIOGRAPHIE



## INTRODUCTION

L'objet de ce travail est de développer certaines méthodes de détection de ruptures dans un modèle linéaire gaussien partiellement observé.

Les problèmes de ruptures de modèles stochastiques motivent depuis quelques années de nombreux travaux, comme en témoigne l'abondante littérature parue sur ce sujet. La lecture de BASSEVILLE[2], KLIGENE-TEL'KSNIS[16] et WILLSKY[24] donnera un large aperçu des travaux dans ce domaine.

L'importance particulière des méthodes de détection de ruptures réside dans leur capacité à suivre les variations brusques d'un modèle paramétrique, ce dont les méthodes classiques de traitement du signal n'étaient pas capables. Elles ont déjà fait l'objet de nombreuses applications, dans des domaines aussi divers que l'aérospatiale [6], l'électrocardiographie [27], la géophysique [3] et la surveillance du trafic autoroutier [26].

Une des techniques les plus utilisées est fondée sur la statistique du maximum de vraisemblance. Elle a donné lieu à l'algorithme GLR - Generalized Likelihood Ratio - surtout développé par A.S. WILLSKY et H.L. JONES [28,29].

Cependant cet algorithme présente certaines lacunes dans son application pratique; en particulier le niveau du test associé - c'est à dire le choix d'un seuil de décision en fonction d'une probabilité de fausse alarme donnée - n'est pas clairement défini. De plus aucun résultat n'a été proposé à ce jour concernant l'optimalité de cette méthode et la convergence des différents estimateurs associés.

Une approche intéressante de ce problème nous est fournie par la théorie de la statistique asymptotique ( cf. LECAM[21] ), déjà appliquée par J. DESHAYES et D. PICARD à la détection de ruptures de modèles [8-12]. Ces derniers étudient le comportement asymptotique des tests d'existence de rupture et des méthodes d'identification de cette rupture fondés sur la vraisemblance. Ils établissent des théorèmes d'invariance sur les processus de vraisemblance. Ces théorèmes mettent en évidence les "problèmes de bords" (i.e. le comportement irrégulier du rapport de vraisemblance pour les instants, dans l'intervalle de test, proches des bords). Ils en déduisent des méthodes de pondération des bords qui leur permettent de calculer le niveau asymptotique des tests de vraisemblance associés, ainsi que la convergence des estimateurs des différents paramètres.

Nous utiliserons les mêmes techniques de statistique asymptotique; cependant, nous allons considérer des ruptures sur un modèle différent de ceux de J. Deshayes et D. Picard. Le rapport de vraisemblance en fonction de l'instant de rupture sera plus régulier, ce qui permettra de démontrer sa normalité asymptotique locale; nous en déduirons des tests approchés plus simples que le test du maximum de vraisemblance.

La majorité des travaux parus dans ce domaine traite le problème de détection de ruptures dans des systèmes dynamiques en temps discret. Nous considérons le système linéaire en temps continu:

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = \{ A X_t + a \} dt + B dW_t \\ dY_t = \{ H X_t + h \} dt + dV_t \end{array} \right.$$

$\{W_t\}$  et  $\{V_t\}$  sont des processus de Wiener;  $X_t$  désigne l'état d'un système physique et  $Y_t$  son observation.

Nous nous proposons de traiter successivement le problème de détection de sauts brusques sur le paramètre  $a$ , puis sur le paramètre  $A$ . Dans la suite de ce travail, les ruptures sur  $a$  (resp.  $A$ ) seront appelées ruptures "additives" (resp. ruptures sur la dynamique).

Par rupture sur le paramètre  $a$  on entend que l'équation d'état s'écrit:

$$\left| \begin{array}{ll} dX_t = \{ A X_t + a \} dt + B dW_t & \text{pour } t < \tau , \\ dX_t = \{ A X_t + a + \gamma \} dt + B dW_t & \text{pour } t \geq \tau . \end{array} \right.$$

Une rupture sur  $A$  est:

$$\left| \begin{array}{ll} dX_t = \{ A X_t + a \} dt + B dW_t & \text{pour } t < \tau , \\ dX_t = \{ (A+\Gamma) X_t + a \} dt + B dW_t & \text{pour } t \geq \tau . \end{array} \right.$$

L'instant de rupture ( $\tau$ ) et l'amplitude du saut ( $\gamma$  ou  $\Gamma$ ) sont les seuls paramètres inconnus.

Ayant observé  $\{Y_s; s \leq t\}$ , le problème de détection est de tester les hypothèses:

$$\begin{array}{l} H_0 : \text{Pas de rupture avant } t \text{ (i.e. } \tau \geq t) , \\ \text{contre } H_1 : \text{Rupture avant } t \text{ (i.e. } \tau < t) , \end{array}$$

et dans le cas où  $H_1$  est accepté, de donner une estimation de l'amplitude du saut.

Le présent travail a pour buts :

- ( $\Delta$ ) De développer des tests approchés plus maniables que le test du maximum de vraisemblance;
- ( $\Delta\Delta$ ) De démontrer l'optimalité de ces tests sous une asymptotique convenablement choisie, par exemple l'amplitude du saut  $\rightarrow \infty$ , ou l'intensité des bruits  $W$  et  $V \rightarrow 0$ ; ces deux asymptotiques seront utilisées dans notre travail.

On résume les résultats obtenus:

### Chapitre I Détection de ruptures "additives"

Nous présentons l'algorithme GLR. Ensuite nous traitons le cas  $\gamma$  connu puis le cas  $\gamma$  inconnu.

L'asymptotique considérée est: Amplitude du saut =  $\frac{1}{\epsilon} \gamma$  avec  $\epsilon \rightarrow 0$ .  
La démarche est la suivante:

1. Nous construisons  $\{ P_{\theta}^{(\epsilon)} ; \theta \in \Theta \}$  le modèle statistique correspondant à notre problème.  $\Theta$  désigne l'ensemble des paramètres de ruptures:  $\Theta = \{ (\tau, \gamma) ; 0 \leq \tau \leq 1, \gamma \in \mathbb{R}^n \}$  ( si  $\gamma$  est connu,  $\Theta = \{ \tau ; 0 \leq \tau \leq 1 \}$  ).
2. Nous démontrons la normalité asymptotique locale de  $\{ P_{\theta}^{(\epsilon)} \}$ . Le rapport de vraisemblance normalisé:

$$Z_{\epsilon, \theta}(U) = \frac{dP_{\theta + \epsilon U}^{(\epsilon)}}{dP_{\theta}^{(\epsilon)}}$$

est approché par la fonction aléatoire de structure simple:

$$\exp\left\{ U \cdot \Delta_{\epsilon, \theta} - \frac{1}{2} U \cdot F(\theta) U \right\}$$

où  $\Delta_{\epsilon, \theta}$  suit une loi gaussienne  $N(0, F(\theta))$ .

3. Notre approche du problème de détection de ruptures est la suivante: A l'instant  $t$ , pour  $\tau < t$ , on teste:

$$\begin{aligned} H_0 &: \text{Pas de rupture avant } \tau, \\ \text{contre } H_1 &: \text{Rupture avant } \tau. \end{aligned}$$

Les résultats de l'étape 2 nous permettent de construire,

- (i) dans le cas où  $\gamma$  est connu: Un test asymptotiquement localement le plus puissant de  $H_0$  contre  $H_1$ ,
- (ii) dans le cas où  $\gamma$  est inconnu: un test asymptotiquement localement sans biais de puissance maximum de  $H_0$  contre  $H_1$ .

4. Dans une dernière étape nous étudions les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance. Nous démontrons en particulier sa consistance, ainsi que sa normalité et son efficacité asymptotiques.

## Chapitre II. Détection de ruptures dans la dynamique

Ce problème est beaucoup plus délicat que le précédent; en particulier, l'algorithme GLR n'est plus applicable. Nous traitons en détail le cas  $\Gamma$  connu. Nous reprenons les étapes 1,2,3 du premier chapitre. La première étape, ainsi que la seconde, sont sensiblement différentes dans ce nouveau problème; en revanche la troisième étape est identique.

En conclusion nous reprenons quelques problèmes non abordés, en particulier la mise en œuvre pratique des tests proposés dans les chapitres I et II. Nous formulons quelques remarques sur le problème des ruptures dans l'équation d'observation, ainsi que sur une approche plus générale du problème de détection de ruptures dans un modèle stochastique partiellement observé.

## NOTATIONS

$\Delta$   $\Sigma(\tau, t) := 0$  si  $t < \tau$ , 1 si  $t \geq \tau$ .

$\Delta$   $A'$  : transposée de  $A$ .

$A.B$  :  $A'B$ ,  $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

$|A|$  : désigne la norme euclidienne pour tout  $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$  [ $|A|^2 = \text{trace}(A.A)$ ].

$\Delta$   $A_\epsilon \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} B_\epsilon$  :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |A_\epsilon - B_\epsilon| = 0$ .

$\Delta$  Si  $X$  est une variable aléatoire définie sur un espace  $(\Omega, B, P)$ ,  $\text{loi}\{X | P\}$  désigne la loi image de  $P$  par  $X$ .

$\Delta$  Si  $\{(\Omega_\epsilon, B_\epsilon, P_\epsilon, X_\epsilon) ; 0 < \epsilon \leq 1\}$  est une suite de variables aléatoires:

$P_\epsilon \text{-}\lim_{\epsilon \rightarrow 0} X_\epsilon = x$  :  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P_\epsilon \{ |X_\epsilon - x| > c \} = 0 \quad \forall c > 0$  ;

$X_\epsilon \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{\text{loi}} X$  :  $\text{loi}\{X_\epsilon | P_\epsilon\} \xrightarrow[\epsilon \rightarrow 0]{} \text{loi}\{X\}$ .

□



## Chapitre I

DETECTION DE RUPTURES "ADDITIVES"

On considère le système linéaire :

$$(1) \quad \begin{cases} dX_t = \{ A X_t + a + \Sigma(\tau, t) \gamma \} dt + B dW_t & , X_0 = x_0 \\ dY_t = \{ H X_t + h \} dt + dV_t & , Y_0 = 0 \end{cases}$$

$0 \leq t \leq 1$ .  $\{W_t\}$  &  $\{V_t\}$  sont des processus de Wiener standard indépendants.  $X$  et  $W$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ;  $Y$  et  $V$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Les termes  $A, a, B, H, h, x_0$  sont supposés connus. Les coefficients  $A, a, B, H, h$  peuvent éventuellement dépendre de  $t$  de façon mesurable et bornée.  $\Sigma(\tau, t) = 1$  si  $t \geq \tau$ , 0 sinon.  $\tau \in [0, 1]$  est un paramètre inconnu qui désigne l'instant de rupture,  $\gamma \in \mathbb{R}^n$  désigne l'amplitude de celle-ci.

Le problème consistera, au vu d'une trajectoire de  $\{Y_t\}$ , à détecter une rupture éventuelle (i.e.  $\tau < 1$ ), et à estimer les paramètres de la rupture.

A priori l'élaboration du test du rapport de vraisemblance associé à ce problème nécessite une infinité de filtres (un par hypothèse de rupture possible). Nous présentons dans la section I.1 l'algorithme proposé par A.S. WILLSKY et H.L. JONES pour pallier cette difficulté. Celui-ci permet de calculer le rapport de vraisemblance à partir d'un unique filtre - fondé sur l'hypothèse de non-rupture - et d'un terme déterministe - appelé signature - calculable de manière séquentielle.

Dans les sections I.2 et I.3 nous menons une étude asymptotique qui nous conduit à proposer un nouveau test approché pour ce problème. Il s'agit d'un test plus simple que celui du rapport de vraisemblance. Nous étudions l'optimalité asymptotique de ce test, ainsi que les propriétés des estimateurs des différents paramètres de la rupture.

L'asymptotique principalement utilisée dans ce travail est : "amplitude du saut  $\rightarrow \infty$ ". En fin de section I.3 nous présentons une autre asymptotique équivalente, en section I.4 nous reviendrons sur ce problème de choix d'une asymptotique.

### I.1 L'ALGORITHME G.L.R.

On considère  $(\hat{X}_t, R(t), v_t)$  respectivement l'estimation de  $X_t$ , la covariance de l'erreur  $X_t - \hat{X}_t$  et l'innovation donnée par le filtre de Kalman-Bucy suivant :

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\hat{X}_t = \{ A \hat{X}_t + a \} dt + R(t) H' dv_t, \quad \hat{X}_0 = x_0 \\ dv_t = dY_t - \{ H \hat{X}_t + h \} dt, \quad v_0 = 0 \\ \frac{d}{dt} R(t) = A R(t) + R(t) A' + BB' - R(t) H' H R(t), \quad R(0) = 0 \end{array} \right.$$

Ce filtre n'est optimal que dans le cas où il n'y a pas eu de rupture (i.e.  $\tau \geq 1$ ). En effet, le filtre de Kalman-Bucy optimal  $(\hat{X}_t^{(\tau\gamma)}, R(t), v_t^{(\tau\gamma)})$  associé au système (1) s'écrit :

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\hat{X}_t^{(\tau\gamma)} = \{ A \hat{X}_t^{(\tau\gamma)} + a + \Sigma(\tau, t) \gamma \} dt + R(t) H' dv_t^{(\tau\gamma)}, \quad \hat{X}_0^{(\tau\gamma)} = x_0 \\ dv_t^{(\tau\gamma)} = dY_t - \{ H \hat{X}_t^{(\tau\gamma)} + h \} dt, \quad v_0^{(\tau\gamma)} = 0 \\ \frac{d}{dt} R(t) = A R(t) + R(t) A' + BB' - R(t) H' H R(t), \quad R(0) = 0 \end{array} \right.$$

On s'aperçoit que la covariance  $R(t)$  ne dépend pas des paramètres  $(\tau, \gamma)$ . L'innovation  $v_t^{(\tau\gamma)}$  est un processus de Wiener standard et on peut écrire  $v$  en fonction de  $v^{(\tau\gamma)}$  de la manière suivante :

$$dv_t = d\{ v_t - v_t^{(\tau\gamma)} \} + dv_t^{(\tau\gamma)} = H \{ \hat{X}_t^{(\tau\gamma)} - \hat{X}_t \} dt + dv_t^{(\tau\gamma)}$$

On vérifie aisément à l'aide de (1.1) (1.2) que  $H \{ \hat{X}_t^{(\tau Y)} - \hat{X}_t \} = S_t^\tau \gamma$  avec  $S_t^\tau$  défini par :

$$(1.3) \quad S_t^\tau := H \int_0^t \Psi(t,u) \Sigma(\tau,u) du$$

où l'application  $\Psi$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^{n \times n}$  est donnée par :

$$(1.4) \quad \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t,s) = \{ A - R(t) H' H \} \Psi(t,s) , \quad \Psi(s,s) = I_{n \times n}$$

Remarque :

$\Psi$  est la résolvante correspondant à l'équation de  $\hat{X}_t$  qui d'après (1.1) peut s'écrire sous la forme :

$$d\hat{X}_t = \{ A - R(t)H'H \} \hat{X}_t dt + \{ a - R(t)H'h \} dt + R(t)H' dY_t$$

Pour  $0 \leq s, t \leq 1$ , la matrice  $\Psi(t,s)$  vérifie les propriétés suivantes qui seront fréquemment utilisées par la suite :

- \*  $\Psi(s,t) = \Psi(t,s)^{-1}$ ,
- \*  $0 < C_1 \leq |\Psi(t,s)| \leq C_2 < \infty$ . □

$S_t^\tau$  est appelée la signature de la rupture, elle est déterministe donc précalculable pour chaque valeur de  $\tau$ . Finalement,  $v$  vérifie :

$$(1.5) \quad dv_t = S_t^\tau \gamma dt + dv_t^{(\tau Y)}$$

où  $S_t^\tau$  est défini par (1.3)(1.5) et  $v^{(\tau Y)}$  est un processus de Wiener standard sous l'hypothèse  $H_1(\tau, \gamma)$  (i.e. rupture à l'instant  $\tau$  d'amplitude  $\gamma$ ).

Pour déterminer la loi  $P_{\tau, \gamma}$  du processus  $v$  solution de (1.5) on utilise la représentation canonique :

- \*  $(\Omega, \mathcal{B}) = (C([0, 1]; \mathbb{R}^d), \text{tribu borélienne})$ ,
- \*  $v$  processus canonique sur  $(\Omega, \mathcal{B})$  (i.e.  $v_t(\omega) = \omega_t$ ),
- \*  $P_w$  la mesure de Wiener sur  $(\Omega, \mathcal{B})$ .

Sous  $P_w$ ,  $v$  est un processus de Wiener standard. Posons :

$$v_t^{(\tau, \gamma)} := v_t - \int_0^t S_u^\tau \gamma \, du$$

Comme  $\int_0^1 |S_t^\tau \gamma|^2 \, dt < \infty$ , d'après le théorème de Girsanov,  $v^{(\tau, \gamma)}$  est un processus de Wiener standard sous la loi  $P_{\tau, \gamma}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{B})$  par

$$(1.6) \quad \frac{dP_{\tau, \gamma}}{dP_w} = L(\tau, \gamma)$$

$$\text{où} \quad L(\tau, \gamma) := \exp \int_0^1 \left\{ S_t^\tau \gamma \cdot dv_t - \frac{1}{2} |S_t^\tau \gamma|^2 \, dt \right\}$$

Si  $H_0$  désigne l'hypothèse de non-rupture et  $H_1(\tau, \gamma)$  l'hypothèse de rupture à l'instant  $\tau$  d'amplitude  $\gamma$ , on a le résultat suivant :

- \* sous  $H_0$  :  $v$  suit la loi  $P_w$ ,
- \* sous  $H_1(\tau, \gamma)$  :  $v$  suit la loi  $P_{\tau, \gamma}$ ,

et le rapport de vraisemblance  $dP_{\tau, \gamma}/dP_w$  est donné par (1.6). Le rapport de vraisemblance de l'hypothèse  $H_0$  contre l'hypothèse  $H_1 = \{H_1(\tau, \gamma) ; 0 \leq \tau < 1, \gamma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\}$  s'écrit :

$$L := \sup \{ L(\tau, \gamma) ; 0 \leq \tau < 1, \gamma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \}$$

Posons :

$$M^{(\tau)} := \int_0^1 S_t^\tau \cdot dv_t, \quad \langle M^{(\tau)} \rangle := \int_0^1 S_t^\tau \cdot S_t^\tau dt$$

D'après (1.6) :

$$L(\tau, \gamma) = \exp \left\{ \gamma \cdot M^{(\tau)} - \frac{1}{2} \gamma \cdot \langle M^{(\tau)} \rangle \gamma \right\}$$

$\langle M^{(\tau)} \rangle$  est une matrice symétrique définie non-négative, supposons-la définie positive ( $\forall \tau < 1$ ). On peut alors poser :

$$(1.7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \hat{\tau} \in \text{Arg max}_{0 \leq \tau < 1} \exp \left\{ \frac{1}{2} M^{(\tau)} \cdot \langle M^{(\tau)} \rangle^{-1} M^{(\tau)} \right\} \\ \hat{\gamma} = \langle M^{(\hat{\tau})} \rangle^{-1} M^{(\hat{\tau})} \end{array} \right.$$

il est facile de voir que :

$$(1.8) \quad L = L(\hat{\tau}, \hat{\gamma}) = \max \left\{ L(\tau, \gamma) ; 0 \leq \tau < 1, \gamma \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Ainsi le test de rupture s'effectue de la manière suivante :

$$(1.9) \quad \text{si } L \leq c \text{ (resp. } > c) : \text{ on accepte } H_0 \text{ (resp. } H_1)$$

où  $c$  est un seuil donné. Et les estimateurs du maximum de vraisemblance  $\hat{\tau}$  &  $\hat{\gamma}$  des paramètres  $\tau$  &  $\gamma$  sont donnés par (1.7).

□

Remarque: On est ainsi confronté à plusieurs difficultés. D'une part, la définition correcte du rapport de vraisemblance (1.8) (en particulier l'inversibilité de la matrice  $\langle M^{(\tau)} \rangle$ ); d'autre part, le choix du seuil  $c$  dans (1.9) en fonction d'une probabilité donnée de fausse alarme :

$$\alpha = P(\text{accepter } H_1 \mid H_0) \dots$$

Ce dernier problème - le calcul du niveau du test (1.9) - n'a pas de réponse simple. Une possibilité consiste à faire appel à des méthodes de statistique asymptotique (cf IBRAGIMOV-HAS'MINSKII [15], KUTOYANTS [20]). Dans notre problème on introduit un paramètre  $\varepsilon \in ]0,1[$  de telle sorte que pour  $\varepsilon \rightarrow 0$  le modèle statistique initial est asymptotiquement équivalent à un modèle exponentiel. Enfin, dans le cadre de ce modèle exponentiel, on introduira un problème de test unilatère qui nous permettra de résoudre le problème de détection de ruptures.

□

## I.2 RUPTURE D'AMPLITUDE CONNUE

Dans cette section on suppose que le saut  $\gamma$  de la rupture est connu. Le problème consiste alors à détecter une rupture éventuelle et ensuite à déterminer un estimateur  $\hat{\tau}$  de l'instant de rupture.

L'asymptotique considérée est l'amplitude du saut  $\gamma$  tendant vers l'infini. A la fin de cette section on fera une remarque concernant une autre asymptotique: covariance de  $W$  et  $V \rightarrow 0$ .

On considère le système :

$$(2.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX_t = \left\{ A X_t + a + \frac{1}{\varepsilon} \Sigma(\tau, t) \gamma \right\} dt + B dW_t, \quad X_0 = x_0 \\ dY_t = \left\{ H X_t + h \right\} dt + dV_t, \quad Y_0 = 0 \end{array} \right.$$

où  $\varepsilon \in ]0, 1]$  et le filtre :

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\hat{X}_t = \left\{ A \hat{X}_t + a \right\} dt + R(t) H' dv_t, \quad \hat{X}_0 = x_0 \\ dv_t = dY_t - \left\{ H \hat{X}_t + h \right\} dt, \quad v_t = 0 \\ \frac{d}{dt} R(t) = A R(t) + R(t) A' + BB' - R(t) H' H R(t), \quad R(0) = 0 \end{array} \right.$$

En reprenant la construction faite dans la section précédente, on vérifie que sous l'hypothèse  $H_1(\tau)$  (i.e. rupture à l'instant  $\tau$ )  $v$  suit une loi  $P_{\tau}^{(\varepsilon)}$  sur  $(\Omega, \mathcal{B})$  définie par :

$$\frac{dP_{\tau}^{(\varepsilon)}}{dP_w} = L_{\varepsilon}(\tau) := \exp \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} S(\tau, t) \cdot dv_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} |S(\tau, t)|^2 dt \right\}$$



où  $S(\tau, t) = S_t^\tau \gamma$  (cf. (1.3) (1.4)) et  $P_W$  est la mesure de Wiener. Sous l'hypothèse  $H_0$  (i.e. pas de rupture)  $v$  suit la loi  $P_W$ . De plus  $v$  admet la représentation :

$$(2.3) \quad dv_t = \frac{1}{\varepsilon} S(\tau, t) dt + dv_t^{(\varepsilon, \tau)}$$

où  $v^{(\varepsilon, \tau)}$  est un  $P_\tau^{(\varepsilon)}$ -processus de Wiener standard.

### I.2.1 Normalité asymptotique locale

Dans cette section on établit la normalité asymptotique locale de la famille des lois  $\{P_\tau^{(\varepsilon)} ; 0 \leq \tau \leq 1\}$ . On considère l'information de Fisher :

$$F(\tau) := \int_0^1 |\dot{S}(\tau, t)|^2 dt$$

$$\dot{S}(\tau, t) := \dot{S}_t^\tau \gamma := \frac{\partial S_t^\tau}{\partial \tau} \gamma = -H \psi(t, \tau) \gamma \text{ si } t \geq \tau, 0 \text{ si } t < \tau.$$

Dans la suite on sera amené à considérer des points  $\tau$  tels que  $F(\tau) > 0$ . Pour avoir cette propriété, il existe des conditions suffisantes, par exemple :

#### PROPOSITION 2.1

Supposons le système (2.1), uniformément complètement observable, c'est à dire : il existe  $\alpha, \beta, \delta > 0$  tels que pour tout  $\sigma, \tau \in [0, 1]$ ,

$$\sigma - \tau \geq \delta \implies 0 < \alpha I_{n \times n} \leq G(\sigma, \tau) \leq \beta I_{n \times n}$$

Où  $G(\sigma, \tau)$  est défini par :

$$G(\sigma, \tau) := \int_{\tau}^{\sigma} \phi(t, \sigma)' H' H \phi(t, \sigma) dt$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi(t, s) = A \phi(t, s) \quad , \quad \phi(s, s) = I_{n \times n}$$

alors :  $\forall \tau \in [0, 1-\delta], F(\tau) > 0$

□

Pour plus de détails concernant les problèmes d'observabilité dans un système linéaire on pourra se référer à FAURE et al [13].

Preuve :

On définit :  $H(\sigma, \tau) := \int_{\tau}^{\sigma} \Psi(t, \sigma)' H' H \Psi(t, \sigma) dt$  où  $\Psi(t, \sigma)$  est défini par (1.4). La proposition découle des relations :

$$G(\sigma, \tau) \leq H(\sigma, \tau)$$

et

$$F(\tau) = \gamma' \Psi(1, \tau)' H(1, \tau) \Psi(1, \tau) \gamma$$

□

On considère la renormalisation suivante du rapport de vraisemblance :

$$(2.5) \quad Z_{\varepsilon, \tau}(u) := \frac{dP_{\tau+\varepsilon u}^{(\varepsilon)}}{dP_{\tau}^{(\varepsilon)}} = \frac{L_{\varepsilon}(\tau+\varepsilon u)}{L_{\varepsilon}(\tau)}$$

où  $u \in D_{\varepsilon, \tau} := \{ u : 0 \leq \tau + \varepsilon u \leq 1 \}$ . Par définition de  $L_{\varepsilon}(\tau)$  :

$$Z_{\varepsilon, \tau}(u) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \{ S(\tau + \varepsilon u, t) - S(\tau, t) \} . dv_t^{(\varepsilon, \tau)} \right. \\ \left. - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^1 | S(\tau + \varepsilon u, t) - S(\tau, t) |^2 dt \right\}$$

**THEOREME 2.2**

Soit  $\tau \in [0,1]$ , posons:

$$\Delta_{\varepsilon, \tau} := \int_0^1 \dot{S}(\tau, t) \cdot \{dv_t - \varepsilon^{-1} S(\tau, t) dt\}$$

$Z_{\varepsilon, \tau}(u)$  admet la représentation suivante:

$$Z_{\varepsilon, \tau}(u) = \exp \left\{ u \Delta_{\varepsilon, \tau} - \frac{1}{2} u^2 F(\tau) + O_{\varepsilon, \tau}(u) \right\}$$

avec:

$$(\Delta) \text{ loi} \left\{ \Delta_{\varepsilon, \tau} \mid P_{\tau}^{(\varepsilon)} \right\} = N(0, F(\tau)) , \quad 0 < \varepsilon \leq 1 ;$$

$$(\Delta\Delta) \text{ pour toute suite } \{u_{\varepsilon}\} \text{ bornée: } P_{\tau}^{(\varepsilon)}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O_{\varepsilon, \tau}(u_{\varepsilon}) = 0 .$$

□

**Preuve :**

Par définition :  $\Delta_{\varepsilon, \tau} = \int_0^1 \dot{S}(\tau, t) \cdot dv_t^{(\varepsilon, \tau)}$  .

Ainsi pour montrer  $(\Delta)$ , il suffit de remarquer que sous la loi  $P_{\tau}^{(\varepsilon)}$ ,  $v^{(\varepsilon, \tau)}$  est un processus de Wiener standard. Pour  $(\Delta\Delta)$  on pose :

$$O_{\varepsilon, \tau}(u) := \text{Log} Z_{\varepsilon, \tau}(u) - u \Delta_{\varepsilon, \tau} + \frac{1}{2} u^2 F(\tau)$$

Soit  $\{u_{\varepsilon}\}$  une suite bornée, posons  $\alpha_{\varepsilon} = \varepsilon u_{\varepsilon}$  :

$$\begin{aligned} O_{\varepsilon, \tau}(u_{\varepsilon}) &= u_{\varepsilon} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\alpha_{\varepsilon}} \{S(\tau + \alpha_{\varepsilon}, t) - S(\tau, t)\} - \dot{S}(\tau, t) \right\} \cdot dv_t^{(\varepsilon, \tau)} \\ &\quad - \frac{1}{2} u_{\varepsilon}^2 \int_0^1 \left\{ \left| \frac{1}{\alpha_{\varepsilon}} \{S(\tau + \alpha_{\varepsilon}, t) - S(\tau, t)\} \right|^2 - \left| \dot{S}(\tau, t) \right|^2 \right\} dt \\ &=: u_{\varepsilon} A_{\varepsilon} - \frac{1}{2} u_{\varepsilon}^2 B_{\varepsilon} \end{aligned}$$

Comme  $\dot{S}(\tau, t) = -H \Psi(\tau, t) \gamma$  si  $t \geq \tau$ , 0 si  $t < \tau$ , il n'est pas difficile de vérifier que:

$$\int_0^1 |\dot{S}(\tau+\delta, t) - \dot{S}(\tau, t)|^2 dt \rightarrow 0 \text{ quand } \delta \rightarrow 0.$$

Loi  $\{ A_\epsilon | P_\tau^{(\epsilon)} \} = N(0, \sigma_\epsilon^2)$  avec:

$$\begin{aligned} \sigma_\epsilon^2 &= \int_0^1 | \alpha_\epsilon^{-1} (S(\tau+\alpha_\epsilon, t) - S(\tau, t)) - \dot{S}(\tau, t) |^2 dt \\ &= \int_0^1 | \alpha_\epsilon^{-1} \int_0^{\alpha_\epsilon} (\dot{S}(\tau+\delta, t) - \dot{S}(\tau, t)) d\delta |^2 dt \\ &\leq \max_{|\delta| \leq |\alpha_\epsilon|} \int_0^1 |\dot{S}(\tau+\delta, t) - \dot{S}(\tau, t)|^2 dt \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Par un raisonnement similaire on montre que  $B_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$ .

□

### I.2.2 Test d'existence de ruptures

Au lieu de tester  $\tau < 1$  contre  $\tau \geq 1$ , on se fixe  $\bar{\tau} < 1$  tel que  $F(\bar{\tau}) > 0$ , et on considère le problème suivant:

tester  $H_0$  : pas de rupture avant  $\bar{\tau}$  ( $\tau \geq \bar{\tau}$ ),  
contre  $H_1$  : rupture avant  $\bar{\tau}$  ( $\tau < \bar{\tau}$ ).

De cette manière on obtient un retard minimal à la détection de  $1 - \bar{\tau}$ . On s'aperçoit en fait que ce retard est inévitable ( cf. BASSEVILLE-BENVENISTE [3], WILLISKY-JONES [29] ). En effet on ne peut pas tester les hypothèses de rupture à un instant trop proche de l'instant final 1; la quantité d'information contenue dans l'observation entre  $\tau$  & 1 risque d'être insuffisante pour que le test se fasse dans de bonnes conditions.

On pose :  $Z_\varepsilon(u) := Z_{\varepsilon, \bar{\tau}}(u)$  ,  $\Delta_\varepsilon := \Delta_{\varepsilon, \bar{\tau}}$  ,  $F := F(\bar{\tau})$  ;

$$O_\varepsilon(u) := O_{\varepsilon, \bar{\tau}}(u) ;$$

$$D_{\varepsilon, K}^0 := \{ u : \bar{\tau} + \varepsilon u \in [0, 1] , 0 \leq u < K \} ;$$

$$D_{\varepsilon, K}^1 := \{ u : \bar{\tau} + \varepsilon u \in [0, 1] , -K < u < 0 \} ;$$

$$P_u^{(\varepsilon)} := P_{\bar{\tau} + \varepsilon u}^{(\varepsilon)} , \quad E_u^{(\varepsilon)} := E_{\bar{\tau} + \varepsilon u}^{(\varepsilon)} .$$

Après changement de variable le problème de test initial est équivalent à :

$$H_0 : u \geq 0 \quad \text{contre} \quad H_1 : u < 0$$

Nous allons proposer un test de  $H_0$  contre  $H_1$  , et nous étudierons ses propriétés asymptotiques; pour cela nous introduisons les définitions suivantes ( cf. CHIBISOV[7], ROUSSAS[23] ) : On appelle test toute famille  $\phi = \{\phi_\varepsilon\}$  d'applications mesurables  $\phi_\varepsilon : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$  . Etant donné  $\alpha \in ]0, 1[$  une probabilité de fausse alarme, un test  $\phi = \{\phi_\varepsilon\}$  de  $H_0$  contre  $H_1$  est dit de niveau asymptotique  $\alpha$  si :

$$(2.6) \quad \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} \beta_\varepsilon(u, \phi) \leq \alpha , \quad \forall K > 0 ,$$

où :

$$\beta_\varepsilon(u, \phi) := E_u^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon$$

Un test  $\phi^* = \{\phi_\varepsilon^*\}$  de  $H_0$  contre  $H_1$  est asymptotiquement localement le plus puissant (ALPP) au niveau  $\alpha$ , s'il est de niveau asymptotique  $\alpha$  et si pour tout test  $\phi = \{\phi_\varepsilon\}$  de niveau asymptotique  $\alpha$  :

$$(2.7) \quad \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{u \in D_{\varepsilon, K}^1} \{ \beta_\varepsilon(u, \phi^*) - \beta_\varepsilon(u, \phi) \} \geq 0 , \quad \forall K > 0 .$$

**THEOREME 2.3**

On considère le test  $\phi^*$  défini par :

$$\phi_{\epsilon}^* = \begin{cases} 1 & \text{si } F^{-\frac{1}{2}} \Delta_{\epsilon} \leq C_{\alpha} & (\text{accepter } H_1) \\ 0 & \text{si } F^{-\frac{1}{2}} \Delta_{\epsilon} > C_{\alpha} & (\text{accepter } H_0) \end{cases}$$

où  $C_{\alpha}$  désigne le  $(1-\alpha)$  quantile de la loi  $N(0,1)$ .  $\phi^*$  est ALPP au niveau  $\alpha$ . □

Avant de démontrer ce résultat, on considère le lemme suivant :

**LEMME 2.4**

Soit  $f_{\epsilon} \in L^{\infty}(\Omega, \mathbb{B}, P_0^{(\epsilon)})$  avec  $\|f_{\epsilon}\|_{\infty} \leq c$ ,  $\forall \epsilon \in ]0,1]$ , et  $\{u_{\epsilon}\}$  suite bornée :

$$E_0^{(\epsilon)} \{ f_{\epsilon} \exp\{ u_{\epsilon} \Delta_{\epsilon} - \frac{1}{2} u_{\epsilon}^2 F + O_{\epsilon}(u_{\epsilon}) \} \} \\ \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} E_0^{(\epsilon)} \{ f_{\epsilon} \exp\{ u_{\epsilon} \Delta_{\epsilon} - \frac{1}{2} u_{\epsilon}^2 F \} \}$$

□

**Preuve**

$$\begin{aligned} & | E_0^{(\epsilon)} f_{\epsilon} \exp\{ u_{\epsilon} \Delta_{\epsilon} - \frac{1}{2} u_{\epsilon}^2 F + O_{\epsilon}(u_{\epsilon}) \} - E_0^{(\epsilon)} f_{\epsilon} \exp\{ u_{\epsilon} \Delta_{\epsilon} - \frac{1}{2} u_{\epsilon}^2 F \} | \\ & \leq c E_0^{(\epsilon)} \exp\{ u_{\epsilon} \Delta_{\epsilon} - \frac{1}{2} u_{\epsilon}^2 F \} | \exp\{ O_{\epsilon}(u_{\epsilon}) \} - 1 | \end{aligned}$$

Loi  $\{ \Delta_{\epsilon} | P_0^{(\epsilon)} \} = N(0, F)$ , ainsi  $E_0^{(\epsilon)} \exp\{ u_{\epsilon} \Delta_{\epsilon} - \frac{1}{2} u_{\epsilon}^2 F \} = 1$ , on peut donc définir une loi  $\tilde{P}_0^{(\epsilon)}$  par:

$$\frac{d\tilde{P}_0^{(\epsilon)}}{dP_0^{(\epsilon)}} := \exp\{ u_{\epsilon} \Delta_{\epsilon} - \frac{1}{2} u_{\epsilon}^2 F \}$$

Ainsi :

$$(\Delta) \quad E_0^{(\varepsilon)} \exp\{u_\varepsilon \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u_\varepsilon^2 F\} | \exp(O_\varepsilon(u_\varepsilon)) - 1 | = \tilde{E}_0^{(\varepsilon)} | \exp(O_\varepsilon(u_\varepsilon)) - 1 |$$

Puisque  $\exp(O_\varepsilon(u_\varepsilon)) \geq 0$  p.s., une condition suffisante bien connue pour que l'expression  $(\Delta)$  tende vers 0 est :

$$(\Delta\Delta) \quad \tilde{E}_0^{(\varepsilon)} \exp(O_\varepsilon(u_\varepsilon)) = 1, \quad (\forall \varepsilon) ;$$

$$(\Delta\Delta\Delta) \quad \tilde{P}_0^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp(O_\varepsilon(u_\varepsilon)) = 1 .$$

$(\Delta\Delta)$  découle des définitions de  $\tilde{P}_0^{(\varepsilon)}$  et  $Z_\varepsilon(u_\varepsilon)$ . Comme  $P_0^{(\varepsilon)}$  et  $\tilde{P}_0^{(\varepsilon)}$  sont des mesures équivalentes, la convergence  $(\Delta\Delta)$  est équivalente à :

$$P_0^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp(O_\varepsilon(u_\varepsilon)) = 1$$

, qui se déduit du théorème 2.2 .

□

### Preuve du théorème 2.3 :

Soit  $\{\phi_\varepsilon\}$  un test de niveau asymptotique  $\alpha$  :

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_u^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon \leq \alpha, \quad \forall K > 0 .$$

Il s'agit de montrer que  $\{\phi_\varepsilon^*\}$  est de niveau asymptotique  $\alpha$  et que:

$$(\Delta) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{u \in D_{\varepsilon, K}^1} E_u^{(\varepsilon)} \{ \phi_\varepsilon^* - \phi_\varepsilon \} \geq 0, \quad \forall K > 0.$$

a.

$$\begin{aligned} \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_u^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* &= \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* \exp \{ u \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u^2 F + O_\varepsilon(u) \} \\ &= E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* \exp \{ u_\varepsilon \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u_\varepsilon^2 F + O_\varepsilon(u_\varepsilon) \} \end{aligned}$$

où  $u_\varepsilon \in \overline{D_{\varepsilon, K}^0}$  réalise le supremum en  $u$  de l'expression considérée (continue en  $u$ ). D'après le lemme 2.4 on a donc:

$$\begin{aligned} \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_u^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* &\underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* \exp \{ u_\varepsilon \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u_\varepsilon^2 F \} \\ &\leq \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* \exp \{ u \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u^2 F \} \end{aligned}$$

On pose  $\bar{c} = F^{\frac{1}{2}} C_\alpha$  :  $\phi_\varepsilon^* = 1$  si  $\Delta_\varepsilon \leq \bar{c}$ , 0 si  $\Delta_\varepsilon > \bar{c}$ . Soit  $u \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} (\phi_\varepsilon^* - \alpha) \{ \exp(u \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u^2 F) - \exp(u \bar{c} - \frac{1}{2} u^2 F) \} dP_0^{(\varepsilon)} \\ &= \int_{\Delta_\varepsilon \leq \bar{c}} (1 - \alpha) \{ \text{"} \} dP_0^{(\varepsilon)} + \int_{\Delta_\varepsilon > \bar{c}} (0 - \alpha) \{ \text{"} \} dP_0^{(\varepsilon)} \end{aligned}$$

$\leq 0$



Donc :

$$\begin{aligned} & E_0^{(\varepsilon)}(\phi_\varepsilon^* - \alpha) \exp(u \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u^2 F) \\ & \leq \exp(u \bar{c} - \frac{1}{2} u^2 F) E_0^{(\varepsilon)}(\phi_\varepsilon^* - \alpha) \\ & = 0 \quad , \quad \text{car } E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* = \alpha . \end{aligned}$$

Ainsi ,

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* \exp(u \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u^2 F) \leq \alpha ,$$

et par suite ,

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_u^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* \leq \alpha .$$

De  $E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* = \alpha$  on déduit :

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_u^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* \geq \alpha$$

En conclusion :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_u^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon^* = \alpha , \quad \forall K > 0 .$$

b.

Avec le même raisonnement :

$$\underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{u \in D_{\varepsilon, K}^1} E_u^{(\varepsilon)} (\phi_\varepsilon^* - \phi_\varepsilon) =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{u \in D_{\varepsilon, K}^1} E_0^{(\varepsilon)} (\phi_\varepsilon^* - \phi_\varepsilon) \exp(u \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u^2 F + O_\varepsilon(u)) \\
&\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{u \in D_{\varepsilon, K}^1} E_0^{(\varepsilon)} (\phi_\varepsilon^* - \phi_\varepsilon) \exp(u \Delta_\varepsilon - \frac{1}{2} u^2 F) \\
&\geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{u \in D_{\varepsilon, K}^1} \exp(u \bar{c} - \frac{1}{2} u^2 F) E_0^{(\varepsilon)} (\phi_\varepsilon^* - \phi_\varepsilon) \\
&\geq \left\{ \inf_{u < 0} \exp(u \bar{c} - \frac{1}{2} u^2 F) \right\} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_0^{(\varepsilon)} (\phi_\varepsilon^* - \phi_\varepsilon)
\end{aligned}$$

et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_0^{(\varepsilon)} (\phi_\varepsilon^* - \phi_\varepsilon) = \alpha - \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon \geq \alpha - \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{u \in D_{\varepsilon, K}^0} E_u^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon \geq 0$$

D'où (A). Ce qui achève la démonstration du théorème 2.3. □

### I.2.3 Propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance

On considère l'estimateur du maximum de vraisemblance de l'instant de rupture (avec les notations de la section I.2.1) :

$$\hat{\tau}_\varepsilon \in \text{Arg max}_{0 \leq \tau \leq \bar{\tau}} L_\varepsilon(\tau)$$

où

$$L_\varepsilon(\tau) = \frac{dP_\tau^{(\varepsilon)}}{dP_W} = \exp \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} S(\tau, t) \cdot dv_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} |S(\tau, t)|^2 dt \right\}$$

$\hat{f}_\varepsilon$  est bien définie car  $(\varepsilon, \tau) \rightarrow L_\varepsilon(\tau)$  admet une version continue. En effet, il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} E_w \left| \int_0^1 S(\tau^1, t) \cdot dv_t - \int_0^1 S(\tau^2, t) \cdot dv_t \right|^2 &= \\ &= \int_0^1 |S(\tau^1, t) - S(\tau^2, t)|^2 dt \\ &\leq |\tau^1 - \tau^2|^2 \max_{0 \leq \tau, t \leq 1} |\dot{S}(\tau, t)|^2 \end{aligned}$$

Ainsi  $\tau \rightarrow \int_0^1 S(\tau, t) \cdot dv_t$  admet une modification pour  $P_w$  (donc pour tout  $P_\tau^{(\varepsilon)}$ ) qui est continue; on en déduit que  $(\varepsilon, \tau) \rightarrow L_\varepsilon(\tau)$  admet une version continue.

Jusqu'à présent nous avons supposé  $F(\bar{\tau}) > 0$ , c'est à dire  $F(\bar{\tau}) = Y' M(\bar{\tau}) Y > 0$ , où  $M(\bar{\tau})$  est la matrice définie par:

$$M(\bar{\tau}) := \int_0^1 \dot{S}_t^\tau \cdot \dot{S}_t^\tau dt$$

On suppose maintenant que la matrice  $M(\bar{\tau})$  est définie positive. En reprenant la proposition 2.1 ainsi que sa démonstration, on vérifie aisément la proposition suivante:

### PROPOSITION 2.5

Supposons le système (2.1) uniformément complètement observable, alors il existe  $\delta > 0$  tel que :

$$\forall \tau \in [0, 1 - \delta] \quad , \quad M(\tau) > 0 .$$

□

Dans cette section on établit des propriétés asymptotiques de  $\hat{\tau}_\varepsilon$  lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Ce type de problème a été largement étudié, notamment par IBRAGIMOV - HAS'MINSKII [15], et KUTOYANTS [18-20]. Les résultats que nous allons énoncer sont une application immédiate de KUTOYANTS [19].

Considérons les conditions suivantes :

(c1)  $\tau \rightarrow S(\tau, t)$  est pour presque tout  $t \in [0, 1]$  absolument continue sur  $]0, \bar{\tau}[$  ;

(c2) uniformément en  $\tau \in ]0, \bar{\tau}[$  :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 | \dot{S}(\tau + \delta, t) - \dot{S}(\tau, t) |^2 dt = 0 ;$$

(c3)  $\exists \eta > 0$  tel que  $\forall \tau, \tau' \in ]0, \bar{\tau}[$  :

$$\int_0^1 | S(\tau, t) - S(\tau', t) |^2 dt \geq \eta | \tau - \tau' |^2 .$$

Sous ces conditions on a le résultat suivant :

**THEOREME 2.6** (KUTOYANTS [19] th.1)

Si les conditions (c1) (c2) (c3) sont satisfaites, alors en tout point  $\tau^0 \in ]0, \bar{\tau}[$  :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\{\tau_\varepsilon^*\}} \sup_{|\tau - \tau^0| < \delta} E_\tau^{(\varepsilon)} \varepsilon^{-2} \{ |\tau_\varepsilon^* - \tau|^2 \} \geq F(\tau^0)^{-\frac{1}{2}}$$

où l'infimum est pris sur toutes les suites possibles  $\{\tau_\varepsilon^*\}$  d'estimateurs de  $\tau$ .

□

En particulier :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{|\tau - \tau^0| < \delta} E_{\tau}^{(\varepsilon)} \varepsilon^{-2} \{ \tau_{\varepsilon}^* - \tau \}^2 \geq F(\tau^0)^{-\frac{1}{2}}$$

Un estimateur sera dit asymptotiquement efficace s'il réalise l'égalité dans l'expression précédente ( $\forall \tau^0 \in ]0, \bar{\tau}[$ ). Les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance sont énoncées dans le théorème suivant :

**THEOREME 2.7** (KUTOYANTS [19] th.2)

Si les conditions (c1) (c2) (c3) sont satisfaites, alors pour tout  $K \subset ]0, \bar{\tau}[$ ,  $K$  compact, l'estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\tau}_{\varepsilon}$  vérifie uniformément en  $\tau \in K$  :

$$(\Delta) \quad \hat{\tau}_{\varepsilon} \text{ est consistant : } P_{\tau}^{(\varepsilon)} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \tau = \tau ;$$

( $\Delta\Delta$ )  $\hat{\tau}_{\varepsilon}$  est asymptotiquement normal :

$$\text{loi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (\hat{\tau}_{\varepsilon} - \tau) \mid P_{\tau}^{(\varepsilon)} \right\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} N(0, F(\tau)^{-\frac{1}{2}}) ;$$

( $\Delta\Delta\Delta$ ) si  $\xi$  désigne une variable réelle  $N(0, F(\tau)^{-\frac{1}{2}})$ , on a la convergence des moments :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_{\tau}^{(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (\hat{\tau}_{\varepsilon} - \tau) \right\}^p = E_{\xi}^p, \quad \forall p \in \mathbb{N} ;$$

( $\Delta\Delta\Delta$ )  $\hat{\tau}_{\varepsilon}$  est asymptotiquement efficace.

□

On vérifie maintenant les conditions (c1) (c2) (c3). Par définition de  $S(\tau, t)$  (cf. (1.3)(1.4)) :

$$S(\tau, t) = H \int_{\tau \wedge t}^t \Psi(t, s) ds \gamma$$

Ainsi (c1) se vérifie aisément. De plus  $\dot{S}(\tau, t) = -H \Psi(t, \tau) \gamma$  si  $t \geq \tau, 0$  sinon. Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |\dot{S}(\tau+\delta, t) - \dot{S}(\tau, t)|^2 dt &\leq \\ &\leq \int_0^1 |H \{\Psi(t, \tau+\delta) - \Psi(t, \tau)\} \gamma|^2 dt \\ &= \int_0^1 |H \int_{\tau}^{\tau+\delta} \{-\Psi(t, s) \{A-R(s)H^1H\} ds \gamma|^2 dt \\ &\leq c \delta^2 \end{aligned}$$

car  $R(t)$  et  $\Psi(t, s)$  sont bornés ( $\forall t, s$ ). On en déduit (c2). Soit  $\tau, \tau', \in ]0, \bar{\tau}[$ ,  $\tau < \tau'$  :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S(\tau, t) - S(\tau', t)|^2 dt &= \\ &= \int_0^1 |H \int_{\tau \wedge t}^{\tau' \wedge t} \Psi(t, s) ds \gamma|^2 dt \\ &\geq \int_{\bar{\tau}}^1 |H \Psi(t, \bar{\tau}) \int_{\tau}^{\tau'} \Psi(\bar{\tau}, s) ds \gamma|^2 dt \\ &= \left\{ \int_{\tau}^{\tau'} \Psi(\bar{\tau}, s) ds \gamma \right\} \cdot M(\bar{\tau}) \left\{ \int_{\tau}^{\tau'} \Psi(\bar{\tau}, s) ds \gamma \right\} \end{aligned}$$

Il existe  $\sigma \in ]\tau, \tau'[$  tel que :

$$\int_{\tau}^{\tau'} \Psi(\bar{\tau}, s) ds = (\tau' - \tau) \Psi(\bar{\tau}, \sigma)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 |S(\tau, t) - S(\tau', t)|^2 dt &\geq \\ &\geq (\tau' - \tau)^2 \{ \Psi(\bar{\tau}, 0) \gamma \}' \cdot M(\bar{\tau}) \{ \Psi(\bar{\tau}, 0) \gamma \} \\ &\geq \mu (\tau' - \tau)^2 \end{aligned}$$

avec :  $\mu := \min_{0 \leq \sigma \leq 1} \gamma' \Psi(\bar{\tau}, \sigma)' M(\bar{\tau}) \Psi(\bar{\tau}, \sigma) \gamma$  .

Il existe  $\bar{\sigma}$  réalisant ce minimum, comme  $\Psi(\bar{\tau}, \bar{\sigma})$  est inversible et  $\gamma \neq 0$  on a  $\Psi(\bar{\tau}, \bar{\sigma})\gamma \neq 0$ . Enfin, on a supposé  $M(\bar{\tau}) > 0$ , d'où  $\mu > 0$ . Ce qui achève la démonstration des conditions (c1) (c2) (3).

□

**Remarque :** Précédemment nous avons considéré l'asymptotique : "Amplitude du saut  $\rightarrow \infty$ ". D'autres choix sont possibles, par exemple : "covariance de  $W$  et  $V \rightarrow 0$ ". On considère le système:

$$(2.8) \quad \begin{cases} dX_t = \{ A X_t + a + \Sigma(\tau, t) \gamma \} dt + \varepsilon dW_t & , X_0 = x_0 \\ dY_t = \{ H X_t + h \} dt + \varepsilon dV_t & , Y_0 = 0 \end{cases}$$

$0 \leq t \leq 1$  ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ . Les hypothèses sont celles du début du chapitre I.

Le filtre correspondant au système (2.8) , s'écrit:

$$\left\{ \begin{aligned} d\hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} &= \{ A \hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} + a + \Sigma(\tau, t) \gamma \} dt + \frac{1}{\varepsilon} R^{(\varepsilon)}(t) H' dv_t^{(\varepsilon, \tau)} \\ dv_t^{(\varepsilon, \tau)} &= \frac{1}{\varepsilon} \{ dY_t - \{ H \hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} + h \} dt \} \\ \frac{dR^{(\varepsilon)}(t)}{dt} &= AR^{(\varepsilon)}(t) + R^{(\varepsilon)}(t)A' + \varepsilon^2 BB' - \frac{1}{\varepsilon^2} R^{(\varepsilon)}(t)H'HR^{(\varepsilon)}(t) \end{aligned} \right.$$

La covariance  $R^{(\varepsilon)}(t)$  ne dépend pas de  $\tau$  et peut se mettre sous la forme  $R^{(\varepsilon)}(t) = \varepsilon^2 R(t)$  , où  $R(t)$  est solution de l'équation de Riccati:

$$\frac{d}{dt} R(t) = A R(t) + R(t) A' + BB' - R(t) H' H R(t)$$

Par ailleurs le filtre correspondant à l'hypothèse de non rupture s'écrit:

$$\left\{ \begin{aligned} d\hat{X}_t^{(\varepsilon)} &= \{ A \hat{X}_t^{(\varepsilon)} + a + \Sigma(\tau, t) \gamma \} dt + \frac{1}{\varepsilon} R^{(\varepsilon)}(t) H' dv_t^{(\varepsilon)} \\ dv_t^{(\varepsilon)} &= \frac{1}{\varepsilon} \{ dY_t - \{ H \hat{X}_t^{(\varepsilon)} + h \} dt \} \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi: } \varepsilon dv_t^{(\varepsilon)} &= \varepsilon d(v_t^{(\varepsilon)} - v_t^{(\varepsilon, \tau)}) + \varepsilon dv_t^{(\varepsilon, \tau)} \\ &= H \{ \hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_t^{(\varepsilon)} \} dt + \varepsilon dv_t^{(\varepsilon, \tau)} \end{aligned}$$

En reprenant la définition de  $S_t^\tau$  ( cf.(1.3)(1.4) ) on vérifie sans difficulté que:



$$H \{ \hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_t^{(\varepsilon)} \} = S_t^\tau \gamma$$

On obtient donc le système :

$$dv_t^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} S_t^\tau \gamma dt + dv_t^{(\varepsilon, \tau)}$$

Les deux asymptotiques : " Amplitude du saut  $\rightarrow \infty$  " et " intensité des bruits  $\rightarrow 0$  " , sont donc équivalentes. Nous reviendrons en conclusion sur différents choix possibles d'asymptotiques.

□

### I.3 RUPTURE D'AMPLITUDE INCONNUE

Dans cette section le paramètre inconnu est  $\theta = (\tau, \gamma)$ , où  $\tau \in [0, 1]$  désigne l'instant de la rupture et  $\gamma \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  l'amplitude de celle-ci.

On rappelle que le système est :

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX_t = \left\{ A X_t + a + \frac{1}{\varepsilon} \Sigma(\tau, t) \gamma \right\} dt + B dW_t, \quad X_0 = x_0 \\ dY_t = \left\{ H X_t + h \right\} dt + dV_t, \quad Y_0 = 0 \end{array} \right.$$

$\varepsilon \in ]0, 1]$ . Et que le filtre basé sur l'hypothèse de non-rupture s'écrit :

$$(3.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\hat{X}_t = \left\{ A \hat{X}_t + a \right\} dt + R_t H' dV_t, \quad \hat{X}_0 = x_0 \\ dV_t = dY_t - \left\{ H \hat{X}_t + h \right\} dt, \quad V_0 = 0 \\ \frac{d}{dt} R_t = A R_t + R_t A' + BB' - R_t H' H R_t, \quad R_0 = 0 \end{array} \right.$$

Sur l'espace canonique  $(\Omega, \mathcal{B})$  introduit à la section I.1 :

- \* sous l'hypothèse  $H_0$  (i.e. pas de rupture  $\tau \geq 1$ )  $\nu$  suit la loi  $P_W$  (mesure de Wiener sur  $(\Omega, \mathcal{B})$ ) ;
- \* sous l'hypothèse  $H_1(\theta)$ ,  $\theta = (\tau, \gamma)$ , (i.e. rupture à l'instant  $\tau$  d'amplitude  $\gamma$ )  $\nu$  suit une loi  $P_\theta^{(\varepsilon)}$  avec :

$$(3.3) \quad \frac{dP_\theta^{(\varepsilon)}}{dP_W} = L_\varepsilon(\theta) = \exp \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} S(\theta, t) \cdot dV_t - \frac{1}{2\varepsilon^2} |S(\theta, t)|^2 dt \right\}$$

Où  $S(\theta, t)$  est défini par :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} S(\theta, t) = S_t^\tau \gamma \\ S_t^\tau = H \int_0^t \Psi(t, s) \Sigma(\tau, s) ds \\ \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, s) = \{ A - R_t H' H \} \Psi(t, s) \quad , \quad \Psi(s, s) = I_{n \times n} \end{array} \right.$$

Enfin,  $v$  admet la représentation :

$$(3.5) \quad dv_t = \frac{1}{\varepsilon} S(\theta, t) dt + dv_t^{(\varepsilon, \theta)}$$

où  $v^{(\varepsilon, \theta)}$  est un processus de Wiener standard.

Le problème consiste ici au vu d'une trajectoire  $\{v_t ; 0 \leq t \leq 1\}$  de détecter une rupture éventuelle (i.e.  $\tau < 1$ ) et d'estimer la valeur de l'instant de rupture  $\tau$  ainsi que celle du saut  $\gamma$ . Il s'agit donc d'un problème de test en présence de paramètres fantômes.

### I.3.1. Normalité asymptotique locale

On établit la normalité asymptotique locale de la famille de lois  $\{P_\theta^{(\varepsilon)} ; \theta \in \Theta\}$ ,  $\Theta = [0, 1] \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ . Posons :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{S}(\theta, t) = \dot{S}_t^\tau \gamma = \frac{\partial}{\partial \tau} S_t^\tau \gamma \\ \nabla(\theta, t) = \left( \dot{S}_t^\tau \gamma \mid S_t^\tau \right) \in \mathbb{R}^{d \times (1+n)} \\ F(\theta) = \int_0^1 \nabla(\theta, t) \cdot \nabla(\theta, t) dt \\ \Delta_{\varepsilon, \theta} = \int_0^1 \nabla(\theta, t) \cdot \left\{ dv_t - \frac{1}{\varepsilon} S(\theta, t) dt \right\} \end{array} \right.$$

$\nabla(\theta, t)$  désigne la différentielle de  $S(\theta, t)$  par rapport à  $\theta$  et  $F(\theta)$  l'information de Fisher. On considère la renormalisation suivante de rapport de vraisemblance au point  $\theta \in \Theta$  :

$$Z_{\varepsilon, \theta}(U) := \frac{dP_{\theta+\varepsilon U}^{(\varepsilon)}}{dP_{\theta}^{(\varepsilon)}} = \frac{L_{\varepsilon}(\theta+\varepsilon U)}{L_{\varepsilon}(\theta)}$$

où  $U \in D_{\varepsilon, \theta} := \{ U=(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \theta+\varepsilon U \in \Theta \}$ . D'après (3.3):

$$(3.7) \quad Z_{\varepsilon, \theta}(U) = \exp \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \{ S(\theta+\varepsilon U, t) - S(\theta, t) \} \cdot dv_t^{(\varepsilon, \theta)} \right. \\ \left. - \frac{1}{2\varepsilon^2} \int_0^1 | S(\theta+\varepsilon U, t) - S(\theta, t) |^2 dt \right\}$$

### THEOREME 3.1

Soit  $\theta \in \Theta$ , la famille de lois  $\{ P_{\theta}^{(\varepsilon)} ; \theta \in \Theta \}$  est asymptotiquement localement normale au point  $\theta$ . Plus précisément,  $Z_{\varepsilon, \theta}(U)$  admet la représentation :

$$Z_{\varepsilon, \theta}(U) = \exp \left\{ U' \Delta_{\varepsilon, \theta} - \frac{1}{2} U' F(\theta) U + o_{\varepsilon, \theta}(U) \right\}$$

avec :

$$(\Delta) \quad \text{loi} \{ \Delta_{\varepsilon, \theta} | P_{\theta}^{(\varepsilon)} \} = N(0, F(\theta)) ;$$

( $\Delta\Delta$ ) pour toute suite  $\{ U_{\varepsilon} \}$  bornée

$$P_{\theta}^{(\varepsilon)} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} o_{\varepsilon, \theta}(U_{\varepsilon}) = 0 .$$

□

La démonstration de ce théorème utilise le lemme de dérivation suivant :

**LEMME 3.2**

Pour tout  $\theta \in \Theta$  :

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} |\delta|^{-2} \int_0^1 |S(\theta+\delta, t) - S(\theta, t) - \nabla(\theta, t) \delta|^2 dt = 0$$

cette limite est uniforme en  $\theta \in \{(\tau, \gamma) \in \Theta ; |\gamma| \leq k\}$  quel que soit  $k > 0$  .

□

**Preuve :** Soit  $\delta = (u, v)$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^1 |S(\theta+\delta, t) - S(\theta, t) - \nabla(\theta, t) \delta|^2 dt = \\ & = \int_0^1 |S_t^{\tau+u} (\gamma+v) - S_t^\tau \gamma - \dot{S}_t^\tau \gamma u - S_t^\tau v|^2 dt \\ & = \int_0^1 |(S_t^{\tau+u} - S_t^\tau - u \dot{S}_t^\tau) \gamma + (S_t^{\tau+u} - S_t^\tau) v|^2 dt \\ & \leq c \int_0^1 |S_t^{\tau+u} - S_t^\tau - u \dot{S}_t^\tau|^2 dt + c \int_0^1 |S_t^{\tau+u} - S_t^\tau|^2 |v|^2 dt \\ & =: c A + c B \end{aligned}$$

Notons  $u^1 = \min(u+\tau, \tau)$  ,  $u^2 = \max(u+\tau, \tau)$ .

$$\begin{aligned} A & = \int_{u^2}^1 |S_t^{\tau+u} - S_t^\tau - u \dot{S}_t^\tau|^2 dt + \int_{u^1}^{u^2} |S_t^{\tau+u} - S_t^\tau - u \dot{S}_t^\tau|^2 dt \\ & =: A^1 + A^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A^1 &= \int_{u^2}^1 \left| H \int_{\tau+u}^t \Psi(t,s) ds - H \int_{\tau}^t \Psi(t,s) ds + u H \Psi(t,\tau) \right|^2 dt \\
&\leq c \int_{u^2}^1 \left| \int_{\tau+u}^{\tau} \{ \Psi(\tau,s) - I_{n \times n} \} ds \right|^2 dt \\
&\leq c |u|^2 \max_{|t-s| \leq u} |\Psi(t,s) - I_{n \times n}|^2
\end{aligned}$$

comme:  $\Psi(t,s) = I_{n \times n} + \int_s^t (A - RH' H) \Psi(t,r) dr$

$$|\Psi(t,s) - I_{n \times n}|^2 \leq c |t-s|^2$$

On obtient ainsi  $A^1 \leq c |u|^4$ . Soit  $u \geq 0$ ,

$$\begin{aligned}
A^2 &= \int_{\tau}^{\tau+u} \left| 0 - H \int_{\tau}^t \Psi(t,s) ds + H \Psi(t,\tau) u \right|^2 dt \\
&\leq c \int_{\tau}^{\tau+u} \left| \int_{\tau}^t \Psi(\tau,s) ds - u I_{n \times n} \right|^2 dt \\
&= c \int_{\tau}^{\tau+u} \left| \int_{\tau}^t \{ \Psi(\tau,s) - I_{n \times n} \} ds - (u + \tau - t) I_{n \times n} \right|^2 dt \\
&\leq c \{ |u|^3 + |u|^5 \}
\end{aligned}$$

De même, si  $u < 0$   $A^2 \leq c |u|^3$ . Par un raisonnement similaire on peut montrer que  $B \leq c \{ |u|^2 + |u|^3 \} |v|^2$ . En conclusion:

$$\begin{aligned}
|\delta|^{-2} \int_0^1 |S(\theta+\delta,t) - S(\theta,t) - \nabla S(\theta,t) \delta|^2 dt \\
\leq c \{ |u| + |u|^2 + |u|^4 + |v|^2 \}
\end{aligned}$$

où la constante  $c$  ne dépend que de  $k$ . □

Preuve du théorème 3.1 : (\*)

$$\text{Par définition : } \Delta_{\varepsilon, \theta} = \int_0^1 \nabla(\theta, t) \cdot dv_t^{(\varepsilon, \theta)}$$

où  $v^{(\varepsilon, \theta)}$  est un  $P_\theta^{(\varepsilon)}$ - processus de Wiener standard et  $\nabla(\theta, t)$  est déterministe. Ainsi sous  $P_\theta^{(\varepsilon)}$ ,  $\Delta_{\varepsilon, \theta}$  est un vecteur aléatoire gaussien centré de covariance :

$$\int_0^1 \nabla(\theta, t) \cdot \nabla(\theta, t) dt = F(\theta)$$

Pour montrer  $(\Delta\Delta)$ , on pose :

$$O_{\varepsilon, \theta}(U) := \text{Log } Z_{\varepsilon, \theta}(U) - U' \Delta_{\varepsilon, \theta} + \frac{1}{2} U' F(\theta) U$$

D'après (3.6) et (3.7):

$$\begin{aligned} O_{\varepsilon, \theta}(U) &= \varepsilon^{-1} \int_0^1 \{ S(\theta + \varepsilon U) - S(\theta) \} \cdot dv_t^{(\varepsilon, \theta)} - \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} \int_0^1 |S(\theta + \varepsilon U) - S(\theta)|^2 dt \\ &\quad - \int_0^1 \{ \nabla(\theta) U \} \cdot dv_t^{(\varepsilon, \theta)} + \frac{1}{2} \int_0^1 |\nabla(\theta) U|^2 dt \\ &= |U| \{ \varepsilon |U| \}^{-1} \int_0^1 \{ S(\theta + \varepsilon U) - S(\theta) - \nabla(\theta) \varepsilon U \} \cdot dv_t^{(\varepsilon, \theta)} \\ &\quad - \frac{1}{2} |U|^2 \{ \varepsilon |U| \}^{-2} \int_0^1 \{ |S(\theta + \varepsilon U) - S(\theta)|^2 - |\nabla(\theta) \varepsilon U|^2 \} dt \\ &=: |U| A_\varepsilon - \frac{1}{2} |U|^2 B_\varepsilon \end{aligned}$$

(\*) on note :  $\int_0^1 f(\theta, t) dv_t = \int_0^1 f(\theta) dv$  ,  $\int_0^1 f(\theta, t) dt = \int_0^1 f(\theta) dt$

Soit  $\{U_\varepsilon\}$  une suite bornée :  $|O_{\varepsilon, \theta}(U_\varepsilon)| \leq c |A_\varepsilon| + \frac{1}{2} c^2 |B_\varepsilon|$ . Sous  $P_\theta^{(\varepsilon)}$ ,  $A_\varepsilon$  suit une loi gaussienne centrée de variance :

$$\sigma_\varepsilon^2 := \{\varepsilon |U_\varepsilon|\}^{-2} \int_0^1 |S(\theta + \varepsilon U_\varepsilon) - S(\theta) - \nabla(\theta) \varepsilon U_\varepsilon|^2 dt$$

d'après le lemme 3.2,  $\sigma_\varepsilon^2 \rightarrow 0$ . Ainsi  $P_\theta^{(\varepsilon)}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A_\varepsilon = 0$ .

Par ailleurs, posons  $\delta_\varepsilon = \varepsilon U_\varepsilon$ ,

$$\begin{aligned} |B_\varepsilon| &= |\delta_\varepsilon|^{-2} \left| \int_0^1 |S(\theta + \delta_\varepsilon) - S(\theta)|^2 dt - \int_0^1 |\nabla(\theta) \delta_\varepsilon|^2 dt \right| \\ &= |\delta_\varepsilon|^{-1} \left| \left\{ \int_0^1 |S(\theta + \delta_\varepsilon) - S(\theta)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} - \left\{ \int_0^1 |\nabla(\theta) \delta_\varepsilon|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right| \\ &\quad \times |\delta_\varepsilon|^{-1} \left| \left\{ \int_0^1 |S(\theta + \delta_\varepsilon) - S(\theta)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} + \left\{ \int_0^1 |\nabla(\theta) \delta_\varepsilon|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right| \\ &\leq |\delta_\varepsilon|^{-1} \left\{ \int_0^1 |S(\theta + \delta_\varepsilon) - S(\theta) - \nabla(\theta) \delta_\varepsilon|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \times \\ &\quad \times \left\{ |\delta_\varepsilon|^{-1} \left\{ \int_0^1 |S(\theta + \delta_\varepsilon) - S(\theta)|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} + 2 |\delta_\varepsilon|^{-1} \left\{ \int_0^1 |\nabla(\theta) \delta_\varepsilon|^2 dt \right\}^{\frac{1}{2}} \right\} \\ &\leq c \sigma_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1

□



### I.3.2 Test d'existence de ruptures

Soit  $\tilde{\theta} = (\tilde{\tau}, \tilde{\gamma}) \in \Theta = [0, 1[ \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  tel que :

$$(3.8) \quad F(\tilde{\theta}) > 0 \quad (\text{i.e. d\u00e9finie positive})$$

Dans la section suivante on donnera un exemple de condition suffisante pour que (3.8) soit v\u00e9rifi\u00e9e. Comme dans la section I.2.2, on s'int\u00e9resse au probl\u00e8me suivant :

tester  $H_0$  : pas de rupture avant  $\tilde{\tau}$  (i.e.  $\tau \geq \tilde{\tau}$ )  
 contre  $H_1$  : rupture avant  $\tilde{\tau}$  (i.e.  $\tau < \tilde{\tau}$ )

On pose :

$$Z_\varepsilon(U) := Z_{\varepsilon, \tilde{\theta}}(U) \quad , \quad \Delta_\varepsilon := \Delta_{\varepsilon, \tilde{\theta}} \quad , \quad F := F(\tilde{\theta}) \quad , \quad O_\varepsilon(U) := O_{\varepsilon, \tilde{\theta}}(U)$$

$$D_{\varepsilon, K}^0 := \{ U=(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \tilde{\theta} + \varepsilon U \in \Theta, |U| \leq K, u \geq 0 \}$$

$$D_{\varepsilon, K}^1 := \{ U=(u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : \tilde{\theta} + \varepsilon U \in \Theta, |U| \leq K, u < 0 \}$$

$$P_0^{(\varepsilon)} := P_{\tilde{\theta}}^{(\varepsilon)} \quad , \quad E_0^{(\varepsilon)} := E_{\tilde{\theta}}^{(\varepsilon)} \quad , \quad P_{u, v}^{(\varepsilon)} := P_{\tilde{\theta} + \varepsilon U}^{(\varepsilon)} \quad , \quad E_{u, v}^{(\varepsilon)} := E_{\tilde{\theta} + \varepsilon U}^{(\varepsilon)} \quad (U=(u, v))$$

Apr\u00e8s changement de variable, le probl\u00e8me devient :

tester  $H_0$  :  $u \geq 0$  contre  $H_1$  :  $u < 0$  .

### DEFINITIONS 3.3

On appelle test toute famille  $\phi = \{\phi_\varepsilon; 0 < \varepsilon \leq 1\}$  d'applications mesurables  $\phi_\varepsilon : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow ([0, 1], \mathcal{B}_{[0, 1]})$ . Etant donn\u00e9 un test  $\phi$ , on pose :

$$\beta_\varepsilon(u, v, \phi) := E_{u, v}^{(\varepsilon)} \phi$$

Un test  $\phi$  est dit de niveau asymptotique  $\alpha \in ]0,1[$  si  $\forall K > 0$  :

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^0} \beta_{\varepsilon}(u,v,\phi) \leq \alpha .$$

Un test  $\phi$  est dit asymptotiquement sans biais (ASB) de niveau  $\alpha$  si  $\forall K > 0$  :

$$(3.9) \quad \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^0} \beta_{\varepsilon}(u,v,\phi) \leq \alpha \leq \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^1} \beta_{\varepsilon}(u,v,\phi)$$

Un test  $\phi^*$  est dit asymptotiquement sans biais de puissance maximum au niveau  $\alpha$  s'il est ASB de niveau  $\alpha$  et si pour tout test  $\phi$  ASB de niveau  $\alpha$  et  $\forall K > 0$  :

$$(3.10) \quad \underline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^1} \{ \beta_{\varepsilon}(u,v,\phi^*) - \beta_{\varepsilon}(u,v,\phi) \} \geq 0 .$$

□

Pour construire un test asymptotiquement sans biais de puissance maximum, on suit la même démarche que dans le cadre non-asymptotique du problème de test en présence de paramètres fantômes. On pose  $\Delta_{\varepsilon} = (\Delta_{\varepsilon}^1, \Delta_{\varepsilon}^2)$  avec  $\Delta_{\varepsilon}^1$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ,  $\Delta_{\varepsilon}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ . On définit une application mesurable  $\phi^*$  :

$$(3.11) \quad \phi^*(\delta^1, \delta^2) := \begin{cases} 1 & \text{si } \delta^1 \leq \rho(\delta^2) \\ 0 & \text{si } \delta^1 > \rho(\delta^2) \end{cases}$$

où  $\delta^2 \rightarrow \rho(\delta^2)$  est choisie telle que :

$$(3.12) \quad E_0^{(\varepsilon)} \{ \phi^*(\Delta_{\varepsilon}^1, \delta^2) \mid \Delta_{\varepsilon}^2 = \delta^2 \} = \alpha , \quad \forall \delta^2 \text{ p.p. .}$$

On donnera dans le lemme 3.6 la forme explicite de  $\rho(\cdot)$  qui ne dépend pas de  $\varepsilon$ . On introduit le test  $\phi^*$  suivant :

$$(3.13) \quad \phi_{\varepsilon}^* := \phi^*(\Delta_{\varepsilon}^1, \Delta_{\varepsilon}^2)$$

**THEOREME 3.4**

Le test  $\phi^*$  défini par (3.11) (3.12) (3.13) est asymptotiquement sans biais de puissance maximum au niveau  $\alpha$ .

□

On introduit les notations suivantes :

**Notations 3.5 :**

Soit  $\Delta = (\Delta^1, \Delta^2)$  un vecteur aléatoire gaussien  $N(0, F)$  sur un espace probabilisé  $(E, T, P_0)$ ;  $\Delta$  à valeurs dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ . Sur  $(E, T, P_0)$  on définit :

( $\Delta$ )  $N(d\delta^1, d\delta^2)$  la loi de  $(\Delta^1, \Delta^2)$  ;

( $\Delta\Delta$ )  $N^1(d\delta^1 | \delta^2)$  la loi conditionnelle de  $\Delta^1$  sachant que  $\Delta^2 = \delta^2$  ;

( $\Delta\Delta\Delta$ )  $N^2(d\delta^2)$  la loi marginale de  $\Delta^2$  .

De plus, sur  $(E, T)$  on définit la loi  $P_{u,v}$  par :

$$dP_{u,v} = \exp(u\Delta^1 + v \cdot \Delta^2) C(u,v) dP_0, \quad (u,v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

où  $C(u,v) = \exp(-\frac{1}{2} U \cdot F U) = \{ E_0 \exp(u\Delta^1 + v \cdot \Delta^2) \}^{-1}$ ,  $U = (u,v)$  .

Sur  $(E, T, P_{u,v})$  on pose :

( $\Delta$ )  $R_{u,v}(d\delta^1, d\delta^2)$  la loi de  $(\Delta^1, \Delta^2)$  ;

( $\Delta\Delta$ )  $R_{u,v}^1(d\delta^1 | \delta^2)$  la loi conditionnelle de  $\Delta^1$  sachant que  $\Delta^2 = \delta^2$  ;

( $\Delta\Delta\Delta$ )  $R_{u,v}^2(d\delta^2)$  la loi marginale de  $\Delta^2$ .

On a le résultat classique suivant (cf. LEHMANN [22], p.52) :

$R_u^1(d\delta^1 | \delta^2)$  ne dépend pas du paramètre  $v$  et,

$$(\Delta) \quad R_{u,v}(d\delta^1, d\delta^2) = \exp(u\delta^1 + v.\delta^2) C(u,v) N(d\delta^1, d\delta^2) ,$$

$$(\Delta\Delta) \quad R_u^1(d\delta^1 | \delta^2) = e^{u\delta^1} C_{\delta^2}(u) N^1(d\delta^1 | \delta^2) ,$$

$$(\Delta\Delta\Delta) \quad R_{u,v}^2(d\delta^2) = e^{v.\delta^2} \frac{C(u,v)}{C_{\delta^2}(u)} N^2(d\delta^2) ,$$

où  $C_{\delta^2}(u) := \left\{ \int e^{u\delta^1} N^1(d\delta^1 | \delta^2) \right\}^{-1}$ . On note  $E_0$  (resp.  $E_{u,v}$ ) l'espérance sous  $P_0$  (resp.  $P_{u,v}$ ).  $\square$

Nous allons maintenant donner la forme explicite de la fonction  $\rho(\cdot)$  introduite en (3.11) (3.12). Notons :

$$F := \left[ \begin{array}{c|c} F_1 & f' \\ \hline f & F_2 \end{array} \right] , \quad F^{-1} := \left[ \begin{array}{c|c} G_1 & g' \\ \hline g & G_2 \end{array} \right]$$

( $F^{-1}$  existe car  $F$  est symétrique définie positive).  $F^{-1}$  est définie en fonction de  $F$  par :

$$\begin{aligned} G_1 &= \{ F_1 - f' F_2^{-1} f \}^{-1} && \in \mathbb{R} , \\ g &= - F_2^{-1} f G_1 && \in \mathbb{R}^n , \\ G_2 &= F_2^{-1} \{ I_{n \times n} - f g' \} && \in \mathbb{R}^{n \times n} . \end{aligned}$$

### LEMME 3.6

Désignons par  $q(\alpha)$  le  $\alpha$ -quantile de la loi  $N(0,1)$ . La fonction  $\rho(\cdot)$  est donnée par :

$$\rho(x) := \frac{q(\alpha)}{\{G_1\}^{1/2}} - \frac{g' x}{G_1} , \quad x \in \mathbb{R}^n .$$

$\square$

**Preuve :**

D'après le théorème 3.1, loi  $\{ (\Delta_\varepsilon^1, \Delta_\varepsilon^2) \mid P_0^{(\varepsilon)} \} = N(0, F)$ , ainsi avec les notations 3.5 :

$$\begin{aligned} E_0^{(\varepsilon)} \{ \phi^*(\Delta_\varepsilon^1, \delta^2) \mid \Delta_\varepsilon^2 = \delta^2 \} &= P_0^{(\varepsilon)} \{ \Delta_\varepsilon^1 \leq \rho(\delta^2) \mid \Delta_\varepsilon^2 = \delta^2 \} \\ &= N^1( \delta^1 : \delta^1 \leq \rho(\delta^2) \mid \delta^2 ) \\ &= \left\{ \int f(\delta^1, \delta^2) d\delta^1 \right\}^{-1} \left\{ \int_{\delta^1 \leq \rho(\delta^2)} f(\delta^1, \delta^2) d\delta^1 \right\} \end{aligned}$$

avec  $f(\delta^1, \delta^2) = \exp\{ -\frac{1}{2} \delta^1 F^{-1} \delta \}$ ,  $\delta = (\delta^1, \delta^2)$ . Ainsi la relation (3.12) s'écrit après simplifications :

$$\alpha = (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int_{x \leq G_1^2 (\rho(\delta^2) + G_1^{-1} g^1 \delta^2)} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx$$

c'est-à-dire:  $q(\alpha) = G_1^{\frac{1}{2}} (\rho(\delta^2) + G_1^{-1} g^1 \delta^2)$ .

□

**LEMME 3.7**

Soit  $\{\phi_\varepsilon\}$  une suite de variables aléatoires réelles,  $\phi_\varepsilon \in L^\infty(\Omega, B, P_0^{(\varepsilon)})$ ,  $|\phi_\varepsilon| \leq c$  p.s. ( $\forall \varepsilon$ ) et  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  une suite bornée dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ :

$$E_{u_\varepsilon, v_\varepsilon}^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} E_{u_\varepsilon, v_\varepsilon} \psi_\varepsilon(\Delta^1, \Delta^2)$$

où  $\psi_\varepsilon$  est défini par :  $\psi_\varepsilon(\delta^1, \delta^2) := E_0^{(\varepsilon)} \{ \phi_\varepsilon \mid \Delta_\varepsilon^1 = \delta^1, \Delta_\varepsilon^2 = \delta^2 \}$

□

**Preuve :**

On montre d'abord que :

$$(\Delta) \quad E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \exp\{O_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\} \\ \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$$

La valeur absolue de la différence de ces deux derniers termes est majorée par :

$$E_0^{(\varepsilon)} |\phi_\varepsilon| \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) |\exp\{O_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\} - 1| \\ \leq c E_0^{(\varepsilon)} \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) |\exp\{O_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\} - 1|$$

En utilisant le raisonnement de la démonstration du lemme 2.4, on montre que :

$$E_0^{(\varepsilon)} \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) |\exp\{O_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\} - 1| \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

Ainsi  $(\Delta)$  est vérifiée. Pour conclure, il suffit de remarquer que :

$$E_{u_\varepsilon, v_\varepsilon}^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon = E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \exp\{O_\varepsilon(u_\varepsilon, v_\varepsilon)\} \\ \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\sim} E_0^{(\varepsilon)} \phi_\varepsilon \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ = E_0^{(\varepsilon)} E_0^{(\varepsilon)} \{ \phi_\varepsilon | \Delta_\varepsilon^1, \Delta_\varepsilon^2 | \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \} \\ = E_0^{(\varepsilon)} \psi_\varepsilon(\Delta_\varepsilon^1, \Delta_\varepsilon^2) \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ = E_0 \psi_\varepsilon(\Delta^1, \Delta^2) \exp(u_\varepsilon \Delta_\varepsilon^1 + v_\varepsilon \Delta_\varepsilon^2) C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) \\ = E_{u_\varepsilon, v_\varepsilon} \psi_\varepsilon(\Delta^1, \Delta^2)$$

□

Preuve du théorème 3.4 :

Dans cette démonstration on utilise toutes les notations 3.5.

Soit  $\{\phi_\epsilon\}$  un test asymptotiquement sans biais de niveau  $\alpha$  :

$$\forall K > 0, \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{(u,v) \in D_{\epsilon,K}^0} \beta_\epsilon(u,v,\phi) \leq \alpha \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{(u,v) \in D_{\epsilon,K}^1} \beta_\epsilon(u,v,\phi)$$

Par continuité de la fonction  $(u,v) \rightarrow \beta_\epsilon(u,v,\phi)$  on vérifie:

$$\forall K > 0, \overline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \sup_{|v| \leq K} \beta_\epsilon(0,v,\phi) \leq \alpha \leq \underline{\lim}_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{|v| \leq K} \beta_\epsilon(0,v,\phi) .$$

Donc, si  $\{v_\epsilon\}$  désigne une suite bornée dans  $\mathbb{R}^n$ , on a :

$$(\Delta) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \beta_\epsilon(0, v_\epsilon, \phi) = \alpha ,$$

c'est-à-dire  $\{\phi_\epsilon\}$  est asymptotiquement  $\alpha$ -similaire. Posons:

$$\psi_\epsilon(\delta^1, \delta^2) := E_0^{(\epsilon)} \{ \phi_\epsilon \mid \Delta_\epsilon^1 = \delta^1, \Delta_\epsilon^2 = \delta^2 \}$$

On obtient grâce au lemme 3.7 :

$$\beta_\epsilon(0, v_\epsilon, \phi) \underset{\epsilon \rightarrow 0}{\sim} E_{0, v_\epsilon} \psi_\epsilon(\Delta^1, \Delta^2) .$$

$$\text{D'où : } E_{0, v_\epsilon} \psi_\epsilon(\Delta^1, \Delta^2) - \alpha =$$

$$= C(0, v_\epsilon) \int \{ E_0 \{ \psi_\epsilon(\Delta^1, \delta^2) \mid \Delta^2 = \delta^2 \} - \alpha \} \exp(v_\epsilon \cdot \delta^2) N^2(d\delta^2) \\ \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0 .$$

Ainsi pour toute suite bornée  $\{v_\epsilon\}$ ,

$$(\Delta\Delta) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \{ E_0 \{ \psi_\epsilon(\Delta^1, \delta^2) \mid \Delta^2 = \delta^2 \} - \alpha \} \exp(v_\epsilon \cdot \delta^2) N^2(d\delta^2) = 0 .$$

Soit  $(u_\epsilon, v_\epsilon) \in \overline{D_{\epsilon, K}^1}$  réalisant l'infimum de  $\beta_\epsilon(u, v, \phi^*) - \beta_\epsilon(u, v, \phi)$  sur  $D_{\epsilon, K}^1$ , on a :

$$\begin{aligned} & \beta_\epsilon(u_\epsilon, v_\epsilon, \phi^*) - \beta_\epsilon(u_\epsilon, v_\epsilon, \phi) \\ & \stackrel{\sim}{\epsilon \rightarrow 0} E_{u_\epsilon, v_\epsilon} (\phi^* - \psi_\epsilon)(\Delta^1, \Delta^2) \quad (\text{d'après le lemme 3.7}) \\ & \geq \inf_{(u, v) \in D_{\epsilon, K}^1} E_{u, v} \{ (\phi^* - \psi_\epsilon)(\Delta^1, \Delta^2) \} \end{aligned}$$

Ainsi pour démontrer le théorème, il suffit de vérifier :

$$(\Delta\Delta) \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \inf_{(u, v) \in D_{\epsilon, K}^1} E_{u, v} \{ (\phi^* - \psi_\epsilon)(\Delta^1, \Delta^2) \} \geq 0 ;$$

$$(\Delta\Box) \quad \phi^* \text{ est ASB de niveau } \alpha .$$

Soit  $u < 0$  :

$$\begin{aligned} & \int (\phi^* - \psi_\epsilon)(\delta^1, \delta^2) \{ e^{u\delta^1} - e^{u\rho(\delta^2)} \} C_{\delta^2}(u) N^1(d\delta^1 | \delta^2) = \\ & = \int_{\delta^1 \leq \rho(\delta^2)} \{ 1 - \psi_\epsilon(\delta^1, \delta^2) \} \{ e^{u\delta^1} - e^{u\rho(\delta^2)} \} C_{\delta^2}(u) N^1(d\delta^1 | \delta^2) \\ & \quad + \int_{\delta^1 > \rho(\delta^2)} \{ 0 - \psi_\epsilon(\delta^1, \delta^2) \} \{ e^{u\delta^1} - e^{u\rho(\delta^2)} \} C_{\delta^2}(u) N^1(d\delta^1 | \delta^2) \geq 0 \end{aligned}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned} & E_u \{ (\phi^* - \psi_\epsilon)(\Delta^1, \delta^2) | \Delta^2 = \delta^2 \} \\ & \geq e^{u\rho(\delta^2)} C_{\delta^2}(u) E_0 \{ (\phi^* - \psi_\epsilon)(\Delta^1, \delta^2) | \Delta^2 = \delta^2 \} \\ & = e^{u\rho(\delta^2)} C_{\delta^2}(u) \{ \alpha - E_0 \{ \psi_\epsilon(\Delta^1, \delta^2) | \Delta^2 = \delta^2 \} \} \end{aligned}$$

Ainsi :



$$\begin{aligned}
& \inf_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^1} E_{u,v} \{ (\phi^* - \psi_\varepsilon)(\Delta^1, \Delta^2) \} = \\
& = \inf_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^1} \int E_u \{ (\phi^* - \psi_\varepsilon)(\Delta^1, \delta^2) \mid \Delta^2 = \delta^2 \} R_{u,v}^2(d\delta^2) \\
& \geq \inf_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^1} \int \{ \alpha - E_0 \{ \psi_\varepsilon(\Delta^1, \delta^2) \mid \Delta^2 = \delta^2 \} \} e^{u\rho(\delta^2)} C_{\delta^2}(u) R_{u,v}^2(d\delta^2) \\
& = \inf_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^1} \int \{ \alpha - E_0 \{ \psi_\varepsilon(\Delta^1, \delta^2) \mid \Delta^2 = \delta^2 \} \} e^{u\rho(\delta^2) + v \cdot \delta^2} C(u,v) N^2(d\delta^2) \\
& = \int \{ \alpha - E_0 \{ \psi_\varepsilon(\Delta^1, \delta^2) \mid \Delta^2 = \delta^2 \} \} \exp\{u_\varepsilon \rho(\delta^2) + v_\varepsilon \cdot \delta^2\} C(u_\varepsilon, v_\varepsilon) N^2(d\delta^2)
\end{aligned}$$

où  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  réalise l'infimum de l'expression considérée sur  $\overline{D_{\varepsilon,K}^1}$ .

D'après le lemme 3.6  $\exp\{u_\varepsilon \rho(\delta^2) + v_\varepsilon \cdot \delta^2\} C(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  est de la forme  $\exp(a_\varepsilon + b_\varepsilon \cdot \delta^2)$  où  $\{a_\varepsilon\}$  &  $\{b_\varepsilon\}$  sont des suites bornées. Donc :

$$\begin{aligned}
& \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^1} E_{u,v} \{ (\phi^* - \psi_\varepsilon)(\Delta^1, \Delta^2) \} \\
& \geq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \exp(a_\varepsilon) \int \{ \alpha - E_0 \{ \psi_\varepsilon(\Delta^1, \delta^2) \mid \Delta^2 = \delta^2 \} \} \exp(b_\varepsilon \cdot \delta^2) N^2(d\delta^2) \\
& = 0 \quad \text{d'après } (\Delta\Delta).
\end{aligned}$$

Ainsi  $(\Delta\Delta\Delta)$  est démontré. Enfin, en considérant le test trivial  $\phi_\varepsilon = \alpha$ , avec le résultat précédent, on obtient :

$$\alpha \leq \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^1} \beta_\varepsilon(u,v, \phi^*) \quad , \quad \forall K > 0 .$$

Et par le même genre de raisonnement on peut vérifier que :

$$\overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{(u,v) \in D_{\varepsilon,K}^0} \beta_\varepsilon(u,v, \phi^*) = \alpha \quad , \quad \forall K > 0 .$$

Donc,  $\phi^*$  est un test asymptotiquement sans biais au niveau  $\alpha$ . Ce qui achève la démonstration du théorème 3.4.

□

**Remarque :** On s'est inspiré de la construction des tests de puissance maximum sans biais portant sur des familles de lois exponentielles avec paramètres fantômes (cf. LEHMANN[22] p.134).

L'expression ( $\Delta$ ) établit qu'un test asymptotiquement sans biais est "asymptotiquement semblable". Comme sous  $P_0^{(\varepsilon)}$  la statistique  $\Delta_\varepsilon^2$  est asymptotiquement exhaustive (cf. LECAM[21]), on peut se restreindre aux tests ayant une "structure de Neyman asymptotique" (i.e. vérifiant ( $\Delta\Delta$ ))

□

### I.3.3 Propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance

Dans cette section on établit les propriétés de l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . On reprend les notations de la section I.3.1. On fait les hypothèses suivantes :

$$(H1) \quad \forall \theta, \theta' \in \Theta = [0, \bar{\tau}] \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \theta \neq \theta' : \|S(\theta) - S(\theta')\| > 0 ; \quad (*)$$

$$(H2) \quad \forall K \subset \Theta, \text{ compact}, \exists \alpha_K, \beta_K > 0 \text{ tels que: } \alpha_K I \leq F(\theta) \leq \beta_K I, \forall \theta \in K$$

(où  $I$  désigne la matrice unité  $(1+n) \times (1+n)$ ).

On donnera en fin de section un exemple de condition suffisante pour ces hypothèses.

L'estimateur du maximum de vraisemblance est défini par :

$$\hat{\theta}_\varepsilon \in \text{Arg max}_{\theta \in \Theta} L_\varepsilon(\theta)$$

---

(\*) on note :  $\|S(\theta)\| := \left\{ \int_0^1 |S(\theta, t)|^2 dt \right\}^{-\frac{1}{2}}$

, on peut vérifier que  $\hat{\theta}_\varepsilon$  est bien défini ( $(\varepsilon, \theta) \rightarrow L_\varepsilon(\theta)$  admet une version continue) et  $\hat{\theta}_\varepsilon = (\hat{\tau}_\varepsilon, \hat{\gamma}_\varepsilon)$  avec :

$$\hat{\tau}_\varepsilon \in \text{Arg} \max_{0 \leq \tau \leq \bar{\tau}} \left\{ \int_0^1 S_t^\tau \cdot dv_t \right\} \cdot \left\{ \int_0^1 S_t^\tau \cdot S_t^\tau dt \right\}^{-1} \left\{ \int_0^1 S_t^\tau \cdot dv_t \right\}$$

$$\hat{\gamma}_\varepsilon = \left\{ \int_0^1 S_t^{\hat{\tau}_\varepsilon} \cdot S_t^{\hat{\tau}_\varepsilon} dt \right\}^{-1} \int_0^1 S_t^{\hat{\tau}_\varepsilon} \cdot dv_t$$

$$\text{où : } \int_0^1 S_t^{\hat{\tau}_\varepsilon} \cdot dv_t := \int_0^1 S_t^\tau \cdot dv_t \Big|_{\tau=\hat{\tau}_\varepsilon}$$

En reprenant la définition de  $F(\theta)$ , on vérifie aisément avec l'hypothèse (H2) que  $\int_0^1 S_t^\tau \cdot S_t^\tau dt > 0$  (donc inversible),  $0 \leq \tau \leq \bar{\tau}$ .

On considère les conditions suivantes : pour tout compact  $K \subset \theta$ ,

$$(c1) \quad \sup_{\theta_1, \theta_2 \in K} |F(\theta_1)^{-\frac{1}{2}} F(\theta_2) F(\theta_1)^{-\frac{1}{2}}| < \infty ;$$

$$(c2) \quad \theta \rightarrow S(\theta, \cdot) \text{ continuellement différentiable dans } L^2(0, 1) ;$$

$$(c3) \quad \gamma_\varepsilon^1(K) := \sup_{\theta \in K} \sup_{\substack{|U| < \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \\ U \in D_{\varepsilon, \theta}(K)}} |U|^{-2} \left\| \{ \nabla(\theta + \varepsilon F(\theta)^{-\frac{1}{2}} U) - \nabla(\theta) \} F(\theta)^{-\frac{1}{2}} U \right\|^2 \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 ;$$

$$(c4) \quad \gamma_\varepsilon^2(K) := \inf_{\theta \in K} \inf_{\substack{|U| > \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \\ U \in D_{\varepsilon, \theta}(K)}} |F(\theta)^{\frac{1}{2}}|^{-1} \left\| S(\theta + \varepsilon F(\theta)^{-\frac{1}{2}} U) - S(\theta) \right\| > 0 ;$$

$$\text{où : } D_{\varepsilon, \theta}(K) := \{ U = (u, v) : \theta + \varepsilon F(\theta)^{-\frac{1}{2}} U \in K \} .$$

On a le théorème suivant (cf. IBRAGIMOV-HAS'MINSKII [15] th. 5.1, p. 203):

**THEOREME 3.8**

Supposons vérifiées les conditions (c1)-(c4), soit  $K$  une partie compacte quelconque de  $\Theta$ . Alors uniformément en  $\theta \in K$  :

$$(\Delta) \quad \hat{\theta}_\varepsilon \text{ est consistant : } P_\theta^{(\varepsilon)}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \hat{\theta}_\varepsilon = \theta ;$$

$$(\Delta\Delta) \quad \hat{\theta}_\varepsilon \text{ est asymptotiquement normal :}$$

$$\text{loi} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \mid P_\theta^{(\varepsilon)} \right\} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} N(0, F(\theta)^{-\frac{1}{2}}) ;$$

$$(\Delta\Delta\Delta) \quad \text{si } \xi \text{ désigne une variable } N(0, F^{-\frac{1}{2}}(\theta)),$$

on a la convergence des moments :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\theta^{(\varepsilon)} \left\{ \frac{1}{\varepsilon} (\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \right\}^p = E \xi^p, \quad \forall p \in \mathbb{N} ;$$

$$(\Delta\Delta\Delta) \quad \hat{\theta}_\varepsilon \text{ est asymptotiquement efficace dans } K : \text{ pour toute}$$

partie non vide  $T$  de  $K$ ,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \inf_{\tilde{\theta}_\varepsilon} \sup_{\theta \in T} E_\theta^{(\varepsilon)} w_\varepsilon(\tilde{\theta}_\varepsilon - \theta) - \sup_{\theta \in T} E_\theta^{(\varepsilon)} w_\varepsilon(\hat{\theta}_\varepsilon - \theta) \right) = 0$$

$$\text{où } w_\varepsilon(x) := \left| \frac{1}{\varepsilon} F(\theta_0)^{-\frac{1}{2}} x \right|^2, \quad \theta_0 \in K. \quad \square$$

Remarque : La propriété  $(\Delta\Delta\Delta)$  peut aussi s'écrire sous la forme donnée à la section I,2 (cas  $\gamma$  connue), c'est-à-dire en donnant pour tout estimateur une borne inférieure du risque quadratique, borne atteinte dans le cas de  $\hat{\theta}_\varepsilon$  (th. 2.5-2.6).

Sous les hypothèses (H1)(H2) nous allons vérifier les conditions (c1)-(c4). Dans la suite  $K$  désigne une partie compacte quelconque de  $\Theta$ .

**LEMME 3.9**

Il existe  $C_K$  tel que pour tout  $\theta^1, \theta^2 \in K$  :

$$\| \nabla(\theta^1) - \nabla(\theta^2) \|^2 \leq C_K \{ |\theta^1 - \theta^2| + |\theta^1 - \theta^2|^2 \} \quad \square$$

**Preuve :** Soit  $\theta^1 = (\tau^1, \gamma^1)$ ,  $\theta^2 = (\tau^2, \gamma^2) \in K$ ,  $\tau^1 \leq \tau^2$ ,

$$\begin{aligned} \| \nabla(\theta^1) - \nabla(\theta^2) \|^2 &= \int_0^1 | \nabla(\theta^1, t) - \nabla(\theta^2, t) |^2 dt \\ &= \int_{\tau^1}^{\tau^2} | \nabla(\theta^1, t) |^2 dt + \int_{\tau^2}^1 | \nabla(\theta^1, t) - \nabla(\theta^2, t) |^2 dt \\ &\leq c (\tau^2 - \tau^1) + c \int_{\tau^2}^1 \{ | \dot{S}_t^{\tau^1} \gamma^1 - \dot{S}_t^{\tau^2} \gamma^2 |^2 + | S_t^{\tau^1} - S_t^{\tau^2} |^2 \} dt \end{aligned}$$

Soit  $t \in [\tau^2, 1]$  :

$$\begin{aligned} | \dot{S}_t^{\tau^1} \gamma^1 - \dot{S}_t^{\tau^2} \gamma^2 |^2 &= | H \{ \Psi(\tau^1, t) \gamma^1 - \Psi(\tau^2, t) \gamma^2 \} |^2 \\ &\leq c | \Psi(\tau^1, t) - \Psi(\tau^2, t) |^2 + c | \gamma^1 - \gamma^2 |^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} | \Psi(\tau^1, t) - \Psi(\tau^2, t) |^2 &= \left| \int_{\tau^1}^{\tau^2} \{ - \Psi(s, t) (A - R_s H' H) \} ds \right|^2 \\ &\leq c (\tau^2 - \tau^1)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} | S_t^{\tau^1} - S_t^{\tau^2} |^2 &= \left| H \int_{\tau^1}^t \Psi(t, s) ds - H \int_{\tau^2}^t \Psi(t, s) ds \right|^2 \\ &\leq c \left| \int_{\tau^1}^{\tau^2} \Psi(t, s) ds \right|^2 \\ &\leq c (\tau^2 - \tau^1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi :  $\| \nabla(\theta^1) - \nabla(\theta^2) \|^2 \leq c \{ |\tau^1 - \tau^2|^2 + |\gamma^1 - \gamma^2|^2 + |\tau^1 - \tau^2| \}$

□

Sous les hypothèses (H1)(H2) on vérifie successivement les quatre conditions :

Condition c1

$$\begin{aligned} |F(\theta_1)^{-\frac{1}{2}} F(\theta_2) F(\theta_1)^{-\frac{1}{2}}| &\leq |F(\theta_2)| |F(\theta_1)^{-\frac{1}{2}}|^2 \\ &\leq |F(\theta_2)^{\frac{1}{2}}|^2 / \alpha_K \\ &\leq \beta_K / \alpha_K \end{aligned}$$

□

Condition c2 Se déduit des lemmes 3.2 et 3.9.

□

Condition c3

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon^1(K) &\leq \sup_{\theta \in K} \sup_{\substack{|U| < \varepsilon^{-\frac{1}{2}} \\ U \in D_{\varepsilon, \theta}(K)}} |U|^{-2} |F(\theta)^{-\frac{1}{2}}|^2 |U|^2 \|\nabla(\theta + \varepsilon F(\theta)^{-\frac{1}{2}} U) - \nabla(\theta)\|^2 \\ &\leq C_K^2 \alpha_K^{-1} \sup \sup | \varepsilon F(\theta)^{-\frac{1}{2}} U |^2 \\ &\quad \dots \dots \\ &\leq C_K^2 \alpha_K^{-1} \sup \sup \varepsilon \alpha_K^{-1} \\ &\quad \dots \dots \\ &= C_K^2 \alpha_K^{-1} \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

□

Condition c4

$$\begin{aligned} \gamma_\varepsilon^2(K) &\geq \beta_K^{-\frac{1}{2}} \inf_{\substack{\theta^1, \theta^2 \in K \\ |\theta^1 - \theta^2| \geq \varepsilon / \beta_K}} \|S(\theta^1) - S(\theta^2)\| \end{aligned}$$

L'application  $(\theta^1, \theta^2) \rightarrow \|S(\theta^1) - S(\theta^2)\|$  est continue sur le domaine compact  $\{(\theta^1, \theta^2) \in K \times K : |\theta^1 - \theta^2| \geq \varepsilon/\beta_K\}$ . Elle atteint donc son minimum en un point  $(\theta^1, \theta^2)$ , comme  $\theta^1 \neq \theta^2$ , d'après l'hypothèse (H1) :

$$\|S(\theta^1) - S(\theta^2)\| > 0,$$

d'où  $\gamma_\varepsilon^2(K) > 0$ .

□

Un exemple de condition suffisante pour avoir les hypothèses (H1)(H2) est le suivant :

### PROPOSITION 3.10

Supposons qu'il existe une constante  $h > 0$  telle que :

$$H'H \geq h I_{n \times n}.$$

Alors les hypothèses (H1)(H2) sont satisfaites.

□

### Preuve :

Soit  $\theta = (\tau, \gamma)$ ,  $\theta' = (\tau', \gamma')$   $\in [0, \bar{t}] \times \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  :  $\theta \neq \theta'$ ,  $\tau \leq \tau'$ .

$$\|S(\theta) - S(\theta')\|^2 = \int_0^1 |S(\theta, t) - S(\theta', t)|^2 dt$$

En reprenant la définition de  $S$  on vérifie aisément que :

$$S(\theta, t) - S(\theta', t) = H \int_0^t \Psi(t, u) \{ \Sigma(\tau, u)\gamma - \Sigma(\tau', u)\gamma' \} du$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 |S(\theta, t) - S(\theta', t)|^2 dt \\
 & \geq h \int_0^1 \left| \int_0^t \Psi(t, u) \{ \Sigma(\tau, u) \gamma - \Sigma(\tau', u) \gamma' \} du \right|^2 dt \\
 & = h \int_{\tau}^{\tau'} \left| \int_{\tau}^t \Psi(t, u) du \gamma \right|^2 dt + \\
 & \quad + h \int_{\tau'}^1 \left| \int_{\tau}^{\tau'} \Psi(t, u) du \gamma + \int_{\tau'}^t \Psi(t, u) du (\gamma - \gamma') \right|^2 dt
 \end{aligned}$$

premier cas  $\tau < \tau'$  :

$$\|S(\theta) - S(\theta')\|^2 \geq h \int_{\tau}^{\tau'} \left| \int_{\tau}^t \Psi(t, u) du \gamma \right|^2 dt$$

Si cette dernière expression est nulle alors pour  $t \in [\tau, \tau']$  :

$$\int_{\tau}^t \Psi(t, u) du \gamma = 0$$

$$\text{i.e. } \Psi(t, \tau) \int_{\tau}^t \Psi(\tau, u) du \gamma = 0$$

$$\text{i.e. } \int_{\tau}^t \Psi(\tau, u) du \gamma = 0$$

$$\text{donc } \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau}^t \Psi(\tau, u) du \gamma = \Psi(\tau, t) \gamma = 0$$

donc  $\gamma = 0$  ce qui est impossible . Ainsi  $\|S(\theta) - S(\theta')\|^2 > 0$ .

deuxième cas  $\tau = \tau'$  :

$$\|S(\theta) - S(\theta')\|^2 \geq h \int_{\tau'}^1 \left| \int_{\tau'}^t \Psi(t, u) du (\gamma - \gamma') \right|^2 dt .$$

Comme dans le premier cas, si cette dernière expression est nulle on obtient  $\gamma - \gamma' = 0$  ce qui est impossible.



En conclusion  $\theta \neq \theta' \Rightarrow \|S(\theta) - S(\theta')\| > 0$ , ce qui achève la démonstration de (H1).

Soit  $K$  une partie compacte de  $\Theta$ , il existe donc  $k > 0$  tel que :

$$K \subset [0, \bar{\tau}] \times \left\{ \gamma : \frac{1}{k} \leq |\gamma| \leq k \right\}.$$

Soit  $\theta \in K$ ,

$$\begin{aligned} F(\theta) &= \int_0^1 \left( \dot{S}_t^\tau \gamma \mid S_t^\tau \right) \cdot \left( \dot{S}_t^\tau \gamma \mid S_t^\tau \right) dt \\ &= \int_\tau^1 \left( -\Psi(\tau, t) \gamma \mid \int_\tau^t \Psi(t, u) du \right)' H' H \left( -\Psi(\tau, t) \gamma \mid \int_\tau^t \Psi(t, u) du \right) dt \\ &\geq h \int_\tau^1 \left( -\Psi(\tau, t) \gamma \mid \int_\tau^t \Psi(t, u) du \right) \cdot \left( -\Psi(\tau, t) \gamma \mid \int_\tau^t \Psi(t, u) du \right) dt \end{aligned}$$

Posons :

$$G(\tau) := \int_\tau^1 \left( -\Psi(\tau, t) \mid \int_\tau^t \Psi(t, u) du \right) \cdot \left( -\Psi(\tau, t) \mid \int_\tau^t \Psi(t, u) du \right) dt.$$

On a la relation :

$$(\Delta) \quad F(\theta) = \begin{bmatrix} \gamma & (0) \\ \hline (0) & I_{n \times n} \end{bmatrix} \cdot G(\tau) \begin{bmatrix} \gamma & (0) \\ \hline (0) & I_{n \times n} \end{bmatrix}$$

Nous allons démontrer que:  $G(\tau) > 0$ . Soit  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $X \neq 0$ :

$$X' G(\tau) X = \int_\tau^1 \left| -\Psi(t, \tau) x + \int_\tau^t \Psi(t, u) du y \right|^2 dt$$

Si cette dernière expression est nulle :

$$\forall t \in [\tau, 1] \quad \int_{\tau}^t \Psi(t, u) \, du \, y = \Psi(t, \tau) x$$

$$\text{i.e.} \quad \int_{\tau}^t \Psi(\tau, u) \, du \, y = x \quad .$$

En prenant  $t=\tau$  on obtient  $x=0$ , ainsi:

$$\forall t \in [\tau, 1] \quad \int_{\tau}^t \Psi(\tau, u) \, du \, y = 0$$

$$\text{donc} \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_{\tau}^t \Psi(\tau, u) \, du \, y = \Psi(\tau, t) y = 0 \quad .$$

Finalement  $x=y=0$  ce qui est impossible. On a donc le résultat suivant:

$$X' G(\tau) X > 0, \quad \forall X \in \mathbb{R}^{2n} \setminus \{0\}, \quad \forall \tau \in [0, 1[ \quad .$$

Comme l'application  $(X, \tau) \rightarrow X' G(\tau) X$  est continue, elle atteint son minimum sur le domaine compact  $\{ X : |X| = 1 \} \times [0, \bar{\tau}]$  en un point  $(X_0, \tau_0)$ .

$$\forall X \in \mathbb{R}^{2n}, |X| = 1, \quad \forall \tau \in [0, \bar{\tau}] : X' G(\tau) X \geq X_0' G(\tau_0) X_0 =: \alpha_0 > 0 \quad .$$

Enfin en utilisant la relation  $(\Delta)$ :  $\forall U=(u,v) \in \mathbb{R}^{1+n} \quad |U|=1$  ,

$$U' F(\theta) U \geq \alpha_0 \{ u^2 |\gamma|^2 + |v|^2 \} \geq \alpha_K$$

avec:  $\alpha_K := \alpha_0 \min\{ 1, 1/k^2 \} > 0$  .

Pour montrer que pour tout  $\theta \in K$ ,  $F(\theta) \leq \beta_K I$  , il suffit d'utiliser la bornitude de  $H_t$  ,  $\Psi(t,s)$  et  $\gamma$  .Ainsi l'hypothèse (H2) est satisfaite, ce qui achève la démonstration de la proposition 3.10.

□

## I.4 CONCLUSIONS

Plusieurs problèmes n'ont pu être abordés, nous reprenons donc ici quelques points qui nous ont semblé importants.

### a. Différentes asymptotiques possibles

Pour l'étude des méthodes de détection de ruptures, on peut dégager entre autres asymptotiques les trois suivantes:

- (A1) : " Amplitude du saut  $\rightarrow \infty$  " ;
- (A2) : " Intensité des bruits  $\rightarrow 0$  " ;
- (A3) : " Temps d'observation  $\rightarrow \infty$  " .

Pour notre problème, l'équivalence entre (A1) et (A2) a été démontrée en fin de section I.3. En revanche (A3) n'est pas équivalente aux deux autres et nous n'avons pas obtenu pour celle-ci de résultats significatifs.

L'équivalence entre ces trois asymptotiques est par exemple réalisée dans le cas où le modèle après rupture ne dépend pas de l'instant de rupture. C'est le cas pour le problème simple:

$$(A) \quad dX_t = \Sigma(\tau, t) Y dt + dW_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où  $\tau$  est l'instant de rupture et  $Y$  l'amplitude du saut. Le modèle après rupture,  $dX_t = Y dt + dW_t$ , ne dépend pas de  $\tau$ .

En effet, faisons le changement de variables :

- \*  $\tau = \sigma T$  ,  $t = u T$  ,  $0 \leq \sigma, u \leq 1$  ;
- \*  $\varepsilon := 1/\sqrt{T}$  ;
- \*  $x_t^{(\varepsilon)} := \varepsilon X_{u/\varepsilon^2}$  ,  $w_u^{(\varepsilon)} := \varepsilon W_{u/\varepsilon^2}$  .

On peut remarquer que  $\{w_u^{(\varepsilon)}; 0 \leq u \leq 1\}$  est un processus de Wiener standard et que:

$$(\Delta\Delta) \quad dx_u^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} \Sigma(\sigma, u) du + dw_u^{(\varepsilon)} , \quad 0 \leq u \leq 1 .$$

Ainsi il y a équivalence entre les études asymptotiques de  $(\Delta)$  avec  $T \rightarrow \infty$  et de  $(\Delta\Delta)$  avec  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Pour le problème que nous avons étudié, le modèle après rupture dépend - par l'intermédiaire de la signature  $S_t^\tau$  - de l'instant de rupture. Quand nous utilisons la technique de changement de temps décrite ci-dessus, la signature dépend alors de  $\varepsilon$  :  $S_t^\tau = S_t^{\varepsilon, \tau}$ . La dépendance en  $\varepsilon$  de  $S_t^{\varepsilon, \tau}$  étant complexe, nous n'avons pu étudier le comportement de celle-ci lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Jusqu'à présent, la plupart des études asymptotiques faites sur la détection de ruptures portent sur des problèmes où les trois asymptotiques (A1)-(A3) sont équivalentes. C'est par exemple le cas de J.DESHAYES et D.PICARD[8-12].

□

### b. Ruptures dans l'équation d'observation

Considérons le problème de détection de ruptures dans l'équation d'observation:

$$\begin{cases} dX_t = \{ A X_t + a \} dt + B dW_t \\ dY_t = \{ H X_t + h + \Sigma(\tau, t) \gamma \} dt + dV_t \end{cases}$$

avec  $\tau$  l'instant de rupture, et  $\gamma$  l'amplitude du saut. Comme dans la section I.1, on peut utiliser l'algorithme GLR.

L'innovation, en sortie du filtre fondé sur l'hypothèse de non-rupture admet la représentation:

$$dV_t = G(\tau, t) \gamma dt + dV_t^{(\tau, \gamma)}$$

où  $V^{(\tau, \gamma)}$  est un processus de Wiener standard sous l'hypothèse de rupture à l'instant  $\tau$ , d'amplitude  $\gamma$ . La signature  $G(\tau, t)$  se calcule aisément en suivant la démarche proposée en section I.1.

Contrairement au cas des ruptures dans l'équation d'état, la signature  $G(\tau, t)$  n'est pas  $\tau$ -différentiable (au sens de la moyenne quadratique). La construction des tests approchés déduits de la normalité asymptotique locale de la famille de lois n'est plus possible.

L'étude asymptotique est ici plus complexe que dans le cas du problème de ruptures dans l'équation d'état. On peut, par exemple, utiliser les travaux de J.DESHAYES et J.PICARD pour déterminer le niveau asymptotique du test du rapport de vraisemblance. Ceci nécessite une renormalisation plus fine (pondération des bords) que celle qui est proposée dans le présent travail.

□

c. Remarques sur la mise en œuvre des tests

Afin de simplifier les notations, jusqu'à présent nous avons travaillé sur l'intervalle  $[0,1]$ . Nous allons maintenant considérer la détection de rupture dans son évolution au cours du temps. Si nous présentons le problème de mise en œuvre des tests en temps continu, il est bien entendu qu'en réalité celle-ci se fait en temps discret.

Ayant observé  $\{Y_s; 0 \leq s \leq t\}$ , le cas idéal est de pouvoir tester:

$$(A) \quad \begin{array}{l} H_t^0 : \text{ " Pas de rupture avant } t \text{ " } ; \\ \text{contre} \\ H_t^1 : \text{ " Rupture avant } t \text{ " } . \end{array}$$

L'hypothèse  $H_t^1$  se décompose en  $\{ H_t^1(\tau) ; 0 \leq \tau \leq t \}$ , où  $H_t^1(\tau)$  est l'hypothèse de rupture à l'instant  $\tau$ .

Pour la mise en œuvre de l'algorithme GLR on utilise deux paramètres  $m, M$  ( $0 < m < M$ ), et on calcule:

$$L_t := \max\{ L_t(\tau) ; t-M \leq \tau \leq t-m \}$$

où  $L_t(\tau)$ , le rapport de vraisemblance de  $H_t^0$  contre  $H_t^1(\tau)$ , a été calculé à la section I.1.

La constante  $M$  sert à définir une "largeur de fenêtre" qui limite le nombre de calculs nécessaires, ce qui permet de réaliser une implantation sur ordinateur. En pratique, on s'aperçoit que le calcul de  $L_t(\tau)$  pour  $\tau$  proche de  $t$  est parfois impossible (par manque d'information, cf. section I.1); c'est dans le but de résoudre ce problème que la constante  $m$  est introduite.

Le test en fait utilisé

$$\Psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } L_t > c \text{ (i.e. accepter } H_t^1) \text{ ,} \\ 0 & \text{si } L_t \leq c \text{ (i.e. accepter } H_t^0) \text{ .} \end{cases}$$

(le seuil  $c$  est choisi au préalable) n'est pas celui associé à  $(\Delta)$ , mais à :

$$\begin{array}{ll} H_t^0 & : \text{ " Pas de rupture avant } t \text{ " ;} \\ (\Delta\Delta) \quad \text{contre} & \\ H_t^1(m,M) & : \text{ " Rupture entre } t-M \text{ et } t-m \text{ " .} \end{array}$$

Notre approche du problème est légèrement différente. On a proposé un test  $\Phi(t, \tau_0)$  de l'hypothèse " pas de rupture avant  $\tau_0$ " contre l'alternative " rupture avant  $\tau_0$ " ;  $\tau_0$  est un instant compris entre 0 et  $t$ . On peut par exemple choisir  $\tau_0 = t-m$  et considérer le test  $\Phi(t) := \Phi(t, t-m)$  de :

$$\begin{array}{ll} \bar{H}_t^0 & : \text{ " Pas de rupture avant } t-m \text{ " ;} \\ (\Delta\Delta\Delta) \quad \text{contre} & \\ \bar{H}_t^1 & : \text{ " Rupture avant } t-m \text{ " .} \end{array}$$

Une autre possibilité consiste à se donner une suite  $m_1 \dots m_J$  de réels ( $m = m_1 < m_2 < \dots < m_J = M$ ) et à considérer la fonction test (à valeurs dans  $\{0,1\}$ ) :

$$\Phi(t) := \max_{1 \leq j \leq J} \Phi(t, t-m_j)$$

On décide alors qu'il y a rupture lorsque  $\Phi(t) = 1$  .

□

## Chapitre II

DETECTION DE RUPTURES DANS LA DYNAMIQUE

On considère le système linéaire:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX_t = \{ A + \Sigma(\tau, t) \Gamma \} X_t dt + \varepsilon dW_t, \quad X_0 = x_0 \\ dY_t = H X_t dt + \varepsilon dV_t, \quad Y_0 = 0 \end{array} \right.$$

$0 \leq t, \tau \leq 1$ ,  $0 < \varepsilon \leq 1$ ,  $\Sigma(\tau, t) = 1$  si  $t \geq \tau$ , 0 sinon.

$X$  et  $W$  sont à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $Y$  et  $V$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Les coefficients  $A, \Gamma, B, H$  sont supposés connus ;  $A, \Gamma, B$  peuvent éventuellement dépendre de  $t$  de façon mesurable et bornée ; pour simplifier les calculs nous supposerons  $H$  constant.  $\{W\}$  et  $\{V\}$  sont des processus de Wiener standard indépendants.

$\tau$  est un paramètre inconnu qui désigne l'instant de rupture. A un instant  $t$  il s'agit de tester :

$H_0$  : Pas de rupture avant  $t$  (i.e.  $\tau \geq t$ ),  
contre  $H_1$  : Rupture avant  $t$  (i.e.  $\tau < t$ ).

( Afin d'alléger les notations nous prendrons  $t=1$  ).



Il s'agit d'un problème encore non abordé, à notre connaissance rien n'a été proposé dans la littérature sur ce sujet.

Nous menons cette étude dans le cadre de l'asymptotique: " Bruits petits " (i.e.  $\epsilon \rightarrow 0$ ). Après avoir présenté la démarche retenue, nous construisons le modèle statistique. Nous démontrons ensuite la normalité asymptotique locale du rapport de vraisemblance, nous proposons enfin un test approché dont nous démontrons l'optimalité asymptotique.

## II.1 PRESENTATION DU MODELE

Dans ce problème l'algorithme GLR ne peut plus s'appliquer; nous allons toutefois suivre la même démarche que dans le cas d'une rupture "additive". On considère le filtre de Kalman-Bucy:

$$(1.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\hat{X}_t^{(\varepsilon)} = A \hat{X}_t^{(\varepsilon)} dt + R^{(\varepsilon)}(t) H' dv_t^{(\varepsilon)} \quad , \hat{X}_0^{(\varepsilon)} = x_0 \\ dv_t^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} \{ dY_t - H \hat{X}_t^{(\varepsilon)} dt \} \quad , v_0^{(\varepsilon)} = 0 \\ \frac{d}{dt} R^{(\varepsilon)}(t) = A R^{(\varepsilon)}(t) + R^{(\varepsilon)}(t) A' + \\ \quad + \varepsilon^2 BB' - \frac{1}{\varepsilon^2} R^{(\varepsilon)}(t) H' H R^{(\varepsilon)}(t) \quad , R^{(\varepsilon)}(0) = 0 \end{array} \right.$$

$\hat{X}_t^{(\varepsilon)}$  désigne l'estimation de  $X_t$  sachant  $\{Y_s; s \leq t\}$ ,  $R^{(\varepsilon)}$  la covariance de l'erreur d'estimation et  $v_t^{(\varepsilon)}$  l'innovation du filtre. Associé au système (1) ce filtre n'est optimal que dans le cas où il n'y a pas eu de rupture (i.e.  $\tau \geq 1$ ). Notons  $A(\tau, t) := A + \Sigma(\tau, t) \Gamma$ , le filtre associé à (1) s'écrit:

$$(1.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} = A(\tau, t) \hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} dt + R^{(\varepsilon)}(\tau, t) H' dv_t^{(\varepsilon, \tau)} \\ dv_t^{(\varepsilon, \tau)} = \frac{1}{\varepsilon} \{ dY_t - H \hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} dt \} \\ \frac{d}{dt} R^{(\varepsilon)}(\tau, t) = A(\tau, t) R^{(\varepsilon)}(\tau, t) + R^{(\varepsilon)}(\tau, t) A(\tau, t)' + \\ \quad + \varepsilon^2 BB' - \frac{1}{\varepsilon^2} R^{(\varepsilon)}(\tau, t) H' H R^{(\varepsilon)}(\tau, t) \end{array} \right.$$

avec  $\hat{X}_0^{(\varepsilon, \tau)} = x_0$ ,  $v_0^{(\varepsilon, \tau)} = 0$ ,  $R^{(\varepsilon)}(\tau, 0) = 0$ .

Les matrices de covariance  $R^{(\varepsilon)}$  &  $R^{(\varepsilon, \tau)}$  peuvent s'écrire sous la forme :

$$R^{(\varepsilon)}(t) := \varepsilon^2 R(t) \quad , \quad R^{(\varepsilon)}(\tau, t) := \varepsilon^2 R(\tau, t)$$

où les matrices  $R(t)$  &  $R(\tau, t)$  ne dépendent pas de  $\varepsilon$  et sont solution des équations de Riccati:

$$(1.3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dR(t)}{dt} = A R(t) + R(t) A' + BB' - R(t) H' H R(t) \\ \frac{\partial R(\tau, t)}{\partial t} = A(\tau, t) R(\tau, t) + R(\tau, t) A(\tau, t)' + BB' - R(\tau, t) H' H R(\tau, t) \end{array} \right.$$

avec  $R(0) = R(\tau, 0) = 0$ . Avec (1.1)(1.2) on a:

$$(1.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\hat{X}_t^{(\varepsilon)} = A \hat{X}_t^{(\varepsilon)} dt + \varepsilon R(t) H' dv_t^{(\varepsilon)} \\ dv_t^{(\varepsilon)} = \frac{1}{\varepsilon} \{ dY_t - H \hat{X}_t^{(\varepsilon)} dt \} \end{array} \right.$$

$$(1.5) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} = A(\tau, t) \hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} dt + \varepsilon R(\tau, t) H' dv_t^{(\varepsilon, \tau)} \\ dv_t^{(\varepsilon, \tau)} = \frac{1}{\varepsilon} \{ dY_t - H \hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} dt \} \end{array} \right.$$

Dans (1.4) on fait le changement de variable suivant :

$$\mu_t^{(\varepsilon)} := \varepsilon v_t^{(\varepsilon)}$$

on obtient alors les équations suivantes (où  $\varepsilon$  ne figure plus) :

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\hat{X}_t^{(\varepsilon)} = A \hat{X}_t^{(\varepsilon)} dt + R(t) H' d\mu_t^{(\varepsilon)} \\ d\mu_t^{(\varepsilon)} = dY_t - H \hat{X}_t^{(\varepsilon)} dt \end{array} \right.$$

**DEFINITIONS 1.1**

1. Posons  $Q(\tau, t) := R(\tau, t) - R(t)$  ; on remarque que  $Q(\tau, t) = 0$  pour  $t \leq \tau$ . De plus  $Q(\tau, t)$  est différentiable par rapport à  $\tau$ :

$$\dot{Q}(\tau, t) := \frac{\partial}{\partial \tau} Q(\tau, t)$$

$Q(\tau, t)$  et  $\dot{Q}(\tau, t)$  sont donnés par les équations:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} Q(\tau, t) &= (A + \Gamma)Q(\tau, t) + Q(\tau, t)(A + \Gamma)' + \Gamma R(t) + R(t)\Gamma' \\ &\quad - Q(\tau, t)H'HQ(\tau, t) - Q(\tau, t)H'HR(t) - R(t)H'HQ(\tau, t) \end{aligned}$$

, pour  $t > \tau$ ,  $Q(\tau, t) = 0$  pour  $t \leq \tau$ .

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \dot{Q}(\tau, t) &= (A + \Gamma)\dot{Q}(\tau, t) + \dot{Q}(\tau, t)(A + \Gamma)' - \dot{Q}(\tau, t)H'H\{Q(\tau, t) + R(t)\} \\ &\quad - \{Q(\tau, t) + R(t)\}H'H\dot{Q}(\tau, t) \end{aligned}$$

, pour  $t > \tau$ ,  $\dot{Q}(\tau, \tau) = -\Gamma R(\tau) - R(\tau)\Gamma'$ ,  $\dot{Q}(\tau, t) = 0$  pour  $t < \tau$ .

2. On considère les résolvantes :

$$\frac{\partial}{\partial t} \Psi^{(\tau)}(t, s) = \{A(\tau, t) - H'HR(\tau, t)\} \Psi^{(\tau)}(t, s), \quad \Psi^{(\tau)}(s, s) = I_{n \times n}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, s) = A \Phi(t, s), \quad \Phi(s, s) = I_{n \times n}$$

On pose:  $\dot{\Psi}^{(\tau)}(t, s) := \frac{\partial}{\partial \tau} \Psi^{(\tau)}(t, s)$ . Pour  $t, s \geq \tau$  on a:

$$\dot{\Psi}^{(\tau)}(t, s) = - \int_s^t \dot{Q}(\tau, u) H' H du \Psi^{(\tau)}(t, s).$$

□

On suit le même raisonnement que dans le cas de ruptures "additives".  $\mu^{(\varepsilon)}$  est un processus de Wiener sous l'hypothèse  $H_0$ ; sous l'hypothèse  $H_1(\tau)$  (i.e. rupture à l'instant  $\tau$ )  $v^{(\varepsilon, \tau)}$  est un processus de Wiener standard,  $\mu^{(\varepsilon)}$  s'écrit en fonction de  $v^{(\varepsilon)}$  de la manière suivante:

$$d\mu_t^{(\varepsilon)} = d\{ \mu_t^{(\varepsilon)} - \varepsilon v_t^{(\varepsilon, \tau)} \} + \varepsilon dv_t^{(\varepsilon, \tau)}$$

Avec (1.5)(1.6) on a  $d(\mu_t^{(\varepsilon)} - \varepsilon v_t^{(\varepsilon, \tau)}) = H(\hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_t^{(\varepsilon)}) dt$ , et après calcul on trouve:

$$d(\hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_t^{(\varepsilon)}) = \{A(\tau, t) - R(\tau, t)H'H\} (\hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_t^{(\varepsilon)}) dt + \\ + \Sigma(\tau, t)\Gamma\hat{X}_t^{(\varepsilon)} dt + Q(\tau, t)H'd\mu_t^{(\varepsilon)}, \quad \hat{X}_0^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_0^{(\varepsilon)} = 0.$$

Ainsi  $d\mu_t^{(\varepsilon)} = H(\hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_t^{(\varepsilon)}) dt + \varepsilon dv_t^{(\varepsilon, \tau)}$ , en reprenant la définition des résolvantes  $\psi^{(\tau)}$ ,  $\phi$  et (1.6) on obtient:

$$(1.7) \quad \hat{X}_t^{(\varepsilon)} = \phi(t, 0) x_0 + \int_0^t \phi(t, s) R(s) H' d\mu_s^{(\varepsilon)},$$

$$(1.8) \quad H(\hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_t^{(\varepsilon)}) = H \int_0^t \psi^{(\tau)}(t, s) \{ \Sigma(\tau, s)\Gamma\hat{X}_s^{(\varepsilon)} ds + Q(\tau, s)H'd\mu_s^{(\varepsilon)} \}$$

On s'aperçoit ainsi que  $\hat{X}_t^{(\varepsilon)}$  et  $H(\hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_t^{(\varepsilon)})$  sont des fonctions de  $\{\mu_s^{(\varepsilon)}; s \leq t\}$ , et ne dépendent de  $\varepsilon$  que par l'intermédiaire de  $\mu^{(\varepsilon)}$ . On pose donc:

$$\hat{X}(t, \mu^{(\varepsilon)}) = \hat{X}_t^{(\varepsilon)}, \quad S(\tau, t, \mu^{(\varepsilon)}) := H \{ \hat{X}_t^{(\varepsilon, \tau)} - \hat{X}_t^{(\varepsilon)} \}$$

$\mu^{(\varepsilon)}$  est une semi-martingale continue telle que :

$$E_{\tau}^{(\varepsilon)} \int_0^1 |\mu_t^{(\varepsilon)}|^2 dt < \infty$$

où  $E_{\tau}^{(\varepsilon)}$  désigne l'espérance sous l'hypothèse  $H_1(\tau)$ . En utilisant la formule de Itô et le fait que  $Q(\tau, \tau) = 0$ , on a :

$$\int_0^t \phi(t, s) R(s) H' d\mu_s^{(\varepsilon)} = R(t) H' \mu_t^{(\varepsilon)} - \int_0^t K(t, s) H' \mu_s^{(\varepsilon)} ds ,$$

$$\int_{\tau}^t \psi^{(\tau)}(t, s) Q(\tau, s) H' d\mu_s^{(\varepsilon)} = Q(\tau, t) H' \mu_t^{(\varepsilon)} - \int_{\tau}^t K^{(\tau)}(t, s) H' \mu_s^{(\varepsilon)} ds$$

,  $t \geq \tau$

$$\text{où } K(t, s) := \frac{\partial}{\partial s} \{ \phi(t, s) R(s) \} , \quad K^{(\tau)}(t, s) := \frac{\partial}{\partial s} \{ \psi^{(\tau)}(t, s) Q(\tau, s) \} .$$

En utilisant ces résultats on peut introduire les définitions suivantes :

### DEFINITIONS 1.2

On définit les applications :

$$\hat{X}(\dots) : [0, 1] \times C([0, 1]; \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

$$S(\dots, \dots) : [0, 1] \times [0, 1] \times C([0, 1]; \mathbb{R}^d) \longrightarrow \mathbb{R}^n ,$$

$$\hat{X}(t, \mu) := \phi(t, 0) x_0 + R(t) H' \mu_t - \int_0^t K(t, s) H' \mu_s ds$$

$$S(\tau, t, \mu) := H Q(\tau, t) \mu_t + \\ + H \int_{\tau}^t \{ \Psi^{(\tau)}(t, s) \Gamma \hat{X}(s, \mu) - K^{(\tau)}(t, s) H' \mu_s \} ds$$

De plus, si  $(\Omega, \mathcal{B}, \{\mathcal{B}_t\}, \{\tilde{\mu}_t\})$  désigne le modèle canonique <sup>(\*)</sup>, alors pour tout  $\tau, t \in [0, 1]$ , les applications  $\mu \rightarrow \hat{X}(t, \mu), S(\tau, t, \mu)$  sont  $\mathcal{B}_t$ -mesurables.

□

On peut vérifier que  $S(\tau, t, \mu)$  est différentiable par rapport à  $\tau$ , on note :

$$\dot{S}(\tau, t, \mu) := \frac{\partial}{\partial \tau} S(\tau, t, \mu) \\ = H \dot{Q}(\tau, t) H' \mu_t + H K^{(\tau)}(t, \tau) H' \mu_\tau - H \Psi^{(\tau)}(t, \tau) \Gamma \hat{X}(\tau, \mu) + \\ + H \int_{\tau}^t \{ \dot{\Psi}^{(\tau)}(t, s) \Gamma \hat{X}(s, \mu) - \dot{K}^{(\tau)}(t, s) H' \mu_s \} ds$$

$$\text{si } t \geq \tau, \quad 0 \text{ si } t < \tau, \quad \text{avec } \dot{K}^{(\tau)}(t, s) := \frac{\partial}{\partial \tau} K^{(\tau)}(t, s).$$

Pour tout  $t, \tau \in [0, 1]$ ,  $\mu \rightarrow \dot{S}(\tau, t, \mu)$  est  $\mathcal{B}_t$ -mesurable. Des définitions de  $S$  &  $\dot{S}$  et de la bornitude des coefficients du système (1) on déduit aisément le lemme suivant:

---

(\*)  $\Omega := C([0, 1]; \mathbb{R}^d)$ ,  $\tilde{\mu}_t : \omega \in \Omega \rightarrow \omega(t) \in \mathbb{R}^d$  le processus canonique,  $\mathcal{B}_t := \sigma\{\tilde{\mu}_s; 0 \leq s \leq t\}$ ,  $\mathcal{B} := \mathcal{B}_1$ .

**LEMME 1.3**

Il existe une constante  $L$  ne dépendant que des coefficients du système (1) telle que pour tout  $\mu, \mu^1, \mu^2 \in C([0,1]; \mathbb{R}^d)$ ,  $0 \leq \tau, t \leq 1$ :

$$\begin{aligned} |S(\tau, t, \mu^1) - S(\tau, t, \mu^2)|^2 + |\dot{S}(\tau, t, \mu^1) - \dot{S}(\tau, t, \mu^2)|^2 \\ \leq L \left\{ |\mu_t^1 - \mu_t^2|^2 + \int_0^t |\mu_s^1 - \mu_s^2|^2 ds \right\} \\ |S(\tau, t, \mu)|^2 + |\dot{S}(\tau, t, \mu)|^2 \leq L \left\{ 1 + |\mu_t|^2 + \int_0^t |\mu_s|^2 ds \right\} \end{aligned}$$

□

En conclusion  $\mu^{(\varepsilon)}$  est solution de l'équation différentielle stochastique:

$$(1.9) \quad d\mu_t^{(\varepsilon)} = S(\tau, t, \mu^{(\varepsilon)}) dt + \varepsilon dv_t^{(\varepsilon, \tau)}, \quad \mu_0^{(\varepsilon)} = 0.$$

Les résultats du lemme précédent assurent l'existence et l'unicité d'une solution forte de cette équation.



## II.2 CONSTRUCTION D'UN MODELE STATISTIQUE DOMINE

On considère le modèle canonique  $(\Omega, \mathcal{B}, \{\mathcal{B}_t\}, \{\mu_t\})$  et  $P_W^{(\varepsilon)}$  la loi sur  $(\Omega, \mathcal{B})$  telle que:

$$(2.1) \quad d\mu_t = \varepsilon dW_t^{(\varepsilon)}, \quad \mu_0 = 0$$

où  $W^{(\varepsilon)}$  est un  $P_W^{(\varepsilon)}$ -processus de Wiener standard. On définit:

$$(2.2) \quad M_t := \exp \int_0^t \left\{ \frac{1}{\varepsilon} S(\tau, t, \mu) \cdot dW_t^{(\varepsilon)} - \frac{1}{2\varepsilon^2} |S(\tau, t, \mu)|^2 dt \right\}$$

### LEMME 2.1

$\{M_t\}$  est une  $\{\mathcal{B}_t, P_W^{(\varepsilon)}\}$ -martingale □

### Preuve :

Comme  $E_W^{(\varepsilon)} \int_0^1 |S(\tau, t, \mu)|^2 dt < \infty$ , il est connu que  $\{M_t\}$  est une  $\{\mathcal{B}_t, P_W^{(\varepsilon)}\}$ -sur-martingale et il s'agit d'une martingale si et seulement si  $E_W^{(\varepsilon)} M_1 = 1$ .

En remarquant que  $t \rightarrow \varepsilon^{-1} S(\tau, t, \mu)$  est un processus gaussien ( $S(\tau, t, \mu)$  est linéaire en  $\mu$ ), d'espérance et d'opérateur de covariance bornés, on montre :

$$(A) \quad \exists \alpha, c > 0 \text{ tels que : } E_W^{(\varepsilon)} \exp\{ \alpha | \varepsilon^{-1} S(\tau, t, \mu) |^2 \} \leq c$$

A partir de (A) et en utilisant des arguments classiques (cf. FRIEDMAN[14]) on montre que  $E_W^{(\varepsilon)} M_1 = 1$ .

□

$\{M_t\}$  est une  $\{\mathbb{B}_t, P_W^{(\varepsilon)}\}$ -martingale d'espérance 1, on peut alors définir une loi  $P_\tau^{(\varepsilon)}$  sur  $(\Omega, \mathbb{B})$  en posant:

$$(2.3) \quad \frac{dP_\tau^{(\varepsilon)}}{dP_W^{(\varepsilon)}} = M_1$$

D'après le théorème de Girsanov, le processus  $\{v^{(\varepsilon, \tau)}\}$  défini par:

$$v_t^{(\varepsilon, \tau)} := W_t^{(\varepsilon)} - \int_0^t \frac{1}{\varepsilon} S(\tau, s, \mu) ds$$

est un  $P_\tau^{(\varepsilon)}$ -processus de Wiener standard. Ainsi  $\mu$  admet la représentation suivante:

$$(2.4) \quad d\mu_t = S(\tau, t, \mu) dt + \varepsilon dv_t^{(\varepsilon, \tau)}, \quad \mu_0 = 0.$$

On définit de plus la fonction  $t \rightarrow m_t^{(\tau)}$ , solution de l'équation différentielle ordinaire:

$$(2.5) \quad \frac{dm_t^{(\tau)}}{dt} = S(\tau, t, m^{(\tau)}), \quad m_0^{(\tau)} = 0.$$

Les propriétés du lemme 1.3 assurent l'existence et l'unicité de la solution de cette équation.  $m^{(\tau)}$  est le processus (déterministe) limite de  $\mu$  sous  $P_\tau^{(\varepsilon)}$ , dans le sens suivant:

**LEMME 2.2**

Il existe une constante  $K$  telle que:

$$\sup_{0 \leq t, \tau \leq 1} E_{\tau}^{(\varepsilon)} |\mu_t - m_t^{(\tau)}|^2 \leq K \varepsilon^2$$

□

La preuve de ce lemme se déduit aisément du lemme de Gronwall et du lemme 1.3.

### II.3 NORMALITE ASYMPTOTIQUE LOCALE

Dans cette section on démontre la normalité asymptotique locale de la famille de lois  $\{ P_{\tau}^{(\varepsilon)} ; 0 \leq \tau \leq 1 \}$ . Nous utilisons une démarche similaire à celle de KUTOYANTS[19].

On considère la renormalisation suivante du rapport de vraisemblance:

$$Z_{\varepsilon, \tau}(u) := \frac{dP_{\tau+\varepsilon u}^{(\varepsilon)}}{dP_{\tau}^{(\varepsilon)}}, \quad u \in \{ u ; 0 \leq \tau + \varepsilon u \leq 1 \}.$$

Avec (2.2) et (2.3) on vérifie que :

$$Z_{\varepsilon, \tau}(u) = \exp \int_0^1 \left\{ \frac{1}{\varepsilon} \{ S(\tau + \varepsilon u, t, \mu) - S(\tau, t, \mu) \} \cdot d\nu_t^{(\varepsilon, \tau)} - \frac{1}{2\varepsilon^2} | S(\tau + \varepsilon u, t, \mu) - S(\tau, t, \mu) |^2 dt \right\}$$

On définit:

$$(3.1) \quad \left| \begin{array}{l} \Delta_{\varepsilon, \tau} := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)}) \cdot \{ d\mu_t - S(\tau, t, \mu) dt \} \\ F(\tau) := \int_0^1 | \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)}) |^2 dt \end{array} \right.$$

$F(\tau)$  désigne l'information de Fisher asymptotique. La famille  $\{ P_{\tau}^{(\varepsilon)} \}$  est localement asymptotiquement normale, plus précisément:

**THEOREME 3.1**

Le rapport  $Z_{\varepsilon, \tau}(u)$  admet la représentation suivante:

$$Z_{\varepsilon, \tau}(u) = \exp \left\{ u \Delta_{\varepsilon, \tau} - \frac{1}{2} u^2 F(\tau) + O_{\varepsilon, \tau}(u) \right\}$$

avec:

$$(\Delta) \quad \text{Loi} \left\{ \Delta_{\varepsilon, \tau} \mid P_{\tau}^{(\varepsilon)} \right\} = N(0, F(\tau)) \quad (\forall \varepsilon) ;$$

$(\Delta\Delta)$  Pour toute suite  $\{u_{\varepsilon}\}$  bornée :

$$P_{\tau}^{(\varepsilon)}\text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} O_{\varepsilon, \tau}(u_{\varepsilon}) = 0 . \quad \square$$

En reprenant la définition de  $\dot{S}(\tau, t, u)$  ( Définitions 1.2 ) et (2.5) on démontre sans grande difficulté le :

**LEMME 3.2**

Pour tout  $\tau \in [0, 1]$  ,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^1 | \dot{S}(\tau + \delta, t, m^{(\tau)}) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)}) |^2 dt = 0 \quad \square$$

**Preuve du théorème 3.1:**

Par définition de  $\Delta_{\varepsilon, \tau}$  et  $F(\tau)$  la démonstration de  $(\Delta)$  est triviale. Soit  $\{u_{\varepsilon}\}$  une suite bornée, on pose donc:

$$O_{\varepsilon, \tau}(u_{\varepsilon}) := \left\{ \text{Log } Z_{\varepsilon, \tau}(u_{\varepsilon}) \right\} - u_{\varepsilon} \Delta_{\varepsilon, \tau} + \frac{1}{2} u_{\varepsilon}^2 F(\tau)$$

En utilisant les lemmes 1.3 et 2.2 , on montre qu'il existe des constantes  $c_1, c_2 > 0$  telles que pour tout  $0 \leq \tau, \tau', t \leq 1$ :

$$(\Delta\Delta\Delta) \quad E_{\tau}^{(\varepsilon)} \int_0^1 |\dot{S}(\tau', t, \mu) - \dot{S}(\tau', t, m^{(\tau)})|^2 dt \leq c_1 \varepsilon^2 ;$$

$$(\Delta\Box) \quad E_{\tau}^{(\varepsilon)} \int_0^1 |\dot{S}(\tau', t, \mu)|^2 dt \leq c_2 ;$$

$$(\Box) \quad \int_0^1 |\dot{S}(\tau', t, m^{(\tau)})|^2 dt \leq c_2 .$$

$$O_{\varepsilon, \tau}(u_{\varepsilon}) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \{ S(\tau + \varepsilon u_{\varepsilon}, t, \mu) - S(\tau, t, \mu) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)}) \varepsilon u_{\varepsilon} \} \cdot dv_t^{(\varepsilon, \tau)}$$

$$- \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 |S(\tau + \varepsilon u_{\varepsilon}, t, \mu) - S(\tau, t, \mu)|^2 dt - u_{\varepsilon}^2 F(\tau) \right]$$

$$=: T_{\varepsilon}^1 - \frac{1}{2} T_{\varepsilon}^2$$

$$\text{Posons } T_{\varepsilon} := \frac{1}{\varepsilon^2} \int_0^1 |S(\tau + \varepsilon u_{\varepsilon}, t, \mu) - S(\tau, t, \mu) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)}) \varepsilon u_{\varepsilon}|^2 dt .$$

$$E_{\tau}^{(\varepsilon)} T_{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon^2} E_{\tau}^{(\varepsilon)} \int_0^1 |S(\tau + \varepsilon u_{\varepsilon}, t, \mu) - S(\tau, t, \mu) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)}) \varepsilon u_{\varepsilon}|^2 dt$$

$$= \frac{1}{\varepsilon^2} E_{\tau}^{(\varepsilon)} \int_0^1 \left| \int_0^{\varepsilon u_{\varepsilon}} \{ \dot{S}(\tau + \delta, t, \mu) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)}) \} d\delta \right|^2 dt$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon} |u_{\varepsilon}| \int_0^{\alpha_{\varepsilon}} E_{\tau}^{(\varepsilon)} \int_0^1 |\dot{S}(\tau + \delta, t, \mu) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)})|^2 dt d\delta$$

( où  $\alpha_{\varepsilon} := \varepsilon |u_{\varepsilon}| \rightarrow 0$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  )

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{2}{\varepsilon} |u_\varepsilon| \int_0^{\alpha_\varepsilon} E_\tau^{(\varepsilon)} \int_0^1 |\dot{S}(\tau+\delta, t, \mu) - \dot{S}(\tau+\delta, t, m^{(\tau)})|^2 dt d\delta \\
&\quad + \frac{2}{\varepsilon} |u_\varepsilon| \int_0^{\alpha_\varepsilon} \int_0^1 |\dot{S}(\tau+\delta, t, m^{(\tau)}) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)})|^2 dt d\delta \\
&\leq 2 c_1 |u_\varepsilon|^2 \varepsilon^2 + \\
&\quad + 2 |u_\varepsilon|^2 \max_{|\delta| \leq \alpha_\varepsilon} \int_0^1 |\dot{S}(\tau+\delta, t, m^{(\tau)}) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)})|^2 dt
\end{aligned}$$

d'où il découle, d'après le lemme 3.2:

$$(\square\Delta) \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} E_\tau^{(\varepsilon)} T_\varepsilon = 0.$$

Par ailleurs:

$$\begin{aligned}
&E_\tau^{(\varepsilon)} |T_\varepsilon|^2 = \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} E_\tau^{(\varepsilon)} \left| \int_0^1 \left\{ |S(\tau+\varepsilon u_\varepsilon, t, \mu) - S(\tau, t, \mu)|^2 - |\dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)})_{\varepsilon u_\varepsilon}|^2 \right\} dt \right| \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2} E_\tau^{(\varepsilon)} \left| \int_0^1 \left\{ S(\tau+\varepsilon u_\varepsilon, t, \mu) - S(\tau, t, \mu) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)})_{\varepsilon u_\varepsilon} \right\} \right. \\
&\quad \left. \left\{ S(\tau+\varepsilon u_\varepsilon, t, \mu) - S(\tau, t, \mu) + \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)})_{\varepsilon u_\varepsilon} \right\} dt \right| \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \left| E_\tau^{(\varepsilon)} \int_0^1 |S(\tau+\varepsilon u_\varepsilon, t, \mu) - S(\tau, t, \mu) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)})_{\varepsilon u_\varepsilon}|^2 dt \right|^{\frac{1}{2}} \times \\
&\quad \left| E_\tau^{(\varepsilon)} \int_0^1 |S(\tau+\varepsilon u_\varepsilon, t, \mu) - S(\tau, t, \mu) + \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)})_{\varepsilon u_\varepsilon}|^2 dt \right|^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\varepsilon} E_{\tau}^{(\varepsilon)} T_{\varepsilon} \left| E_{\tau}^{(\varepsilon)} \int_0^1 \int_0^{\varepsilon u} \{ \dot{S}(\tau+\delta, t, \mu) + \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)}) \} d\delta \right|^2 dt \Big|^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} E_{\tau}^{(\varepsilon)} T_{\varepsilon} \times \left| \varepsilon |u_{\varepsilon}| \int_0^{\alpha_{\varepsilon}} E_{\tau}^{(\varepsilon)} \int_0^1 | \dot{S}(\tau+\delta, t, \mu) - \dot{S}(\tau, t, m^{(\tau)}) |^2 dt d\delta \right|^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{\varepsilon} E_{\tau}^{(\varepsilon)} T_{\varepsilon} |u_{\varepsilon}| \{ 2 c_2 \}^{1/2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \quad \text{d'après } (\square\Delta).
\end{aligned}$$

En particulier:

$$(\square\Delta\Delta) \quad P_{\tau}^{(\varepsilon)} \text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\varepsilon}^2 = 0 \quad .$$

Enfin,  $E_{\tau}^{(\varepsilon)} \{ |T_{\varepsilon}^1|^2 \} = E_{\tau}^{(\varepsilon)} T_{\varepsilon} \rightarrow 0$  car  $(\square\Delta)$ , or d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebycheff:

$$\forall \alpha > 0, \quad P_{\tau}^{(\varepsilon)} \{ |T_{\varepsilon}^1| > \alpha \} \leq \frac{1}{\alpha^2} E_{\tau}^{(\varepsilon)} \{ |T_{\varepsilon}^1|^2 \} .$$

Ainsi  $P_{\tau}^{(\varepsilon)} \text{-}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} T_{\varepsilon}^1 = 0$ , ce qui avec  $(\square\Delta\Delta)$  achève la démonstration du théorème 3.1.

□



#### II.4 TEST D'EXISTENCE DE RUPTURES

Nous considérons  $\bar{\tau} \in [0,1]$  tel que:

$$(4.1) \quad F(\bar{\tau}) > 0 .$$

La détermination de conditions suffisantes assurant cette dernière propriété est un problème encore non résolu. Dans cette section nous allons considérer le problème de test d'hypothèses:

$H_0$  : Pas de rupture avant  $\bar{\tau}$  ( i.e.  $\tau \geq \bar{\tau}$  ) ;

contre

$H_1$  : Rupture avant  $\bar{\tau}$  ( i.e.  $\tau < \bar{\tau}$  ) .

On définit le test suivant:

$$(4.2) \quad \phi_{\epsilon}^* := \begin{cases} 1 & \text{si } F(\bar{\tau})^{-\frac{1}{2}} \Delta_{\epsilon, \bar{\tau}} \leq C_{\alpha} \quad (\text{i.e. accepter } H_1) \\ 0 & \text{si } F(\bar{\tau})^{-\frac{1}{2}} \Delta_{\epsilon, \bar{\tau}} > C_{\alpha} \quad (\text{i.e. accepter } H_0) \end{cases}$$

où  $C_{\alpha}$  désigne le  $(1-\alpha)$  quantile de la loi de Gauss  $N(0,1)$ . En reprenant les notations de la section I.2.2 , on a le résultat suivant:

#### THEOREME 4.1

Le test  $\{\phi_{\epsilon}^*\}$  est asymptotiquement localement le plus puissant au niveau  $\alpha$ .

□

La démonstration de ce théorème est exactement celle de la section I.2.2 (théorème 2.3 et lemme 2.4): Elle utilise seulement la représentation du théorème 3.1.

Remarque :

Le cas  $\Gamma$  inconnu peut se traiter de la même manière qu'à la section I.3. Posons  $\theta = (\tau, \Gamma)$ , les systèmes (2.4) et (2.5) s'écrivent :

$$\left| \begin{array}{l} d\mu_t = S(\theta, t, \mu) dt + \varepsilon dv_t^{(\varepsilon, \theta)} \quad , \mu_0 = 0 ; \\ dm_t^{(\theta)} = S(\theta, t, m^{(\theta)}) dt \quad , m_0^{(\theta)} = 0 . \end{array} \right.$$

où l'application  $(t, \mu) \rightarrow S(\theta, t, \mu)$  est définie par:

$$S(\theta, t, \mu) := H Q(\tau, t) \mu_t + H \int_{\tau}^t \{ \Psi^{(\tau)}(t, s) \Gamma \hat{X}(s, \mu) - K^{(\tau)}(t, s) H' \mu_s \} ds$$

$$\hat{X}(t, \mu) := \phi(t, 0) x_0 + R(t) H' \mu_t - \int_0^t K(t, s) H' \mu_s ds$$

Soit  $\nabla(\theta, t, \mu)$  la différentielle de  $S(\theta, t, \mu)$  par rapport à  $\theta$ . On définit:

$$\left| \begin{array}{l} \Delta_{\varepsilon, \theta} := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^1 \nabla(\theta, t, m^{(\theta)}) \cdot \{ d\mu_t - S(\theta, t, m^{(\theta)}) dt \} \\ F(\theta) := \int_0^1 \nabla(\theta, t, m^{(\theta)}) \cdot \nabla(\theta, t, m^{(\theta)}) dt \end{array} \right.$$

On peut alors reprendre la démarche de la section I.3 pour construire un test  $\phi^*$  asymptotiquement localement sans biais de puissance maximum.

□

## II.5 CONCLUSIONS

Comme nous l'avons déjà remarqué, la détection de ruptures dans un système partiellement observé nécessite a priori une infinité de filtres (autant que d'hypothèses de ruptures possibles). Dans le cas des ruptures sur  $a$ , l'algorithme de A.S. WILLSKY et H.L. JONES permet de se ramener à un seul filtre et à un terme déterministe précalculable. Naturellement, pour la détection de ruptures sur  $A$ , nous n'obtenons pas d'algorithme aussi simple pour calculer le rapport de vraisemblance généralisé. Toutefois pour l'élaboration du test que nous avons proposé il est seulement nécessaire d'utiliser:

- (Δ) Un filtre de Kalman-Bucy fondé sur l'hypothèse de non-rupture .
- (ΔΔ) Un terme précalculable :  $\{ \dot{S}(\tau_0, t, m^{(\tau_0)}) ; 0 \leq t \leq 1 \}$  .
- (ΔΔΔ) Un terme non précalculable :  $\{ S(\tau_0, t, \mu) ; 0 \leq t \leq 1 \}$  , où  $\mu$  est une sortie du filtre (Δ) .

Par ailleurs nous n'avons pas étudié les propriétés des estimateurs du maximum de vraisemblance de la rupture. Celles-ci peuvent être établies en utilisant les résultats de Yu.A. KUTOYANTS[20].

□

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. BASSEVILLE, Exemples d'utilisation de l'algorithme GLR. Séminaire " Détection de ruptures dans les modèles dynamiques de signaux et systèmes " , CNRS (RCP567) ,Paris (1984).
- [2] M.BASSEVILLE, Contribution à la détection séquentielle de ruptures de modèles statistiques. Thèse d'Etat Univ. Rennes (1982).
- [3] M. BASSEVILLE et A. BENVENISTE, An example of failure detection: design and comparative study of some algorithms. Rapport INRIA n°73 (1981).
- [4] A.BENVENISTE et M.BASSEVILLE, Detection of abrupt changes in signals and dynamical systems: some statistical aspects. **Conférence INRIA**, Nice, (1984).
- [5] BREIMAN, **Probability**. Addison-Wesley (1968).
- [6] R. BUENO, E.Y. CHOW, K.P. DUNN, S.B. GERSHWIN, A.S. WILLSKY, Status report on the generalized likelihood ratio failure detection technique with application to the F8-aircraft. in **Proc. IEEE Conf. on Dec. and Cont.** (1976).
- [7] D.M. CHIBISOV, A theorem on admissible tests and its application to an asymptotic problem of testing hypotheses. **Th. Proba. Appl.** 12, (1967), 90-103.
- [8] J.DESHAYES et D.PICARD, Rupture de modèles en statistique. Thèses d'Etat Orsay (1983).
- [9] J.DESHAYES et D.PICARD, Test de rupture de régression: comparaison asymptotique. **Teoryia Ver. Prim.** (1982), 95-108.
- [10] J.DESHAYES et D.PICARD, Principe d'invariance sur les processus de vraisemblance. **Ann. Inst. H. Poincaré** (1984).

- [11] J.DESHAYES et D.PICARD, Méthodes globales de test et d'estimation de ruptures: point de vue asymptotiques, Séminaire " Détection de ruptures dans les modèles dynamiques de signaux et systèmes " , CNRS (RCP567) ,Paris (1984).
- [12] J.DESHAYES et D.PICARD, Comment utiliser les statistiques de vraisemblance dans des séries chronologiques, Séminaire " Détection de ruptures dans les modèles dynamiques de signaux et systèmes " , CNRS (RCP567) ,Paris (1984).
- [13] P. FAURE, M. CLERGET, F. GERMAIN, **Opérateurs Rationnels Positifs, Application à l'Hyperstabilité et aux Processus Aléatoires.** Dunod (1979).
- [14] A. FRIEDMAN, **Stochastic Differential Equations and Applications**, vol.I & vol.II. Academic Press (1975).
- [15] I.A. IBRAGIMOV et R.Z. HAS'MINSKII, **Statistical Estimation Asymptotic Theory.** Springer Verlag (1981).
- [16] K. KLIGENE et L. TEL'KSNIS, Methods of detecting instants of change of random process properties. **Automation and Remote Control** (1984), traduit de **Automatika i Telemekhanika** 10, (1983), 5-56.
- [17] Yu.A. KUTOYANTS, On a problem of testing hypotheses and asymptotic normality of stochastic integral. **Th. Prob. Appl.** 20 , (1975), 376-384.
- [18] Yu.A. KUTOYANTS, Estimation of a trend parameter of a diffusion process in the smooth case. **Th. Prob. Appl.** 22, (1977), 399-405.
- [19] Yu.A. KUTOYANTS, Estimation of a parameter of a diffusion process. **Th. Prob. Appl.** 23, (1978), 641-649.
- [20] Yu.A. KUTOYANTS, **Estimation de paramètres de processus stochastiques** , Editions de l'Académie des Sciences de l'Arménie Soviétique, Erivan, (1980) (en russe, édition en anglais à paraître chez Feldermann Verlag).
- [21] L. LECAM, **Théorie Asymptotique de la Décision Statistique** , Université de Montréal (1969).

- [22] E.L. LEHMANN, **Testing Statistical Hypotheses**. Wiley, (1959).
- [23] G.G ROUSSAS, **Contiguity of Probability Measures**. Cambridge University Press (1972).
- [24] A.S. WILLSKY, A survey of design method for failure detection in dynamic systems. **Automatica** 12, (1976), 601-611.
- [25] A.S. WILLSKY, Detection of abrupt changes in dynamic systems Séminaire " Détection de ruptures dans les modèles dynamiques de signaux et systèmes " , CNRS (RCP567) ,Paris (1984).
- [26] A.S. WILLSKY, E.Y. CHOW, S.B. GERSHWIN, G.S. GREENE, P.K. HOUP, A.L. KURJIAN, Dynamic model-based techniques for the detection of incidents on freeways. **IEEE trans. on A.C.** vol AC-25 3, (1980), 347-360.
- [27] A.S. WILLSKY, P.C. DOERCHUK, R.R. TENNEY, Estimation-based approach to rhythm analysis in electrocardiograms. Séminaire " Détection de ruptures dans les modèles dynamiques de signaux et systèmes " , CNRS (RCP567), Paris (1984).
- [28] A.S. WILLSKY et H.L. JONES, A generalized likelihood ratio approach to state estimation in linear systems subject to abrupt changes. in **Proc. IEEE Conf on Dec and Cont.** (1974).
- [29] A.S. WILLSKY et H.L. JONES, A generalized likelihood ratio approach to the detection and estimation of jumps in linear systems. **IEEE Trans on A.C.** Vol. AC-21 1, (1976), 108-112.





Deuxième Partie

**LA METHODE D'APPROXIMATION DE GAUSS-GALERKIN**

**EN FILTRAGE NON LINEAIRE**



## TABLE DES MATIERES

### INTRODUCTION

### NOTATIONS

<b>Chapitre I. <u>FORMULES DE QUADRATURE DE GAUSS-CHRISTOFFEL</u></b> .....	01
1.1 Présentation de la Méthode .....	01
1.2 L'Algorithme de Chebyshev Modifié .....	03
<b>Chapitre II. <u>RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK</u></b> .....	08
2.1 La Méthode d'Approximation de Gauss-Galerkin .....	08
2.2 Convergence de l'Approximation .....	10
<b>Chapitre III. <u>LA RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE ZAKAI</u></b> .....	20
3.1 Filtrage avec Observation en Temps discret .....	22
3.2 Filtrage avec Observation en Temps continu .....	25
<b>Chapitre IV. <u>ETUDE NUMERIQUE</u></b> .....	33
4.1 Approximation de l'Equation de Fokker-Planck .....	34
4.2 Approximation de l'Equation de Zakaf .....	40

### CONCLUSION

### BIBLIOGRAPHIE



## INTRODUCTION

Les méthodes habituelles de résolution numérique des équations aux dérivées partielles font généralement appel à un nombre important de points de discrétisation en espace. De plus, sous leur forme classique ces méthodes utilisent des grilles de discrétisation fixes dans le temps.

La méthode proposée par D.A. DAWSON [4], appelée méthode de Gauss-Galerkin, combine les méthodes de quadrature de Gauss et d'approximation de Galerkin. Cette méthode comporte le double avantage d'avoir un nombre peu important d'inconnues à calculer et une grille de discrétisation capable de s'adapter aux évolutions de la solution de l'équation aux dérivées partielles considérée. On se limite néanmoins au cas d'un espace à une seule dimension.

D.A. Dawson a appliqué cette méthode à l'équation de Fokker-Planck, équation aux dérivées partielles déterministe satisfaite par la densité de probabilité d'un processus de diffusion. Nous allons étudier le comportement de cette méthode, appliquée à une équation aux dérivées partielles stochastique, l'équation de Zakai du filtrage non linéaire satisfaite par la densité conditionnelle non normalisée d'un processus de diffusion.

Le chapitre I constitue un rappel concernant les méthodes de quadrature de Gauss; nous reprenons pour cela les résultats présentés par W. GAUTSCHI dans [6,7].

Dans le chapitre II, après avoir introduit l'équation de Fokker-Planck, nous présentons la méthode d'approximation de Gauss-Galerkin. Ensuite nous établissons un résultat de convergence sous des hypothèses de bornitude des coefficients. Les résultats de ce chapitre sont une reprise et un développement des travaux de D.A. DAWSON [4].

Dans le chapitre III, après avoir présenté l'équation de Zakai, nous nous intéressons aux cas suivants:

- \* Observation en temps discret : Nous présentons la méthode de Gauss-Galerkin pour ce problème et nous démontrons la convergence de l'approximation .
  
- \* Observation en temps continu : dans ce cas, avant d'introduire l'approximation, nous discrétisons l'équation d'observation pour nous ramener au cas précédent.

Les essais numériques sont présentés dans le chapitre IV.

□

## NOTATIONS

Δ Etant donnée  $f$  une fonction réelle et  $\mu$  une mesure non négative, on notera indifféremment :

$$\int f(x) \mu(dx) = \int f d\mu = \langle \mu, f \rangle .$$

Δ  $\delta(x)$  désigne la mesure de Dirac au point  $x$ .

Δ Les polynômes :  $x \rightarrow x^i$  seront notés  $x^i$ ,  $x \rightarrow 1$  sera noté  $1$ .

Δ  $\Pi_N$  désigne l'espace des polynômes de degré au plus égal à  $N$ .

□





## Chapitre I

### FORMULES DE QUADRATURE DE GAUSS-CHRISTOFFEL

La méthode d'approximation de Gauss-Galerkin s'inspire des méthodes de quadrature de Gauss. Dans cette section, nous nous intéressons à l'approximation de mesures non négatives sur  $\mathbb{R}$ . Nous présenterons ensuite un algorithme de réalisation de ces formules de quadrature offrant de bonnes qualités numériques.

Les résultats de cette section sont extraits de GAUTSCHI [6,7]. En particulier, l'étude du conditionnement numérique de l'algorithme présenté dans la section 1.2. se trouve développée dans GAUTSCHI [7].

#### 1.1 Présentation de la Méthode

Soit  $\mu$  une mesure non négative sur  $\mathbb{R}$ . Etant donné un entier positif  $N$ , la méthode de Gauss-Galerkin consiste à approcher  $\mu$  par une mesure  $\mu^N$  de la forme :

$$(1.1) \quad \mu^N = \sum_{i=1}^N a_i^N \delta(x_i^N)$$

Les quantités  $a_i^N$ ,  $x_i^N$  ( $i=1\dots N$ ) sont choisies de telle manière que  $\mu$  &  $\mu^N$  admettent les mêmes premiers moments. Afin d'alléger les notations, dans la suite les coefficients  $a_i^N x_i^N$  seront notés  $a_i x_i$ .

On fait les hypothèses suivantes :

(1.2)  $\xi \rightarrow \mu(x; x \leq \xi)$  est croissante en au moins  $N$  points deux à deux distincts ;

(1.3)  $\int |x|^j d\mu < \infty$  ,  $j = 0, 1, \dots, 2N-1$

On se donne les  $2N$  premiers moments de la mesure  $\mu$  :

$$m_j = \int x^j d\mu \quad , \quad j=0 \dots 2N-1 .$$

Dans (1.1) les réels  $a_i, x_i$  ( $i = 1 \dots N$ ) sont choisis de telle sorte que :

(1.4)  $\int x^j d\mu^N = m_j$  ,  $j=0 \dots 2N-1$  ,

c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^N a_i (x_i)^j = m_j \quad , \quad j=0 \dots 2N-1 .$$

$\mu^N$  est appelée l'approximation de Gauss-Christoffel à  $N$  points de la mesure  $\mu$ ,  $\{x_i\}$  et  $\{a_i\}$  respectivement, les points et les poids de Gauss-Christoffel.

Il est bien connu que ce problème admet une solution unique, c'est-à-dire qu'il existe un unique ensemble de coefficients  $\{(a_i, x_i); i=1 \dots N\}$  tel que la mesure définie par (1.1) vérifie (1.4) (cf. STROUD [13]).



$J_N$  admet  $N$  valeurs propres réelles deux à deux distinctes  $\xi_1 \dots \xi_N$ , soit  $V_1 \dots V_N$  les vecteurs propres orthonormés respectivement associés. On a le résultat suivant :

$$\begin{aligned} a_i &= p_0 (V_{1i})^2, \\ x_i &= \xi_i, \quad i=1 \dots N \end{aligned}$$

où  $V_{1i}$  désigne la première coordonnée du vecteur  $V_i$  et  $p_0 = \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)$ .

□

Ainsi l'approximation  $\mu^N$  se calcule aisément à partir des coefficients  $\{\alpha_j, \beta_j ; j=0 \dots N-1\}$ . L'algorithme de Chebyshev modifié va nous permettre de calculer ces coefficients à partir des  $2N$  premiers moments de  $\mu$ .

Du point de vue numérique il est préférable de considérer les moments modifiés de  $\mu$ . Pour cela, on se donne une famille de polynômes  $\{\tilde{\pi}_j ; j=0 \dots 2N-1\}$  qui satisfait la relation :

$$(1.6) \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{\pi}_{j+1}(x) &= (x - \tilde{\alpha}_j) \tilde{\pi}_j(x) - \tilde{\beta}_j \tilde{\pi}_{j-1}(x), \quad j=0 \dots 2N-2 \\ \tilde{\pi}_0(x) &= 1 \\ \tilde{\pi}_{-1}(x) &= 0 \\ \tilde{\beta}_j &> 0 \end{aligned} \right.$$

où les coefficients  $\{\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j ; j=0 \dots 2N-2\}$  sont connus. On définit les moments modifiés de  $\mu$  relativement à la famille des polynômes  $\{\tilde{\pi}_j\}$  par :

$$\tilde{\beta}_j = \int \tilde{\pi}_j \, d\mu, \quad j=0 \dots 2N-1$$

Posons :

$${}^0_{k,l} = \int \pi_k \tilde{\pi}_l \, d\mu$$

L'algorithme suivant permet de calculer  $\{\alpha_j, \beta_j; j=0 \dots N-1\}$  à partir des coefficients  $\{\tilde{\alpha}_j, \tilde{\beta}_j; j=0 \dots 2N-2\}$  et des moments modifiés  $\{\bar{\beta}_j; j=0 \dots 2N-1\}$  :

initialisation :

$$\begin{cases} \sigma_{-1,0} \leftarrow 0 \\ \sigma_{0,1} \leftarrow \bar{\beta}_1, \quad l=0 \dots 2N-1 \\ \alpha_0 \leftarrow \tilde{\alpha}_0 + \bar{\beta}_1 / \bar{\beta}_0 \\ \beta_0 \leftarrow 0 \end{cases}$$

incrémentations :

pour  $k = 1 \dots N-1$  faire :

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sigma_{k,1} \leftarrow & \sigma_{k-1,1+1} - (\alpha_{k-1} - \tilde{\alpha}_1) \sigma_{k-1,1} \\ & - \beta_{k-1} \sigma_{k-2,1} + \tilde{\beta}_1 \sigma_{k-1,1-1} \\ & l=k \dots 2N-k+1 \end{aligned}$$

$$(1.7)' \quad \alpha_k \leftarrow \tilde{\alpha}_k + \frac{\sigma_{k-1,1}}{\sigma_{k-1,1-1}} + \frac{\sigma_{k,k+1}}{\sigma_{k,k}}$$

$$(1.7)'' \quad \beta_k \leftarrow \frac{\sigma_{k,k}}{\sigma_{k-1,k-1}}$$

Démonstration de l'algorithme (cf. WHEELER[14])

Désignons par  $\Pi_n$  l'espace des polynômes de degré au plus  $n$ .  $\{\pi_k\}$  est une famille de polynômes orthogonaux relativement à la mesure  $\mu$ , donc  $\int \pi_k \phi \, d\mu = 0$ ,  $\forall \phi \in \Pi_{k-1}$ . On en déduit que :  $\sigma_{k,1} = 0$  si  $k > 1$ , et que :

$$\begin{aligned} \int \pi_k^2 \, d\mu &= \int \pi_k x^k \, d\mu \\ &= \int \pi_k x \tilde{\pi}_{k-1} \, d\mu \\ &= \int \pi_k \tilde{\pi}_k \, d\mu = \sigma_{k,k} \end{aligned}$$

En utilisant (1.5) et la relation  $\sigma_{k+1,k-1} = 0$ , on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int \pi_{k+1} \tilde{\pi}_{k-1} \, d\mu \\ &= \int \pi_k x \tilde{\pi}_{k-1} \, d\mu - \alpha_k \int \pi_k \tilde{\pi}_{k-1} \, d\mu - \beta_k \int \pi_{k-1} \tilde{\pi}_{k-1} \, d\mu \\ &= \sigma_{k,k} - \beta_k \sigma_{k-1,k-1} \end{aligned}$$

D'où (1.7)". De même  $\sigma_{k+1,k} = 0$  conduit à la relation :

$$(1.8) \quad \int \pi_k x \tilde{\pi}_k \, d\mu - \alpha_k \int \pi_k \tilde{\pi}_k \, d\mu - \beta_k \int \pi_{k-1} \tilde{\pi}_k \, d\mu = 0$$

Par ailleurs, avec (1.6) on obtient :

$$\begin{aligned} \int \pi_k x \tilde{\pi}_k \, d\mu &= \\ &= \int \pi_k \tilde{\pi}_{k+1} \, d\mu + \tilde{\alpha}_k \int \pi_k \tilde{\pi}_k \, d\mu + \tilde{\beta}_k \int \pi_k \tilde{\pi}_{k-1} \, d\mu \\ &= \sigma_{k,k+1} + \tilde{\alpha}_k \sigma_{k,k} \end{aligned}$$

Avec (1.8) on en déduit :

$$\sigma_{k,k+1} + (\tilde{\alpha}_k - \alpha_k) \sigma_{k,k} - \beta_k \sigma_{k-1,k} = 0$$

qui avec (1.7)'' impliquent (1.7)'. Il reste donc à vérifier (1.7) :

$$\sigma_{k,1} = \int \pi_{k-1} \times \bar{\pi}_1 \, d\mu - \alpha_{k-1} \sigma_{k-1,1} - \beta_{k-1} \sigma_{k-2,1} \quad (\text{car (1.5)})$$

$$\int \pi_{k-1} \times \bar{\pi}_1 \, d\mu = \sigma_{k-1,1+1} + \tilde{\alpha}_1 \sigma_{k-1,1} + \tilde{\beta}_1 \sigma_{k-1,1-1} \quad (\text{car (1.6)})$$

donc :

$$\sigma_{k,1} = \sigma_{k-1,1-1} - (\alpha_{k-1} - \tilde{\alpha}_1) \sigma_{k-1,1} - \beta_{k-1} \sigma_{k-2,1} + \tilde{\beta}_1 \sigma_{k-1,1-1}$$

□

## Chapitre II

### RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK

#### 2.1 La Méthode d'Approximation de Gauss-Galerkin

Introduisons tout d'abord l'équation de Fokker-Planck. Considérons l'équation différentielle stochastique :

$$(2.1.) \quad dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad t > 0, \quad X_0 \text{ de loi } \mu_0,$$

où  $\{X_t\}$  prend ses valeurs dans  $\mathbb{R}$ ;  $\{W_t\}$  est un processus de Wiener standard réel indépendant de  $X_0$ . Posons  $a = \sigma^2$ ,  $a' = da/dx$  et  $b' = db/dx$  on fait les hypothèses suivantes :

- (H1)  $b, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , sont des applications mesurables et bornées.
- (H2)  $a' \in L^\infty(\mathbb{R})$  et il existe  $\alpha > 0$  tel que  $a(x) \geq \alpha \quad \forall x$ .
- (H3)  $b'$  est mesurable bornée, et  $a'$  est continue.

Sous les hypothèses (H1),(H2), l'équation (2.1) admet une solution unique au sens faible ( cf. STROOCK-VARADHAN[12] ). L'hypothèse (H3) sera utilisée par la suite pour démontrer la convergence de l'approximation de Gauss-Galerkin.



$\{X_t\}$  est un processus de Markov, son générateur infinitésimal  $L$  est défini par :

$$L\phi(x) = b(x) \phi'(x) + \frac{1}{2} a(x) \phi''(x)$$

Soit  $\mu_t$  la loi de  $X_t$  sur  $\mathbb{R}$  ( $\forall t$ ). Il résulte de la formule de Itô que  $\{\mu_t\}$  est solution de l'équation de Fokker-Planck (écrite sous forme faible) suivante :

$$(2.2) \quad \langle \mu_t, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \mu_s, L\phi \rangle ds, \quad t \geq 0, \quad \forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}) .$$

La méthode d'approximation de Gauss-Galerkin va nous permettre de résoudre numériquement l'équation de Fokker-Planck (2.2). Elle s'inspire de la méthode de quadrature de Gauss-Christoffel, présentée au chapitre I.

On approche  $\{\mu_t\}$  par une famille de mesures de probabilité  $\{\mu_t^N\}$  de la forme :

$$\mu_t^N = \sum_{i=1}^N a_t^i \delta(x_t^i), \quad t \geq 0 .$$

Les fonctions  $a_t^i$ ,  $x_t^i$  (qui dépendent de  $N$ ) sont déterminées en posant :

$$(2.3) \quad \langle \mu_t^N, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \mu_s^N, L\phi \rangle ds, \quad \forall \phi \in \Pi_{2N-1} .$$

On remarque que  $\mu_0^N$  vérifie  $\langle \mu_0^N, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle \quad \forall \phi \in \Pi_{2N-1}$ , ainsi  $\mu_0^N$  est l'approximation de Gauss-Christoffel à  $N$ -points de la mesure  $\mu_0$ .

## 2.2 Convergence de l'Approximation

Sous des hypothèses supplémentaires, nous allons établir un résultat de convergence de l'approximation. On pose :

$$m_n(t) = \langle \mu_t, x^n \rangle, \quad \dot{m}_n(t) = \frac{d}{dt} m_n(t),$$

$$m_n^N(t) = \langle \mu_t^N, x^n \rangle, \quad \dot{m}_n^N(t) = \frac{d}{dt} m_n^N(t).$$

On fait l'hypothèse supplémentaire :

$$(H4) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ m_{2n}(0) / (2n)! \right\}^{\frac{1}{2n}} < \infty.$$

remarques: De l'hypothèse (H4) découlent les deux propriétés suivantes,

1.  $X_t$  admet des moments de tous ordres,  $\forall t \in [0, T]$ .
2. la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\theta^n}{n!} m_n(0)$  admet un rayon de convergence strictement positif. L'intérêt de ce résultat réside dans le lemme suivant :

### LEMME 2.1 (cf. BILLINGSLEY[2])

Soit  $\mu$  une mesure non négative sur  $\mathbb{R}$  possédant des moments de tous ordres  $m_n = \int x^n \mu(dx)$ . Supposons que la série :

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\theta^n}{n!} m_n$$

admette un rayon de convergence strictement positif, alors si  $\nu$  désigne une autre mesure non négative sur  $\mathbb{R}$  :  $m_n = \int x^n \nu(dx)$  ( $\forall n$ ) implique  $\mu = \nu$ . Dans ce cas, on dit que le problème des moments pour  $\mu$  est bien posé.

□

**THEOREME 2.2**

Sous les hypothèses (H1)-(H4), l'approximation de Gauss-Galerkin est convergente :

$$\mu_t^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \mu_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad \square$$

**LEMME 2.3**

Il existe des réels  $K_n$ ,  $K'_n$  ne dépendant pas de  $N$  tels que :

(i) La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\theta^n}{n!} K_n$  admet un rayon de convergence strictement positif ;

(ii)  $|m_n^N(t)| \leq K_n \quad \forall n, N, 2N \geq n+1, 0 \leq t \leq T$  ;

(iii)  $|\dot{m}_n^N(t)| \leq K'_n \quad \forall n, N, 2N \geq n+1, 0 \leq t \leq T$  .

□

La démonstration de ce lemme est faite en fin de section.

**LEMME 2.4**

Il existe une famille de lois  $\{v_t; 0 \leq t \leq T\}$ , et une sous-suite  $\{v_t^N; 0 \leq t \leq T\}_{N \in \mathbb{N}}$  extraite de  $\{\mu_t^N; 0 \leq t \leq T\}_{N \in \mathbb{N}}$ , telles que :

$$v_t^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} v_t, \quad 0 \leq t \leq T \quad \square$$

**Preuve :**

D'après le lemme 2.3-(ii)-(iii),  $\forall n$  fixé, la famille  $\{m_n^N(t); 0 \leq t \leq T\}_{N \geq \frac{1}{2}(n+1)}$  est bornée et équicontinue dans  $C[0, T]$ , donc relativement compacte.

Par un procédé de diagonalisation de Cantor on montre qu'il existe une suite croissante d'entiers  $\{N_p\}_{p \in \mathbb{N}}$  et des fonctions  $m_n^* \in C[0, T]$ , telles que :

$$(2.4.) \quad m_n^p(\cdot) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} m_n^*(\cdot) \quad \text{dans } C[0, T], \quad \forall n.$$

Pour montrer qu'il existe une famille de mesures non négatives  $\{\nu_t; 0 \leq t \leq T\}$  telle que :

$$(2.5) \quad m_n^*(t) = \int x^n \nu_t(dx), \quad \forall n, 0 \leq t \leq T.$$

on utilise le résultat suivant (cf. SHOHAT-TAMARKIN [11]) :

Etant donné une suite  $(m_n)$  de réels, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une mesure non-négative qui admette  $m_n$  pour moments ( $\forall n$ ), est que :

$$(2.6) \quad \left| \begin{array}{l} \forall k \in \mathbb{N}, C_0, C_1, \dots, C_k \in \mathbb{R} \\ \left[ \sum_{i=0}^k C_i x^i \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \right] \Rightarrow \left[ \sum_{i=0}^k C_i m_i \geq 0 \right] \end{array} \right. \quad \square$$

Pour tout  $t \leq T$  fixé, la propriété (2.6.) est satisfaite par  $\{m_n^p(t)\}_{n \in \mathbb{N}}$ , donc se conserve par passage à la limite lorsque  $p \rightarrow \infty$ . Ainsi, pour  $t \in [0, T]$ , on a :

$$(2.7) \quad \int x^n \nu_t^N(dx) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \int x^n \nu_t(dx).$$

Par ailleurs on déduit du lemme 2.3 que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\theta^n}{n!} m_n^*(t)$  admet un rayon de convergence strictement positif, donc d'après le lemme 2.1,  $\nu_t$  est l'unique loi sur  $\mathbb{R}$  qui vérifie (2.7), ce qui permet d'affirmer (cf. BREIMAN [3], p. 181) que  $\nu_t^N \Rightarrow \nu_t$  quand  $N \rightarrow \infty$ . □

**LEMME 2.5**

Sous les hypothèses (H1)-(H3), l'équation de Fokker-Planck (2.2), admet une unique solution  $t \rightarrow \mu_t$ , fonction à valeurs dans l'espace des mesures non-négatives sur  $\mathbb{R}$ .

□

**Preuve :** En utilisant la formule de Itô on vérifie aisément que la loi de  $X_t$  résout l'équation (2.2), d'où l'existence d'une solution. Soit  $\phi(\dots) \in C_b^{1,2}(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$  et  $\tilde{\mu}$  une solution de (2.2),

$$(\Delta) \quad \langle \tilde{\mu}_t, \phi(t) \rangle = \langle \mu_0, \phi(0) \rangle + \int_0^t \langle \tilde{\mu}_s, \phi'(s) + L\phi(s) \rangle ds$$

Par ailleurs, on considère l'équation aux dérivées partielles rétrograde,

$$(\Delta\Delta) \quad \frac{\partial v(s)}{\partial s} + Lv(s) = 0, \quad s < t, \quad v(t) = \bar{v}.$$

D'après les hypothèses faites, et en utilisant des théorèmes de régularité des solutions des EDP paraboliques (cf. LADYZENSKAJA et al [9]), on a:

$$(\Delta\Delta\Delta) \quad \forall \bar{v} \in \mathcal{ID}(\mathbb{R}), (\Delta\Delta) \text{ admet une solution } v \in C_b^{1,2}([0,t] \times \mathbb{R}).$$

$\mathcal{ID}(\mathbb{R})$  désigne l'espace des applications  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  à support compact.

Après différence entre deux solutions, pour démontrer l'unicité il suffit de vérifier:

$$(\Delta\Omega) \quad \mu_0 = 0 \implies \{ \tilde{\mu}_t = 0, 0 \leq t \}$$

Soit  $t \geq 0$  et  $\bar{v} \in \mathcal{ID}(\mathbb{R})$ , par  $(\Delta\Delta)$  on associe à  $\bar{v}$  une application  $v \in C_b^{1,2}([0,t] \times \mathbb{R})$ . D'après  $(\Delta)$  (avec  $\mu_0 = 0$ ) et  $(\Delta\Delta)$ :

$$\langle \tilde{\mu}_t, v(t) \rangle = \int_0^t \langle \tilde{\mu}_s, v'(s) + Lv(s) \rangle ds = 0$$

donc  $\langle \bar{\mu}_t, v(t) \rangle = \langle \bar{\mu}_t, \bar{v} \rangle = 0$ , ceci pour tout  $\bar{v} \in \text{ID}(\mathbb{R})$ , d'où  $\bar{\mu}_t = 0$ . □

Preuve du théorème 2.2 : Si on établit que :

$$(2.8) \quad \langle v_t, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle v_s, L\phi \rangle ds, \quad t \leq T, \quad \forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R})$$

alors d'après le lemme 2.5 on a  $v_t = \mu_t$   $0 \leq t \leq T$ . On en déduit donc qu'une sous-suite de  $\mu_t^N$  converge vers  $\mu_t$ . Mais en reprenant la démonstration, par unicité de la limite on montre qu'il y a convergence de toute la suite. Il s'agit donc de montrer que (2.8) est vérifiée pour tout  $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$ . Nous allons considérer plusieurs étapes successives.

Etape 1  $\phi$  polynôme .

Pour tout  $N \geq (d+1)/2$ ,  $d = \text{degré } \phi$ , on a :

$$(2.9) \quad \langle v_t^N, \phi \rangle = \langle \mu_0^N, \phi \rangle + \int_0^t \langle v_s^N, L\phi \rangle ds$$

donc (2.8) s'obtient par convergence dominée lorsque  $N \rightarrow \infty$ .

Etape 2  $\phi(x) = e^{i\theta x} p(x)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $p$  polynôme.

Prenons d'abord  $\phi(x) = e^{i\theta x}$ ,  $|\theta| \leq \theta_1$ , on pose :

$$\phi_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(i\theta x)^k}{k!} \quad \& \quad \beta_n = \frac{|\theta|^{n+1}}{(n+1)!} \int |x|^{n+1} v_t(dx)$$

( $t \in [0, T]$  fixé), d'après le lemme (2.3)  $\beta_n \rightarrow 0$ , par ailleurs on vérifie aisément que :

$$\left| e^{i\theta x} - \sum_{k=0}^n \frac{(i\theta x)^k}{k!} \right| \leq c \frac{|\theta|^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

ainsi pour  $j = 0, 1, 2$  :

$$\langle v_t, |\phi^{(j)} - \phi_n^{(j)}| \rangle \leq c_j \beta_{n-j} \longrightarrow 0$$

Comme : 
$$\langle v_t, \phi_n \rangle - \langle \mu_0, \phi_n \rangle - \int_0^t \langle v_s, L\phi \rangle ds = 0$$

, quand  $n \rightarrow \infty$  on obtient :

$$\phi(\theta) := \langle v_t, \phi \rangle - \langle \mu_0, \phi \rangle - \int_0^t \langle v_s, L\phi \rangle ds = 0, \quad \forall |\theta| \leq \theta_1.$$

Donc  $\forall p \geq 1$ ,  $\phi^{(p)}(\theta) = 0$ ,  $|\theta| \leq \theta_1$ , on en déduit que (2.8) est vraie pour tout  $\phi$  de la forme  $e^{i\theta x} p(x)$ ,  $|\theta| \leq \theta_1$ ,  $p$  polynôme. En utilisant l'inégalité :

$$\left| \exp\{i(\theta + \theta_1)x\} + \exp\{i\theta_1 x\} \sum_{k=0}^n \frac{(i\theta x)^k}{k!} \right| \leq c \frac{|\theta|^{n+1}}{(n+1)!} |x|^{n+1}$$

on montre par le même raisonnement que  $\phi(\theta) = 0 \quad \forall |\theta| \leq 2\theta_1$ , donc (2.8) est vérifiée pour tout  $\phi$  de la forme  $e^{i\theta x} p(x)$ ,  $|\theta| \leq 2\theta_1$ ,  $p$  polynôme.

Ainsi de suite : (2.8) est vérifiée pour tout  $\phi$  de la forme  $e^{i\theta x} p(x)$ ,  $\theta \in \mathbb{R}$ ,  $p$  polynôme.

Etape 3  $\phi \in C_K^2(\mathbb{R})$

$$\text{Soit } \mathcal{E} := \left\{ x \rightarrow \sum_{k=-n}^n a_k^n \exp\{ib_k^n x\} ; n \in \mathbb{N}, a_k^n, b_k^n \in \mathbb{R} \right\},$$

Comme  $\phi \in C_K^2(\mathbb{R})$ ,  $\phi'' \in C_K(\mathbb{R})$ , il existe donc  $\{\phi_n''\}$  dans  $\mathcal{E}$  telle que :

$$\|\phi'' - \phi_n''\|_{\infty} \rightarrow 0$$

Posons :

$$\phi_n'(x) = \phi'(0) + \int_0^x \phi_n''(y) dy ,$$

$$\phi_n(x) = \phi(0) + \int_0^x \phi_n'(y) dy .$$

on a :

$$\| \phi^{(j)} - \phi_n^{(j)} \|_{\infty} \rightarrow 0 \quad j=0,1,2$$

(2.8) est vraie pour tout élément de  $\mathbb{E}$  donc par convergence dominée, pour  $\phi$ .

Etape 4  $\phi \in C_b^2(\mathbb{R})$  .

Soit  $\tau_n \in C_b^2(\mathbb{R})$  telle que

$$\begin{cases} 0 \leq \tau_n^{(i)} \leq 1 & i=0,1,2 ; \\ \tau_n = 1 & \text{sur } [-n,n] ; \\ \tau_n = 0 & \text{sur } ]-\infty, -n-1[ \cup ]n+1, +\infty[ . \end{cases}$$

On pose  $\phi_n = \tau_n \phi \in C_K^2(\mathbb{R})$ , par convergence dominée, on montre que (2.8) est vraie pour  $\phi$ . Ce qui achève la démonstration du théorème 2.2. □

Preuve du lemme 2.3 :

Nous montrons qu'il existe  $K_n$  et  $K'_n$  tels que:

(Δ)  $|m_n(t)| \leq K_n$  ,  $\forall n$  ,  $0 \leq t \leq T$ .

(ΔΔ)  $|\dot{m}_n(t)| \leq K'_n$  ,  $\forall n$  ,  $0 \leq t \leq T$ .

(ΔΔΔ) La série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\theta^n}{n!} K_n$  admet un rayon de

convergence strictement positif.



Posons  $\phi_n(x) = x^n$ ,

$$\begin{aligned} m_{2n}(t) &= m_{2n}(0) + \int_0^t \langle \mu_s, 2nb\phi_{2n-1} + n(2n-1)\sigma^2\phi_{2n-2} \rangle ds \\ &\leq m_{2n}(0) + c \int_0^t \langle \mu_s, 2n|\phi_{2n-1}| + n(2n-1)\phi_{2n-2} \rangle ds \end{aligned}$$

Comme  $|x|^{2n-1} \leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^{2n}}{2n} + 2n x^{2n-2} \right\}$  on a :

$$m_{2n}(t) \leq m_{2n}(0) + c \int_0^t \{m_{2n}(s) + n^2 m_{2n-2}(s)\} ds$$

Donc, si  $|m_{2n-2}(t)| \leq K_{2n-2}$ , par le lemme de Gronwall :

$$m_{2n}(t) \leq c \{m_{2n}(0) + n^2 K_{2n-2}\}$$

$c$  désigne une constante qui dépend de  $T$ , mais pas de  $n$ .

Soit  $K_0$  telle que  $|m_0(t)| \leq K_0$ ,  $0 \leq t \leq T$ , on définit par récurrence :

$$(2.10) \quad K_{2n} = c \{m_{2n}(0) + n^2 K_{2n-2}\}$$

alors  $|m_{2n}(t)| \leq K_{2n}$ ,  $\forall n$ ,  $0 \leq t \leq T$ . La solution de (2.10) est :

$$(2.11) \quad K_{2n} = c^n (n!)^2 K_0 + \sum_{i=1}^n c^{n-i+1} \left\{ \frac{n!}{i!} \right\}^2 m_{2i}(0)$$

D'après (H4),  $\max_{n \in \mathbb{N}} \left\{ m_{2n}(0) / (2n)! \right\} \frac{1}{2^n} \leq M < \infty$  (on choisit  $M \geq 1$ ).

Donc  $m_{2n}(0) \leq (2n)! M^{2n}$ , avec (2.11) on obtient alors, pour  $n$  suffisamment grand:

$$\frac{K_{2n}}{(2n)!} \leq c^{n+1} \{ K_0 + n M^{2n} \} \leq c^{n+1} (n+1) M^{2n}$$

On en déduit:

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ K_{2n} / (2n)! \right\}^{\frac{1}{2n}} \leq \sqrt{c} M < \infty .$$

En utilisant le critère de Cauchy pour la convergence des séries à termes positifs, on montre que la série:

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{\theta^{2n}}{(2n)!} K_{2n}$$

admet un rayon de convergence strictement positif.

Par ailleurs  $|x|^{2n-1} \leq \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^{2n}}{2n} + 2n x^{2n-2} \right\}$ , on peut donc choisir:

$$K_{2n-1} := \frac{1}{2} \left\{ \frac{K_{2n}}{2n} + 2n K_{2n-2} \right\}$$

On vérifie alors  $(\Delta)$  et  $(\Delta\Delta\Delta)$ .  $(\Delta\Delta)$  se démontre sans difficultés. Pour démontrer le lemme il suffit de remarquer que la démonstration ci-dessus reste valable pour les moments  $m_n^N(t)$ , avec les mêmes constantes  $K_n$  et  $K'_n$ .

□

### REMARQUE 2.6

1. Dans la démonstration précédente on n'a pas tenu compte du fait que  $m_0(t) = m_0^N(t) = 1$ ,  $0 \leq t \leq T$ , on a seulement supposé:

$$|m_0(t)| \leq K_0, \quad 0 \leq t \leq T$$

pour une certaine constante  $K_0$ . Ainsi le résultat reste juste lorsque  $\mu_0$  est une mesure non négative sur  $\mathbb{R}$  non normalisée.

2. On a démontré la conservation du critère de Cauchy: si,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ m_{2n}(0) / (2n)! \right\}^{\frac{1}{2n}} < \infty$$

alors pour tout  $t \in [0, T]$ ,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ m_{2n}(t) / (2n)! \}^{\frac{1}{2n}} < \infty .$$

Ces deux remarques nous seront utiles pour le problème de filtrage non linéaire.

□

### Chapitre III

#### RESOLUTION NUMERIQUE DE L'EQUATION DE ZAKAI

On considère le système non linéaire:

$$(3.1) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 \sim \mu_0 ; \\ dY_t = h(X_t) dt + dV_t, \quad Y_0 = 0 . \end{array} \right.$$

$0 \leq t \leq T$  ;  $X, Y, W, V$  prennent leurs valeurs dans  $\mathbb{R}$  ;  $W$  et  $V$  sont des processus de Wiener standard indépendants ;  $X_0$  est indépendant de  $W$  et  $V$  . Supposons satisfaites les hypothèses (H1)-(H4) du chapitre précédent, ainsi que l'hypothèse :

(H5)  $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une application mesurable bornée.

$X$  décrit l'évolution de l'état d'un système physique ,  $Y$  son observation. Le problème de filtrage consiste à estimer  $\phi(X_t)$  à partir de l'information contenue dans  $\{Y_s; s \leq t\}$  ,  $\forall t$  .

Notons  $\mathbb{F}_t = \sigma\{Y_s; s \leq t\}$ , le meilleur estimateur au sens du risque quadratique de  $\phi(X_t)$  sachant  $\mathbb{F}_t$  est  $E[\phi(X_t) | \mathbb{F}_t]$ . On est donc amené à déterminer  $\nu_t$  la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\mathbb{F}_t$  :

$$\langle \nu_t, \phi \rangle = E[\phi(X_t) | \mathbb{F}_t]$$

Pour caractériser  $\nu$ , on peut utiliser la méthode de la probabilité de référence. Soit  $\overset{\circ}{P}$  la loi déterminée par

$$\frac{d\overset{\circ}{P}}{dP} = \{ Z_T \}^{-1}$$

où  $\{Z_t\}$  est définie par:

$$Z_t = \exp \int_0^t \left\{ h(X_s) dY_s - \frac{1}{2} h(X_s)^2 ds \right\}$$

Le calcul de la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\mathbb{F}_t$  sous  $P$ , est lié à une expression calculée sous la probabilité  $\overset{\circ}{P}$ , par la formule de Kallianpur-Streibel:

$$(3.2) \quad E[ \phi(X_t) | \mathbb{F}_t ] = \frac{\overset{\circ}{E}[ \phi(X_t) Z_t | \mathbb{F}_t ]}{\overset{\circ}{E}[ Z_t | \mathbb{F}_t ]}$$

L'intérêt de la probabilité de référence réside dans le fait que sous  $\overset{\circ}{P}$ ,  $W$  et  $Y$  sont des processus de Wiener indépendants. On définit  $\tilde{\nu}$  la loi conditionnelle non normalisée de  $X_t$  sachant  $\mathbb{F}_t$ , en posant:

$$\langle \tilde{\nu}_t, \phi \rangle = \overset{\circ}{E}[ \phi(X_t) Z_t | \mathbb{F}_t ]$$

$\tilde{\nu}$  est solution d'une équation aux dérivées partielles stochastique - dite équation de Zakai - écrite ici sous forme faible:

$$(3.3) \quad \langle \tilde{\nu}_t, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \tilde{\nu}_s, L\phi \rangle ds + \int_0^t \langle \tilde{\nu}_s, h\phi \rangle dY_s, \quad \forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}).$$

Si l'on note  $\langle \tilde{\nu}_t, 1 \rangle = \int \tilde{\nu}_t(dx)$ , on a donc la relation:

$$\langle \nu_t, \phi \rangle = \frac{\langle \tilde{\nu}_t, \phi \rangle}{\langle \tilde{\nu}_t, 1 \rangle}.$$

### 3.1 Filtrage avec Observation en Temps Discret

On considère le système :

$$(3.4) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = \mu_0, \\ y_k = h(X_{t_k}) + v_k, \end{array} \right.$$

où  $0 \leq t \leq T$ ,  $0 < t_1 < \dots < t_K = T$  est une suite d'instants donnés, pour simplifier nous prendrons  $t_k = k \Delta$ , avec  $\Delta = T/K$  ( $K \in \mathbb{N}$ ).

$\{y_k\}$  et  $\{v_k\}$  sont des processus à valeurs dans  $\mathbb{R}$ ;  $\{v_k\}$  est une suite de variables gaussiennes indépendantes,  $v_k \sim N(0, R)$ ;  $W$  est un processus de Weiner standard indépendant de  $\{v_k\}$ ;  $X_0$  est indépendant de  $W$  et  $\{v_k\}$ . On suppose (H1)-(H5) satisfaites.

Soit  $\eta_t$  la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\{y_1, \dots, y_{[t/\Delta]}\}$ , où  $[t/\Delta]$  désigne la partie entière de  $t/\Delta$ .  $\eta$  est déterminée par:

$$(3.5) \quad \langle \eta_t, \phi \rangle = \frac{\langle \tilde{\eta}_t, \phi \rangle}{\langle \tilde{\eta}_t, 1 \rangle}$$

où  $\tilde{\eta}$  - la loi conditionnelle non normalisée - est définie par l'équation :

$$(3.6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \tilde{\eta}_t, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \tilde{\eta}_s, L\phi \rangle ds + \sum_{k=1}^{[t/\Delta]} \langle \tilde{\eta}_{t_k^-}, \{f(\cdot, y_k) - 1\} \phi \rangle \\ \forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}). \end{array} \right.$$

avec: \*  $\langle \tilde{\eta}_{t_k^-}, \phi \rangle := \lim_{t \rightarrow t_k^-, t < t_k} \langle \tilde{\eta}_t, \phi \rangle$  ;

\*  $f(x, y) := \exp \left\{ \frac{1}{R} h(x) y - \frac{1}{2R} h(x)^2 \right\}$  .

De même  $\eta$  est solution d'une équation du type (3.6), à savoir:

$$(3.7) \quad \left| \begin{array}{l} \langle \eta_t, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \eta_s, L\phi \rangle ds + \sum_{k=1}^{[t/\Delta]} \frac{\langle \eta_{t_k^-}, \{f(\cdot, y_k) - 1\} \phi \rangle}{\langle \eta_{t_k^-}, f(\cdot, y_k) \rangle} \\ \forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}). \end{array} \right.$$

On peut remarquer qu'entre deux instants d'observation, l'évolution de  $\eta$  est décrite par l'équation de Fokker-Planck et, qu'à l'instant  $t_k$  :

$$\langle \eta_{t_k}, \phi \rangle = \frac{\langle \eta_{t_k^-}, f(\cdot, y_k) \phi \rangle}{\langle \eta_{t_k^-}, f(\cdot, y_k) \rangle}$$

On se propose d'approcher  $\eta_t$  par une mesure de probabilité  $\eta_t^N$ , de la forme:

$$\eta_t^N = \sum_{i=1}^N a_t^i \delta(x_t^i)$$

où les processus stochastiques  $a^i$  et  $x^i$  sont déterminés en posant:

$$(3.8) \quad \left| \begin{array}{l} \langle \eta_t^N, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \eta_s^N, L\phi \rangle ds + \sum_{k=1}^{[t/\Delta]} \frac{\langle \eta_{t_k^-}^N, \{f(\cdot, y_k) - 1\} \phi \rangle}{\langle \eta_{t_k^-}^N, f(\cdot, y_k) \rangle} \\ \forall \phi \in \Pi_{2N-1}. \end{array} \right.$$

### THEOREME 3.1

Pour toute trajectoire  $\{y_1, \dots, y_K\}$  donnée, l'approximation de Gauss-Galerkin est convergente:

$$\eta_t^N \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \eta_t, \quad 0 \leq t \leq T.$$

□

**Preuve :** On note  $m_n(t) = \int x^n \eta_t(dx)$  ; supposons que

$$(\Delta) \quad \eta_t^N \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \eta_t ,$$

$$(\Delta\Delta) \quad \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \mu_{2n}(t) / (2n)! \}^{\frac{1}{2n}} < \infty ,$$

soient vérifiées pour  $t=t_{k-1}$  ; nous allons montrer que  $(\Delta)(\Delta\Delta)$  sont vérifiées pour  $t \in [t_{k-1}, t_k]$  .

Pour  $t \in ]t_{k-1}, t_k[$  , l'évolution de  $\eta_t$  est décrite par l'équation de Fokker-Planck, on déduit du théorème 2.3 et de la remarque 2.6 que  $(\Delta)$  est vérifiée pour tout  $t \in ]t_{k-1}, t_k[$ . Comme:

$$\langle \eta_{t_k}^N , \phi \rangle = \frac{\langle \eta_{t_k^-}^N , f(\cdot, y_k) \phi \rangle}{\langle \eta_{t_k^-}^N , f(\cdot, y_k) \rangle}$$

, on en déduit que  $(\Delta)$  est aussi vraie pour  $t=t_k$ . Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ m_{2n}(t_k) / (2n)! \}^{\frac{1}{2n}} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{(2n)!} \frac{\int f(x, y_k) x^{2n} \eta_{t_k^-}(dx)}{\int f(x, y_k) \eta_{t_k^-}(dx)} \right\}^{\frac{1}{2n}} \\ &\leq \exp \left\{ 2 \frac{c}{R} \max_k |y_k| + \frac{c^2}{R} \right\} \times \\ &\quad \times \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ m_{2n}(t_k^-) / (2n)! \}^{\frac{1}{2n}} \end{aligned}$$

pour cette dernière majoration on a utilisé la double inégalité:

$$\exp \left\{ - \frac{c}{R} \max_k |y_k| - \frac{c^2}{2R} \right\} \leq f(x, y_k) \leq \exp \left\{ \frac{c}{R} \max_k |y_k| + \frac{c^2}{2R} \right\}$$

où  $c$  est un majorant de  $|h(x)|$  .



Mais d'après  $(\Delta\Delta)$  et en utilisant la remarque 2.6, on a :

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left\{ m_{2n}(t_k^-) / (2n)! \right\}^{\frac{1}{2n}} < \infty .$$

Ainsi  $(\Delta)(\Delta\Delta)$  sont vraies pour  $t=t_k$ . Pour terminer la démonstration, il suffit de vérifier  $(\Delta)(\Delta\Delta)$  pour  $t=0$ . D'après l'équation (3.8),  $\eta_0^N$  est l'approximation de Gauss-Christoffel, d'où  $(\Delta)$ . Par ailleurs  $(\Delta\Delta)$  en  $t=0$  est exactement l'hypothèse  $(H4)$ .

□

### 3.2 Filtrage avec Observation en Temps Continu

Avant d'introduire l'approximation de Gauss-Galerkin, on considère un problème de filtrage non linéaire "approché". Dans (3.1) on discrétise l'équation d'observation :

$$\begin{aligned} Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k} &= \int_{t_k}^{t_{k+1}} h(X_s) ds + V_{t_{k+1}} - V_{t_k} \\ &= h(X_{t_k}) \Delta + V_{t_{k+1}} - V_{t_k} \end{aligned}$$

Donc, en posant  $v_k := \Delta^{-1} \{V_{t_{k+1}} - V_{t_k}\}$ , on obtient l'équation en temps discret :

$$y_k = h(X_{t_k}) + v_k$$

où  $y_k$  est l'approximation de  $\Delta^{-1} \{Y_{t_{k+1}} - Y_{t_k}\}$ .

On définit  $\mathbb{F}_t^\Delta := \sigma\{y_1, \dots, y_{[t/\Delta]}\}$  et  $\Delta_{v_t}$  la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\mathbb{F}_t^\Delta$ .

Comme nous l'avons vu dans la section précédente l'évolution de  $\Delta v$  est décrite par l'équation :

$$(3.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \Delta \eta_t, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \Delta \eta_s, L\phi \rangle ds + \\ \quad + \sum_{k=1}^{[t/\Delta]} \frac{\langle \Delta \eta_{t_k^-}, \{f_\Delta(\cdot, y_k) - 1\} \phi \rangle}{\langle \Delta \eta_{t_k^-}, f_\Delta(\cdot, y_k) - 1 \rangle} \\ \forall \phi \in C_b^2(\mathbb{R}) \end{array} \right.$$

Avec  $f_\Delta(x, y) := \exp\{h(x) y \Delta - \frac{1}{2} h(x)^2 \Delta\}$ .

### THEOREME 3.2

Outre les hypothèses (H1)-(H5), supposons que  $h \in C_b^2(\mathbb{R})$ , alors pour toute trajectoire observée  $\{Y_s; s \leq t\}$  :

$$\Delta v_t \xrightarrow[\Delta \rightarrow 0]{} v_t, \quad 0 \leq t \leq T,$$

où  $v_t$  désigne la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\mathbb{F}_t = \sigma\{Y_s; s \leq t\}$  (à condition de définir  $v_t$  "sous forme robuste", cf. PARDOUX[10]).

□

### Preuve :

Plaçons-nous sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathbb{F}, \overset{\circ}{P})$  et considérons le système différentiel stochastique:

$$(3.10) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \\ dY_t = d\overset{\circ}{V}_t \end{array} \right.$$

où  $(W_t / \overset{\circ}{V}_t)$  est un  $\overset{\circ}{P}$ -processus de Wiener standard à valeurs dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ , indépendant de  $X_0$  ( $Y_0 := 0$ ).

Pour  $Y$  on prend la représentation canonique<sup>(\*)</sup>  $(C[0, T], \mathcal{B}, P_w, Y)$ . De plus on définit  $\bar{P}$  la loi marginale de  $X$  sur un espace  $(\bar{\Omega}, \bar{\mathcal{F}})$ . Sous  $\overset{\circ}{P}$ ,  $X$  et  $Y$  sont indépendants :

$$(3.11) \quad \overset{\circ}{P}(dX, dY) = \bar{P}(dX) \times P_w(dY)$$

Afin de simplifier les notations on prend  $\Delta_n := T/n$ ,  $t_i^n := i\Delta_n$ , dans la suite  $t_i^n$  sera noté  $t_i$ . On définit :

$$h^n(t, X) := h(X_{t_i}) \quad \text{pour } t \in [t_i, t_{i+1}[.$$

On considère alors les  $\overset{\circ}{P}$ -martingales exponentielles suivantes :

$$(3.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} Z_t := \exp \int_0^t \{ h(X_s) dY_s - \frac{1}{2} h(X_s)^2 ds \} \\ Z_t^n := \exp \int_0^t \{ h^n(s, X) dY_s - \frac{1}{2} h^n(s, X)^2 ds \} \end{array} \right.$$

Posons  $dM_s = Lh(X_s) ds + (h' \circ)(X_s) dW_s$ , par intégration par parties dans l'intégrale de Itô on a :

$$(3.13) \quad Z_t = \exp \left\{ h(X_t) Y_t - \int_0^t \{ Y_s dM_s - \frac{1}{2} h(X_s)^2 ds \} \right\}$$

Par ailleurs comme  $t \rightarrow h^n(t, X)$  est constant par morceaux :

$$(3.14) \quad Z_t^n = \exp \left( h(X_{t_i}) (Y_t - Y_{t_i}) - \frac{1}{2} h(X_{t_i})^2 (t - t_i) + \sum_{j=0}^{i-1} \left\{ h(X_{t_j}) (Y_{t_{j+1}} - Y_{t_j}) - \frac{1}{2} h(X_{t_j})^2 \Delta_n \right\} \right)$$

pour  $t \in [t_i, t_{i+1}[.$

---

(\*)  $(C[0, T], \mathcal{B})$  espace des fonctions continues  $[0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , muni de la tribu borélienne,  $P_w$  la mesure de Wiener,  $Y$  le processus canonique.

(3.13) et (3.14) permettent de considérer  $Z_t$  et  $Z_t^n$  pour toute trajectoire de  $Y$  fixée.

On définit les lois  $P$  et  $P^n$  sur  $(\Omega, \mathbb{F})$  :

$$(3.15) \quad \frac{dP}{dP} := Z_T, \quad \frac{dP^n}{dP} := Z_T^n.$$

Sous  $P$  ( resp.  $P^n$  ),  $(X / Y)$  admet la représentation suivante:

$$(3.16) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \\ dY_t = h(X_t) dt + dV_t \\ \text{( resp. } dY_t = h^n(t, X) dt + dV_t^n \text{ )} \end{array} \right.$$

où  $V$  ( resp.  $V^n$  ) est un  $P$ -processus ( resp.  $P^n$ -processus ) de Wiener standard défini par:

$$\begin{aligned} V_t &:= \overset{\circ}{V}_t + \int_0^t h(X_s) ds \\ \text{( resp. } V_t^n &:= \overset{\circ}{V}_t + \int_0^t h^n(s, X) ds \text{ )}. \end{aligned}$$

On considère maintenant le système avec observation en temps discret:

$$(3.17) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \\ y_i^n = h(X_{t_i}) + v_i^n \end{array} \right.$$

$$\text{où } v_i^n := \frac{1}{\Delta_n} (V_{t_{i+1}} - V_{t_i}).$$

Il est clair que sous  $P^n$ , la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\sigma(Y_i^n; i \text{ t.q. } t_i \leq t)$  est égale à la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\mathbb{F}_t := \sigma(Y_s; s \leq t)$ . Notre but est donc de démontrer la convergence des expressions  $E^n[\phi(X_t) | \mathbb{F}_t]$ , pour toute fonction  $\phi$  continue bornée.

D'après (3.15), en utilisant la formule de Kallianpur-Streibel :

$$E[\phi(X_t) | \mathbb{F}_t] = \frac{\overset{\circ}{E}[\phi(X_t)Z_t | \mathbb{F}_t]}{\overset{\circ}{E}[Z_t | \mathbb{F}_t]} \quad \overset{\circ}{P}\text{-p.s.}$$

$$E^n[\phi(X_t) | \mathbb{F}_t] = \frac{\overset{\circ}{E}[\phi(X_t)Z_t^n | \mathbb{F}_t]}{\overset{\circ}{E}[Z_t^n | \mathbb{F}_t]} \quad \overset{\circ}{P}\text{-p.s.}$$

Mais d'après (3.11) :

$$\overset{\circ}{E}[\phi(X_t)Z_t | \mathbb{F}_t] = \bar{E}[\phi(X_t)Z_t] \quad P_w\text{-p.s.}$$

$$\overset{\circ}{E}[\phi(X_t)Z_t^n | \mathbb{F}_t] = \bar{E}[\phi(X_t)Z_t^n] \quad P_w\text{-p.s.}$$

Pour  $\{Y_s; s \leq t\}$  une trajectoire donnée de l'observation, il s'agit donc de montrer :

$$\bar{E}[\phi(X_t)Z_t^n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \bar{E}[\phi(X_t)Z_t]$$

comme  $\phi$  est bornée, il suffit de vérifier que,

$$(3.18) \quad Z_t^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z_t \quad \text{dans } L^1(\bar{\Omega}, \bar{\mathbb{F}}, \bar{P}).$$

A  $t$  fixé  $Z_t^n$  et  $Z_t$  sont des variables positives d'espérance égale à 1 ( $\forall n$ ), une condition suffisante pour que (3.18) soit vérifié est :

$$Z_t^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} Z_t \quad \text{en } \bar{P}\text{-probabilité.}$$

Enfin ce dernier résultat se déduit des définitions (3.13) et (3.14) de  $Z_t$  et  $Z_t^n$ . Ce qui achève la démonstration du théorème 3.2.

□

**Remarque :** Le théorème 3.2 ne se limite absolument pas au cas de la dimension 1. La démonstration que l'on vient de donner est identique dans le cas multidimensionnel. □

On utilise la méthode de Gauss-Galerkin afin d'approcher  $\Delta_{v_t}$  par une mesure de probabilité  $\Delta_{v_t}^N$  de la forme:

$$\Delta_{v_t}^N = \sum_{i=1}^N a_t^i \delta(x_t^i)$$

Les processus stochastiques  $a^i, x^i$  - qui dépendent de  $\Delta$  et  $N$  - sont déterminés en posant:

$$(3.19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \langle \Delta_{\eta_t}^N, \phi \rangle = \langle \mu_0, \phi \rangle + \int_0^t \langle \Delta_{\eta_s}^N, L\phi \rangle ds + \\ \quad + \sum_{k=1}^{[t/\Delta]} \frac{\langle \Delta_{\eta_{t-k\Delta}}^N, \{f_{\Delta}(\cdot, y_k) - 1\} \phi \rangle}{\langle \Delta_{\eta_{t-k\Delta}}^N, f_{\Delta}(\cdot, y_k) - 1 \rangle} \\ \forall \phi \in \Pi_{2N-1} \end{array} \right.$$

D'après le théorème 3.1, pour tout  $\Delta$ , on a la convergence suivante:

$$(3.20) \quad \Delta_{v_t}^N(\omega) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} \Delta_{v_t}(\omega), \quad \forall \omega \text{ p.s.}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

On introduit  $\mathcal{M}_+$  l'ensemble des mesures de probabilités sur  $\mathbb{R}$ , et  $C_u(\mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions bornées, uniformément continues. Soit  $\{f_p; p \geq 0\}$  une suite dense dans  $C_u(\mathbb{R})$ . On définit:

$$d(\mu, \lambda) := \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^k} \frac{|\langle \mu, f_p \rangle - \langle \lambda, f_p \rangle|}{\|f_p\|}$$

(  $\|f\| := \max\{f(x); x \in \mathbb{R}\}$  ).  $d(\cdot, \cdot)$  définit une métrique sur  $\mathcal{M}_+$ , plus précisément ( cf. STROOCK-VARADHAN[12] ):

**THEOREME 3.3**

Soit  $\mu_n, \mu \in \mathbb{M}_+$ , les deux assertions suivantes sont équivalentes:

- (i)  $\mu_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mu$  ;
- (ii)  $d(\mu_n, \mu) \rightarrow 0$ , quand  $n \rightarrow \infty$ .

□

De (3.20) et des théorèmes 3.2 & 3.3 on déduit le résultat suivant:

21  
(3.12)

A tout  $\Delta > 0$  on peut associer  $N(\Delta) \in \mathbb{N}$  tel que :

$$\Delta \underset{v_t}{N(\Delta)} \xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} v_t, \quad \forall \omega \text{ p.s.}, \quad 0 \leq t \leq T.$$

**Remarque:**

Ce dernier résultat de convergence n'est pas entièrement satisfaisant (on ne sait pas choisir explicitement  $N(\Delta)$ ). Mais comme en pratique l'équation d'observation est toujours en temps discret, pour un pas de discrétisation  $\Delta$  donné la convergence (3.20) est satisfaisante.

On aurait pu obtenir une convergence en moyenne quadratique dans le cas des observations en temps continu. Mais ce n'est pas non plus d'un grand intérêt. Pour obtenir une convergence pour chaque trajectoire observée, on pourrait penser utiliser la "forme robuste" de l'équation de Zakai; ceci n'a pas été réalisable, car la multiplication par  $\exp\{-h(x)Y_t\}$  fait sortir de l'espace des polynômes de degré au plus égal à  $N$ .

□

## Chapitre IV

### ETUDE NUMERIQUE

Dans ce chapitre nous présentons quelques exemples numériques d'applications de la méthode de Gauss-Galerkin. Les calculs ont été faits sur un ordinateur VAX 730 en FORTRAN 77 double précision.

La méthode d'approximation dépend fortement du schéma de discrétisation en temps utilisé. Pour l'approximation de l'équation de Fokker-Planck, nous utilisons un algorithme de Runge-Kutta d'ordre 2; on peut naturellement utiliser des schémas plus performants si la nature du problème considéré le nécessite.

A chaque incrémentation en temps, le calcul de l'approximation par la méthode présentée au chapitre I, nécessite d'une part, une base de polynômes orthogonaux, et d'autre part, le calcul des valeurs (et vecteurs) propres d'une matrice tridiagonale symétrique. La base de polynômes retenue est celle d'Hermite. Pour le calcul des valeurs propres nous utilisons une variante de la méthode QL; le programme exact se trouve dans GARBOW et al[5].



Pour un pas d'incrémentation en temps  $\Delta t$  donné, le passage  $t \rightarrow t + \Delta t$  s'effectue de la manière suivante :

données: Points et poids de Gauss  $x_t^i, a_t^i$  ( $i=1 \dots N$ ) .

incrémentation: \* En utilisant un schéma d'intégration numérique pour résoudre les équations (2.3) ( ou (3.8) dans le cas du problème de filtrage avec observations en temps discret ) on calcule :

$$\langle \mu_{t+\Delta t}^N, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \Pi_{2N-1} .$$

\* En utilisant la méthode de quadrature de Gauss-Chistoffel (cf. ch.I), on calcule les points et les poids de Gauss  $x_{t+\Delta t}^i, a_{t+\Delta t}^i$  tels que:

$$\sum_{i=1}^N a_{t+\Delta t}^i \phi(x_{t+\Delta t}^i) = \langle \mu_{t+\Delta t}^N, \phi \rangle, \quad \forall \phi \in \Pi_{2N-1} .$$

□

#### 4.1 Approximation de l'Equation de Fokker-Planck

Nous allons tester la méthode sur trois exemples pour lesquels la solution exacte est connue (cf. ARNOLD[1]). Les deux premiers exemples sont linéaires, le troisième se déduit d'un exemple linéaire.

##### Exemple 1

On considère le processus d'Orstein-Uhlenbeck:

$$dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = x_0.$$

( $\alpha > 0$ ). La solution de cette équation est:

$$X_t = e^{-\alpha t} x_0 + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s.$$

Ainsi X est un processus gaussien,  $X_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$ ,

$$(\Delta) \quad \left| \begin{array}{l} \mu_t = x_0 e^{-\alpha t}, \\ \sigma_t^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha} \{ 1 - e^{-2\alpha t} \}. \end{array} \right.$$

Dans l'exemple présenté nous prenons:

$$\alpha = \beta = 2, \quad x_0 = 2, \quad T = 10.$$

Pour l'approximation les paramètres sont :

- \* Nombre de points et poids de Gauss : 20
- \* Pas d'incrémentations : 0.02

Dans le tableau 1, nous donnons les moments de l'approximation obtenue par la méthode de Gauss-Galerkin (notés "approché" dans le tableau), et les moments de la loi exacte ("exact") calculés grâce aux formules ( $\Delta$ ). Nous présentons les moments d'ordre 2,5,8,14,17 et 20, aux instants  $t=1,2,3,4,6,10$ .

t	moment d'ordre					
	2		5		8	
	approché	exact	approché	exact	approché	exact
1	0.105D+00	0.105D+00	0.409D+01	0.410D+01	0.127D+03	0.127D+03
2	0.998D+00	0.100D+00	0.530D+00	0.549D+00	0.105D+03	0.105D+03
3	0.997D+00	0.100D+00	0.748D-01	0.744D-01	0.105D+03	0.105D+03
4	0.100D+00	0.100D+00	0.190D-03	0.100D-01	0.104D+03	0.105D+03
6	0.100D+00	0.100D+00	-0.223D-06	0.184D-03	0.104D+03	0.105D+03
10	0.100D+00	0.100D+00	-0.223D-06	0.618D-07	0.104D+03	0.105D+03
	14		17		20	
	approché	exact	approché	exact	approché	exact
1	0.186D+06	0.186D+06	0.902D+07	0.973D+07	0.100D+10	0.998D+09
2	0.136D+06	0.136D+06	0.137D+07	0.126D+07	0.660D+09	0.661D+09
3	0.135D+06	0.135D+06	0.172D+06	0.171D+06	0.646D+09	0.655D+09
4	0.134D+06	0.135D+06	0.109D-06	0.231D+05	0.650D+09	0.654D+09
6	0.134D+06	0.135D+06	0.109D-06	0.423D+03	0.650D+09	0.654D+09
10	0.134D+06	0.135D+06	0.109D-06	0.142D+01	0.650D+09	0.654D+09

tableau 1

On remarque que les moments d'ordre impair sont calculés avec très peu de précision relativement aux moments d'ordre pair; ceci est dû aux différences d'échelles existant entre les moments d'ordre impair et pair, compte tenu de ce que la loi asymptotique est symétrique par rapport à l'origine.

□

**Exemple 2**

On considère l'équation:

$$dX_t = A X_t dt + B X_t dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad X_0 = x_0.$$

La solution de cette équation est :

$$X_t = x_0 \exp\left\{ \left( A - \frac{1}{2} B^2 \right) t + B W_t \right\}.$$

Ainsi  $X_t$  suit une loi log-normale, son moment d'ordre  $p$  est donné par la formule:

$$(\Delta) \quad E\{ X_t^p \} = x_0^p \exp\left\{ p \left( A - \frac{1}{2} B^2 \right) t + \frac{1}{2} p^2 B^2 t \right\}$$

Dans le tableau on présente les moments de l'approximation de Gauss-Galerkin et les moments exacts donnés par  $(\Delta)$ , pour l'exemple suivant:

- \*  $A = 0.1$  ,  $B = 0.1$  ,  $x_0 = 0.5$  ,  $T = 10$  ;
- \* Nombre de points et poids de Gauss : 16 ;
- \* Pas d'incrémentation : 0.02 .

t	moment d'ordre					
	1		4		7	
	approché	exact	approché	exact	approché	exact
2	0.610D+00	0.610D+00	0.156D+00	0.156D+00	0.481D-01	0.482D-01
4	0.746D+00	0.745D+00	0.395D+00	0.394D+00	0.301D+00	0.289D+00
6	0.921D+00	0.911D+00	0.995D+00	0.987D+00	0.186D+00	0.184D+00
8	0.111D+00	0.111D+00	0.248D+01	0.248D+01	0.114D+02	0.113D+02
10	0.136D+00	0.136D+00	0.625D+01	0.622D+01	0.703D+02	0.700D+02

	11		14		16	
	approché	exact	approché	exact	approché	exact
2	0.132D-01	0.132D-01	0.617D-02	0.619D-02	0.410D-02	0.412D-02
4	0.367D+00	0.359D+00	0.643D+00	0.629D+00	0.113D+01	0.111D+01
6	0.986D+01	0.973D+01	0.638D+02	0.638D+02	0.298D+03	0.302D+03
8	0.266D+03	0.264D+03	0.645D+04	0.647D+04	0.806D+05	0.816D+05
10	0.714D+04	0.715D+04	0.652D+06	0.657D+06	0.217D+08	0.220D+08

tableau 2

La méthode de Gauss-Galerkin approche donc avec suffisamment de précision les moments de la loi exacte , malgré l'évolution rapide de celle-ci.

□

**Exemple 3**

Dans cet exemple nous allons construire, à partir d'un processus d'Orstein-Uhlenbeck (cf. exemple 1), une solution d'une équation non linéaire dont nous connaissons la loi. On considère le processus  $X_t = \exp\{Y_t\}$ , où  $Y_t$  est donné par:

$$dY_t = -\alpha Y_t dt + \beta dW_t, \quad 0 \leq t \leq T, \quad Y_0 = y_0.$$

On peut vérifier, en utilisant la formule de Itô et le fait que  $Y_t = \text{Log}\{X_t\}$ , que  $X$  est solution de l'équation différentielle stochastique non linéaire:

$$dX_t = \left\{ \frac{1}{2} \beta^2 - \alpha \text{Log} X_t \right\} X_t dt + \beta X_t dW_t, \quad X_0 = \exp\{y_0\}$$

Par ailleurs les moments de  $X_t$  sont facilement calculables car  $Y_t$  suit une loi normale  $N(\mu_t, \sigma_t^2)$  avec:

$$\mu_t = y_0 e^{-\alpha t}, \quad \sigma_t^2 = \frac{\beta^2}{2\alpha} \{1 - e^{-2\alpha t}\}.$$

Ainsi  $X_t$  suit une loi Log-normale et,

$$(\Delta) \quad E\{X_t^p\} = \exp\left\{ p y_0 e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} p^2 \frac{\beta^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \right\}$$

Dans le tableau 3 on présente les moments de la loi approchée et les moments exacts donnés par ( $\Delta$ ). Les paramètres sont:

- \*  $\alpha = 0.5$ ,  $\beta = 0.5$ ,  $x_0 = \exp(y_0) = 1$ ,  $T = 20$  ;
- \* Nombre de points et poids de Gauss : 16 ;
- \* Pas d'incrémentations : 0.05

t	moment d'ordre					
	1		4		8	
	approché	exact	approché	exact	approché	exact
0.4	0.104D+01	0.104D+01	0.194D+01	0.193D+01	0.139D+02	0.139D+02
1.2	0.108D+01	0.109D+01	0.405D+01	0.404D+01	0.267D+03	0.267D+03
2	0.111D+01	0.111D+00	0.561D+01	0.564D+01	0.101D+04	0.101D+04
3.2	0.112D+01	0.112D+01	0.679D+01	0.681D+01	0.214D+04	0.215D+04
4	0.113D+01	0.113D+00	0.714D+01	0.712D+01	0.257D+04	0.257D+04
6	0.113D+01	0.113D+00	0.738D+01	0.735D+01	0.291D+04	0.292D+04
8	0.113D+01	0.113D+00	0.740D+01	0.738D+01	0.301D+04	0.297D+04
20	0.114D+01	0.113D+00	0.745D+01	0.739D+01	0.300D+04	0.298D+04

	10		13		16	
	approché	exact	approché	exact	approché	exact
0.4	0.588D+02	0.616D+02	0.920D+03	0.105D+04	0.173D+05	0.381D+05
1.2	0.614D+04	0.621D+04	0.239D+07	0.257D+07	0.384D+10	0.514D+10
2	0.495D+05	0.494D+05	0.850D+08	0.857D+08	0.101D+13	0.103D+13
3.2	0.162D+06	0.161D+06	0.636D+09	0.631D+09	0.213D+14	0.214D+09
4	0.214D+06	0.213D+06	0.103D+10	0.101D+10	0.442D+14	0.439D+14
6	0.258D+06	0.260D+06	0.141D+10	0.141D+10	0.722D+14	0.729D+14
8	0.272D+06	0.267D+06	0.149D+10	0.148D+10	0.775D+14	0.781D+14
20	0.270D+06	0.268D+06	0.150D+10	0.150D+10	0.792D+14	0.790D+14

tableau 3

□

## 4.2 Approximation de l'Equation de Zakai

Nous allons tester la méthode de Gauss-Galerkin sur un exemple linéaire où l'on dispose du filtre de Kalman-Bucy pour calculer la loi conditionnelle exacte. Nous présentons aussi un cas non linéaire pour lequel il existe un meilleur filtre linéaire. Après discrétisation en temps, les processus ont été simulés sur ordinateur à l'aide de la fonction RANDU, qui permet de simuler des suites de bruits blancs.

**Exemple 1** On considère le système linéaire:

$$(\Delta) \quad \begin{cases} dX_t = -X_t dt + dW_t, & X_0 = 0; \\ dY_t = 2X_t dt + dV_t, & Y_0 = 0. \end{cases}$$

On utilise un filtre de Kalman-Bucy afin de calculer  $\eta_t$  la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\{Y_s; s \leq t\}$ . Nous calculons ensuite,  $\tilde{\eta}_t$  l'approximation de Gauss-Galerkin à 8 points et poids de  $\eta_t$ .

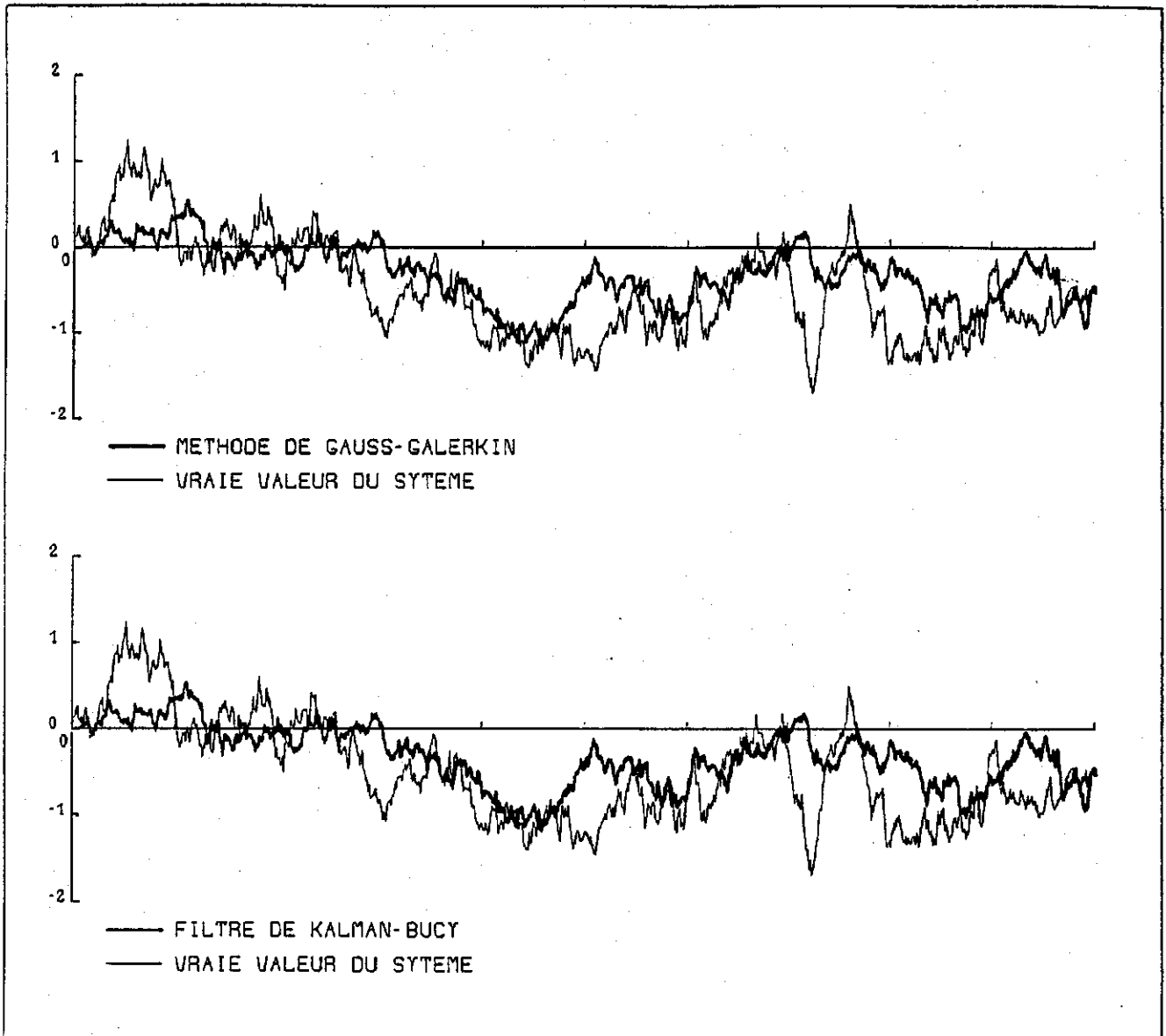
Dans la figure 1 sont reportées  $t \rightarrow X_t$ , ainsi que les courbes des estimateurs:

$$* \quad t \rightarrow \hat{X}_t := \int x \eta_t(dx) \quad \text{donné par le filtre de Kalman-Bucy};$$

$$* \quad t \rightarrow \tilde{X}_t := \int x \tilde{\eta}_t(dx) \quad \text{donné par la méthode de Gauss-Galerkin}.$$

On peut voir d'après ces courbes que les deux estimateurs sont identiques.



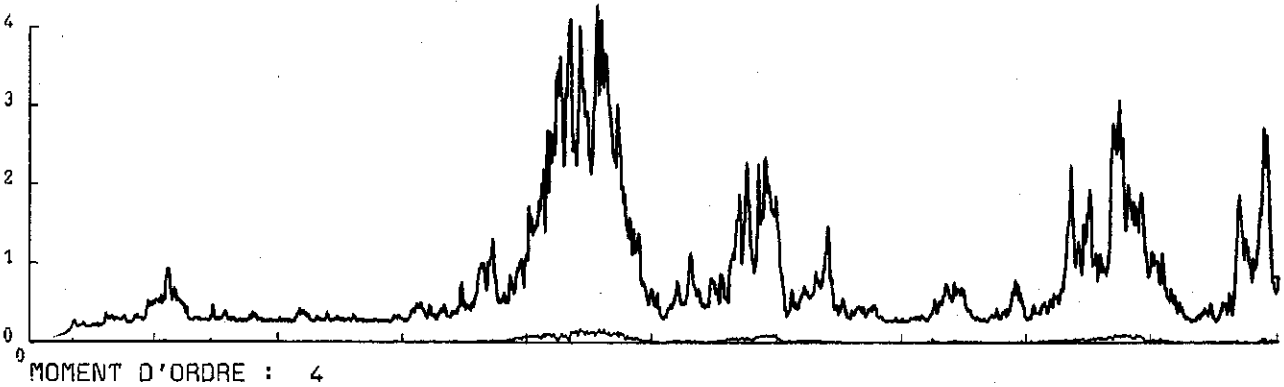
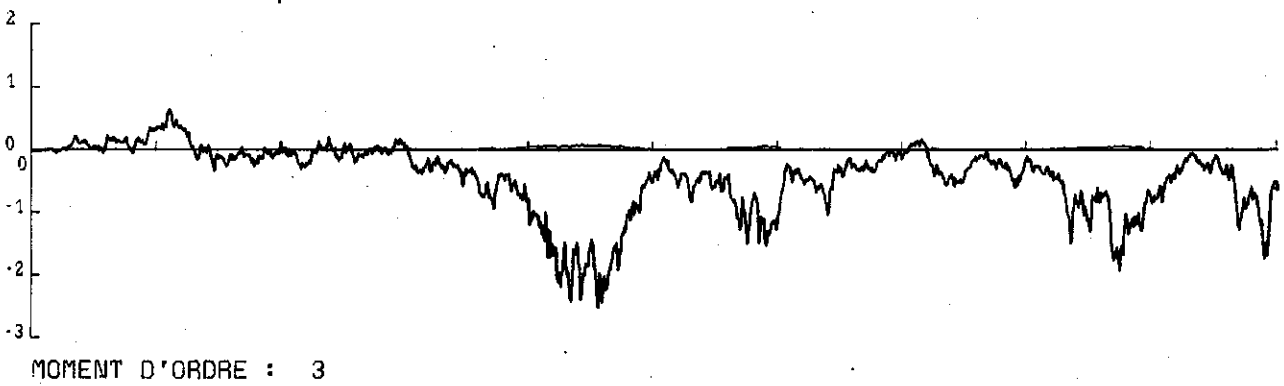
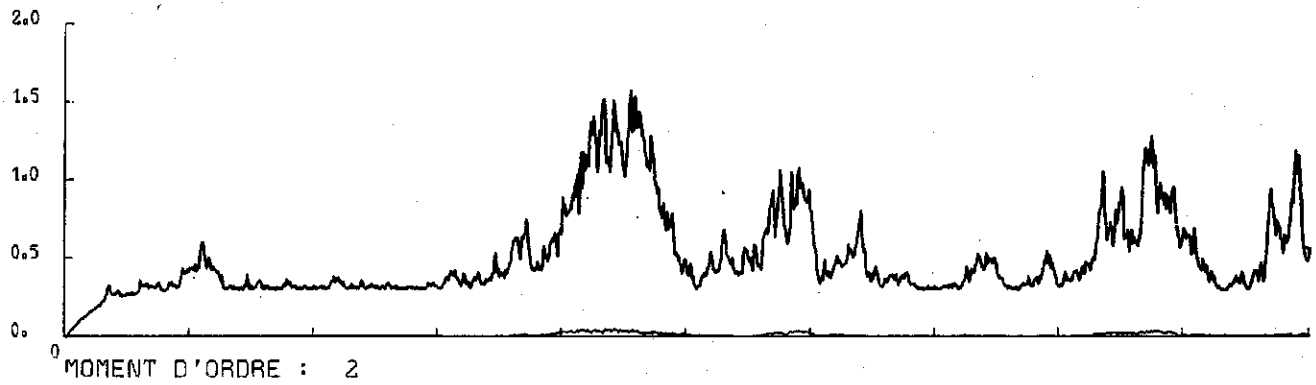
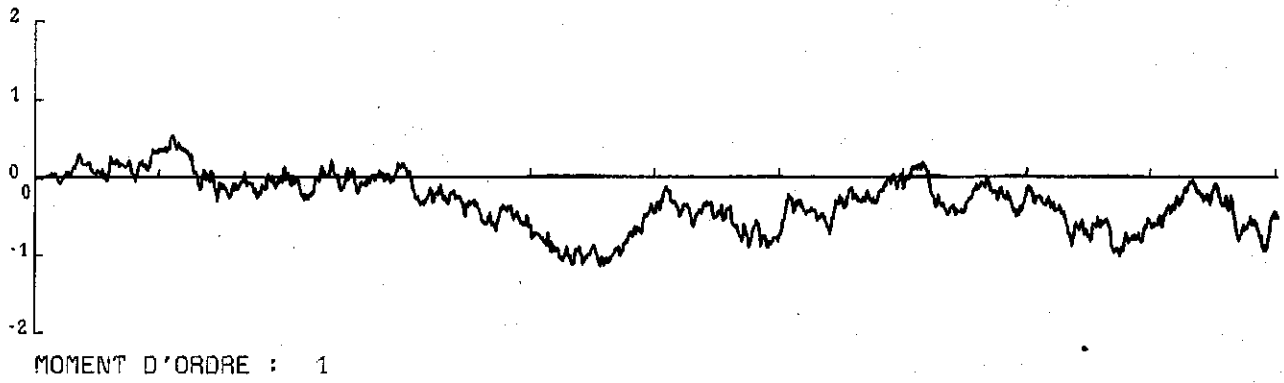
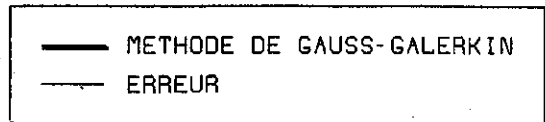


*figure 1*

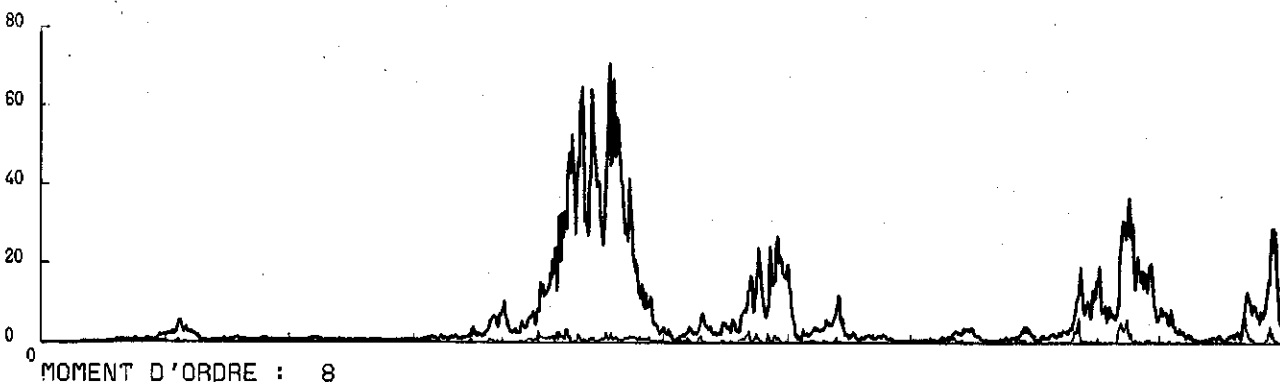
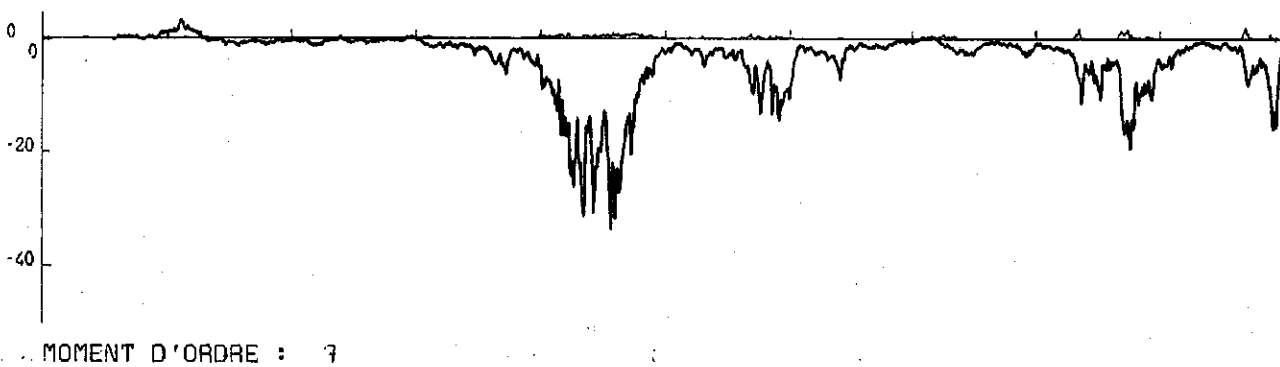
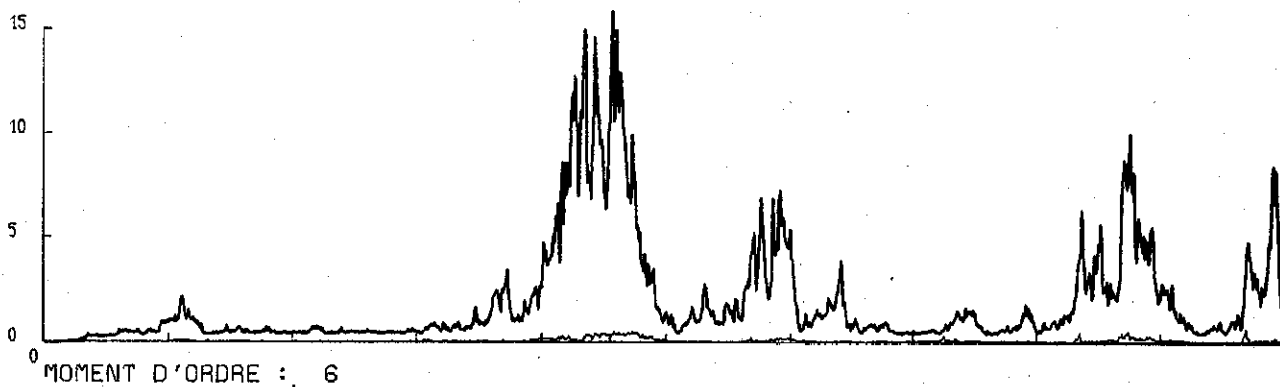
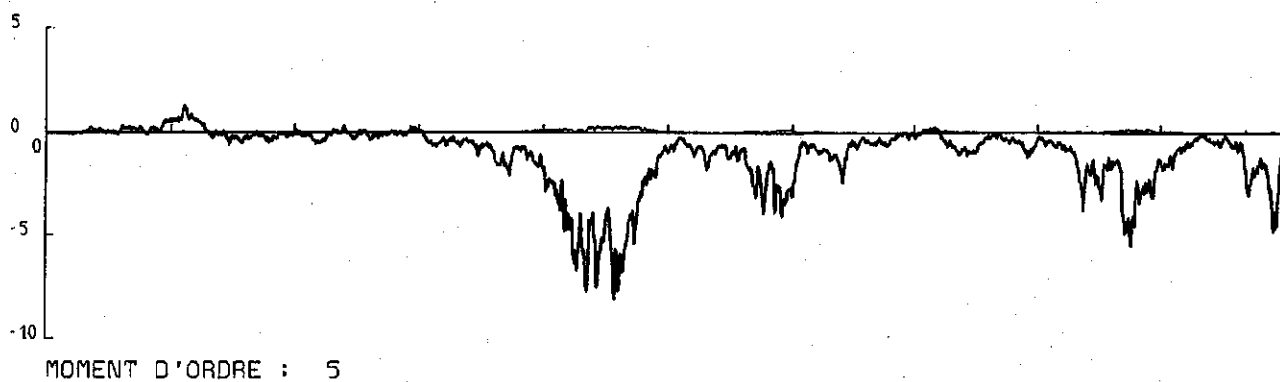
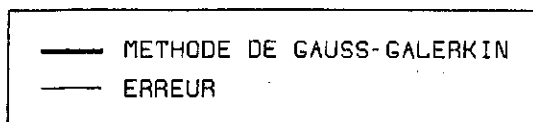
Dans les figures 2 et 3 sont reportées, pour  $p=1,2,\dots,8$ , les courbes:

- \*  $t \rightarrow \int x^p \tilde{\eta}_t(dx)$  , le moment d'ordre  $p$  de  $\tilde{\eta}_t$  ;
- \*  $t \rightarrow \left| \int x^p \eta_t(dx) - \int x^p \tilde{\eta}_t(dx) \right|$  l'erreur commise par rapport au filtre de Kalman-Bucy .

Là aussi l'erreur reste minime. □



*figure 2*



*figure 3*

Exemple 2 On considère le système suivant:

$$(\Delta) \quad \left\{ \begin{array}{l} dX_t = A X_t dt + B X_t dW_t, \quad X_0 = x_0, \\ dY_t = H X_t dt + dV_t, \quad Y_0 = 0. \end{array} \right. \quad 0 \leq t \leq T,$$

Pour ce problème de filtrage non linéaire, on ne connaît pas la forme explicite (calculable) de  $\eta_t$ , la loi conditionnelle de  $X_t$  sachant  $\{Y_s; s \leq t\}$ . Par contre il existe un meilleur filtre linéaire. Posons  $Q(t) = EX_t^2$ , comme la loi de  $X_t$  est connue (cf. section 4.1 exemple 2),  $t \rightarrow Q(t)$  est une application bien définie. On peut alors vérifier que:

$$(\Delta\Delta) \quad dX_t = A X_t dt + B \sqrt{Q(t)} dM_t$$

$$\text{où} \quad M_t := \int_0^t \frac{X_s}{\sqrt{Q(s)}} dW_s$$

$M$  est une martingale et  $E(M_t - M_s)^2 = t - s$ , mais il ne s'agit pas d'un processus de Wiener car  $\{M_t^2 - t\}$  n'est pas une martingale. Supposons que  $M$  soit un processus de Wiener, et appliquons le filtre de Kalman-Bucy pour le système:

$$\left\{ \begin{array}{l} dX_t = A X_t dt + B \sqrt{Q(t)} dM_t, \quad X_0 = x_0, \\ dY_t = H X_t dt + dV_t, \quad Y_0 = 0. \end{array} \right.$$

On obtient ainsi le meilleur filtre linéaire pour le système  $(\Delta)$ . Notons  $\bar{\eta}_t$  la loi conditionnelle obtenue par ce filtre.

Nous avons calculé  $\bar{\eta}_t$  l'approximation de Gauss-Galerkin de  $\eta_t$  pour l'exemple suivant:

- \*  $A = -0.1$ ,  $B = 0.1$ ,  $H = 1$ ,  $x_0 = 2$ ,  $T = 20$  ;
- \* Nombre de points et poids de Gauss : 6 ;
- \* Pas d'incrémentations : 0.025 .

Dans la figure 4 sont reportées  $t \rightarrow X_t$  et les courbes :

\*  $t \rightarrow \bar{X}_t := \int x \bar{\eta}_t(dx)$  , l'estimateur donné par le meilleur filtre linéaire ;

\*  $t \rightarrow \tilde{X}_t := \int x \tilde{\eta}_t(dx)$  , l'estimateur donné par la méthode Gauss-Galerkin .

Les exemples ont montré que la méthode de Gauss-Galerkin se comporte mieux que le "meilleur" filtre linéaire. Sur certains exemples ce dernier est instable (grandes fluctuations autour d'une valeur moyenne) alors que la méthode de Gauss-galerkin a un comportement plus satisfaisant.

□

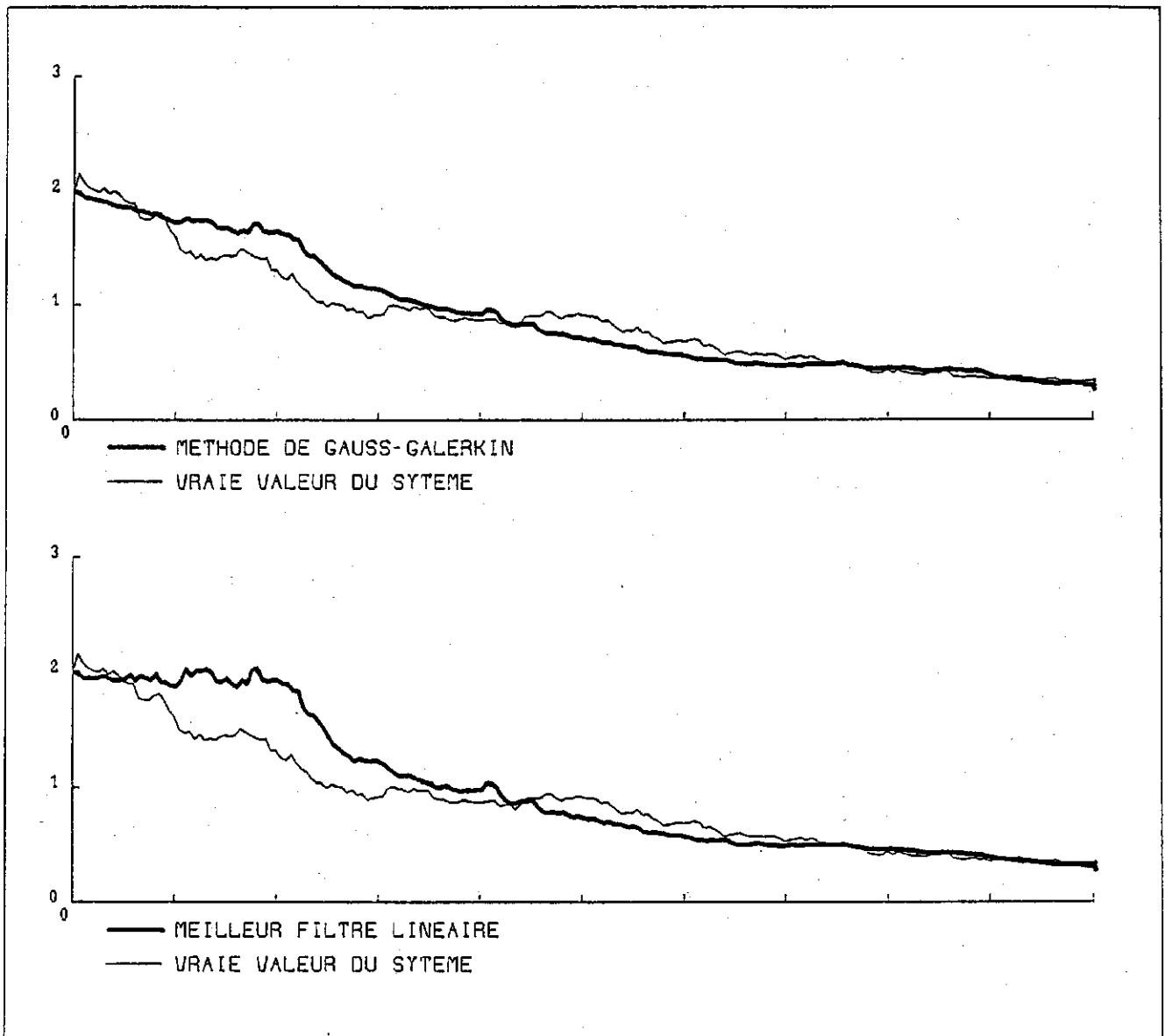


figure 4

## CONCLUSION

Cette méthode comporte deux inconvénients majeurs : D'une part elle est limitée au cas de la dimension 1 ; d'autre part elle devient très vite instable dès que l'on veut augmenter le nombres de points de Gauss.

En revanche nous nous sommes aperçus que la méthode donne des résultats intéressants même pour un nombre faible de points de Gauss ( 2 ou 3 ). En ce sens cette méthode donne toute satisfaction par rapport aux objectifs initiaux, à savoir proposer une méthode simple dans son application. Du point de vue de la précision elle ne peut naturellement pas être comparée à des méthodes du type différences finies. Toutefois ces dernières ne peuvent pas donner de résultats significatifs pour un petit nombre de paramètres de calculs, et sont plus lourdes à mettre en œuvre.

□





## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. ARNOLD, **Stochastic Differential Equations : Theory and Applications**, J. Wiley (1974).
- [2] P. BILLINGSLEY, **Probability and Measure**, J. Wiley (1979).
- [3] L. BREIMAN, **Probability**, Addison-Wesley (1968).
- [4] D.A. DAWSON, Galerkin approximation of nonlinear Markov processes, in **Statistics & Related Topics**, M. CSÖRGO, D.A. DAWSON, J.N.K. RAO, A.K.Md. SALEH (eds.) North-Holland (1981).
- [5] B.S. GARBOW, J.M. BOYLE, J.J. DONGARA & C.B. BOYLER, **Matrix Eigen System Routines - EISPACK - Guide Extension**, Lecture Notes in Computer Science (1977).
- [6] W. GAUTSCHI, A survey of Gauss-Christoffel quadrature formulae, in E.B. Christoffel : the influence of his work in Mathematics and Physical Sciences, Internatinal Christoffel Symposium, eds. Birkhäuser, Basel (1981), 72-147.
- [7] W. GAUTSCHI, On generating orthogonal polynomials, **SIAM J. Sci. Stat. Comp.**, vol 3, n°3, (1982), 289-317.
- [8] G.H. GOLUB & J.H. WELSH, calculation of Gauss quadrature rules, **Math. Comp.**, 23 (1969), 221-230.
- [9] O.A. LADYZENSKAJA, V.A. SOLONNIKOV, N.N. URAL'CEVA, **Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type**, Amer. Math. Socie. (1968).
- [10] E. PARDOUX, Equations du filtrage non linéaire de la prédiction et du lissage, **Stochastics**, 6 (1982), 193-231.
- [11] J.A. SHOHAT & J.D. TAMARKIN, **The Problem of Moments**, Amer. Math. Socie. (1950).
- [12] D.W. STROCK, S.R.S. VARADHAN, **Multidimensional Diffusion Processes**, Springer Verlag (1979).
- [13] A.H. STROUD, **Numerical Quadrature and Solution of Ordinary Differential Equations**, Applied Mathematical Sciences 10, Springer Verlag (1974).
- [14] J.C. WHEELER, Modified moments and gaussian quadrature, **Rocky Montain J. Math.** , 4 (1974), 287-296.

