

**LA METHODE D'APPROXIMATION
DE GAUSS-GALERKIN
APPLICATION A L'EQUATION
DU FILTRAGE NON-LINEAIRE**

F. CAMPILLO

- Avertissement -

Outre le travail présenté dans ce mémoire, l'auteur a étudié dans le cadre de son stage de D.E.A. et exposé au groupe de travail de probabilités de l'université de Provence, l'article de B.Z. Bobrovsky & M. Zakai - *ASYMPTOTIC A-PRIORI ESTIMATES FOR THE ERROR IN THE NONLINEAR FILTERING PROBLEM (1980)* -. Cet article traite du comportement de l'erreur en moyenne quadratique pour le problème de filtrage non-linéaire, plus précisément des bornes asymptotiques supérieure & inférieure dans le cas où l'intensité du bruit d'observation tend vers 0.

PLAN

I. INTRODUCTION

II. PRESENTATION DE LA METHODE DE GAUSS-GALERKIN

1. rappels concernant la méthode de Gauss-Christoffel
2. présentation de l'équation de Fokker-Planck
3. présentation de l'approximation de Gauss-Galerkin

III. APPLICATION A L'EQUATION DU FILTRAGE NON-LINEAIRE

1. présentation du problème de filtrage non-linéaire
2. approximation de Gauss-Galerkin

IV. ETUDE NUMERIQUE

1. cas de l'équation de Fokker-Planck
2. cas de l'équation de Zakai

V. CONCLUSION

I - INTRODUCTION

Les méthodes habituelles de résolution numérique des équations aux dérivées partielles (méthodes des éléments finis ou différences finies) font généralement appel à un nombre important de points de discrétisation en espace. De plus, sous leur forme classique ces méthodes utilisent des grilles fixes dans le temps.

La méthode proposée par D. A. DAWSON [1], appelée méthode de Gauss - Galerkin (puisque'elle combine des éléments des méthodes de quadrature de Gauss et d'approximation de Galerkin) permet de pallier à ces deux défauts, à savoir d'une part un nombre élevé d'inconnues à calculer et d'autre part une grille ne pouvant pas "suivre" l'évolution de la solution. Néanmoins on se limite au cas d'un espace à une seule dimension.

Le but de ce mémoire est d'étudier le comportement de cette méthode appliquée à l'équation du filtrage non-linéaire - dite équation de Zakai - satisfaite par la densité conditionnelle non normalisée d'un processus de diffusion. Toutefois avant de s'intéresser à cette équation aux dérivées partielles stochastique, on introduira la méthode en l'appliquant à une équation aux dérivées partielles déterministe - dite équation de Fokker-Planck - satisfaite par la densité de probabilité d'un processus de diffusion.

II. PRESENTATION DE LA METHODE DE GAUSS-GALERKIN

1. Rappels concernant la méthode de Gauss-Christoffel

Le problème consiste à approcher une loi de probabilité dont les moments sont donnés. Dans beaucoup de cas on est intéressé par le calcul de certaines espérances, il est donc souhaitable qu'une méthode d'approximation des lois de probabilité se situe dans le cadre des formules de quadrature numérique.

Soient n un entier fixé et μ la loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle possédant $2n-1$ premiers moments finis. Il s'agit de déterminer des points $x^i, i=1 \dots n$, et des poids $a^i, i=1 \dots n$, tels que

$$(1.1) \quad \mu^n \triangleq \sum_{i=1}^n a^i \delta_{x^i}$$

vérifie :

$$(1.2) \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mu(dx) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mu^n dx \quad \forall \varphi \in \mathbb{P}_{2n-1},$$

où \mathbb{P}_{2n-1} désigne l'espace des polynômes de degré au plus $2n-1$. μ^n est appelée l'approximation de Gauss-Christoffel à n points de μ .

Les résultats⁽¹⁾ d'existence et d'unicité concernant cette approximation sont les suivants :

- (i) soit $\{P_i(x)\}_{i \in \mathbb{N}}$ la famille des polynômes orthogonaux relativement à la mesure μ , c'est à dire, $\forall i, P_i(x)$ est un polynôme de degré i , et

$$\int_{\mathbb{R}} P_i(x) P_j(x) \mu(dx) = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

(1) il ne s'agit bien sûr que d'un bref rappel, les résultats concernant ces méthodes de quadrature de Gauss sont par exemple détaillés dans A.H. STROUD [2]

les zéros du polynôme $P_n(x)$ sont les n points x^i (on montre que $P_n(x)$ admet n racines réelles distincts);

(ii) les poids a^i sont déterminés de manière unique en résolvant le système linéaire de n équations à n inconnues (obtenu à partir de (1.2)):

(1.3)

$$\sum_{i=1}^n a^i \varphi_m(x^i) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_m(x) \mu(dx) \quad m=1 \dots n$$

où $\{\varphi_m\}$ désigne une base de P_{n-1} (espace des polynômes de degré au plus $n-1$)

remarque 1: on montre que les coefficients a^i ainsi obtenus sont tous positifs comme par ailleurs l'équation (1.3) avec $\varphi(x) \equiv 1$ donne: $\sum_{i=1}^n a^i = 1$, on en déduit une propriété intéressante: μ^n définie en (1.1) est une mesure de probabilité.

remarque 2: les points (i) et (ii) donnent aussi la démarche pratique du calcul qui est:

1. calcul des coefficients du polynôme $P_n(x)$;
2. calcul des points x^i en cherchant les zéros du polynôme $P_n(x)$;
3. calcul des poids a^i en résolvant le système linéaire (1.3).

Cette procédure peut toujours être mise en œuvre numériquement pour calculer l'approximation d'une loi μ donnée. Toutefois pour certains cas particuliers de loi μ , le calcul précédent peut être évité, par exemple:

* si μ est une loi de Gauss $N(\mu, \sigma^2)$, on utilise les formules de quadrature de Gauss-Hermite. En effet les polynômes d'Hermite sont la famille de polynômes définis sur $]-\infty, \infty[$ orthogonaux relativement à la fonction poids $w(x) = e^{-x^2}$ et donc, par une transformation affine, on en déduit les polynômes orthogonaux relativement à la fonction poids $\tilde{w}(x) = \exp\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\} / \sqrt{2\pi\sigma^2}$.

* si μ est une loi uniforme sur $[a, b]$ - avec le même raisonnement - on se ramène aux formules de quadrature de Gauss-Legendre (les polynômes de Legendre sont la famille des polynômes définis sur $[-1, 1]$, orthogonaux relativement à la fonction poids $w(x) \equiv 1$).

2. Présentation de l'équation de Fokker-Planck

Considérons l'équation différentielle stochastique:

$$(2.1) \quad dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \quad (t \geq 0)$$

de condition initiale X_0 indépendante du processus de

Wiener standard $\{W_t\}$. On suppose $\{W_t\}$ & $\{X_t\}$ à valeurs dans \mathbb{R} . Sous des hypothèses adéquates sur b, σ et X_0 on montre que (2.1) admet une solution $\{X_t\}$ unique dans une certaine classe de processus. Soit L l'opérateur aux dérivées partielles défini par :

$$L = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{d^2}{dx^2} + b \frac{d}{dx}$$

L est appelé générateur infinitésimal du processus $\{X_t\}$ solution de (2.1). D'après la formule de Ito :

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t L\varphi(X_s) ds + \int_0^t \varphi'(X_s) \sigma(X_s) dW_s, \quad \forall \varphi \in C_K^2(\mathbb{R})$$

en prenant l'espérance dans cette expression, par propriété de martingale de l'intégrale stochastique de Ito, on a

$$(2.2) \quad E\varphi(X_t) = E\varphi(X_0) + E \int_0^t L\varphi(X_s) ds = E\varphi(X_0) + \int_0^t E L\varphi(X_s) ds$$

Notons μ_t la loi de X_t et $\langle \mu_t, \varphi \rangle \triangleq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mu_t(dx)$, on déduit de (2.2) l'équation suivante :

$$(2.3) \quad \frac{d}{dt} \langle \mu_t, \varphi \rangle = \langle \mu_t, L\varphi \rangle \quad \forall \varphi \in C_K^2$$

Supposons que la loi de probabilité de la variable aléatoire X_0 admette une densité et considérons l'équation aux dérivées partielles suivante - dite équation de Fokker-Planck - :

$$(2.4) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} p(t, x) = L^* p(t, x) & t > 0 \\ p(0, x) = p_0(x) \end{cases}$$

(où L^* désigne l'adjoint de L). On montre que sous certaines conditions sur b & σ , (2.4) admet une solution $\{p(t, x); t \geq 0\}$ et que de plus, par l'intermédiaire de (2.3), pour tout t fixé $p(t, x)$ est la densité de la loi de X_t .

(Tous les résultats de cette section sont développés dans E. PARDOUX [3].)

3. Présentation de l'approximation de Gauss-Galerkin

Considérons l'équation de Fokker-Planck sous sa forme faible:

$$(3.1) \quad \frac{d}{dt} (p(t), \varphi) = (p(t), L\varphi), \quad \forall \varphi \in C_b^2(\mathbb{R})$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire de $L^2(\mathbb{R})$. Par analogie avec la méthode de Gauss-Christoffel, la méthode de Gauss-Galerkin consiste à déterminer des points $x^i(t)$, $i=1 \dots n$, et des poids $a^i(t)$, $i=1 \dots n$, (fonctions du temps) tels que la mesure définie par :

$$(3.2) \quad P_n(t) = \sum_{i=1}^n a^i(t) \delta_{x^i(t)}$$

vérifie:

$$(3.3) \quad \frac{d}{dt} (P_n(t), \varphi) = (P_n(t), L\varphi), \quad \forall \varphi \in P_{2n-1}$$

Soit $\{\varphi_m\}_{m=1 \dots 2n}$ une base de P_{2n-1} , les équations de Galerkin pour les abscisses $\{x^i(t)\}$ et les poids $\{a^i(t)\}$ sont donc:

$$(3.4) \quad \frac{d}{dt} \left\{ \sum_{i=1}^n a^i(t) \varphi_m(x^i(t)) \right\} = \sum_{i=1}^n a^i(t) L\varphi_m(x^i(t)), \quad m=1 \dots 2n$$

qui est un système de $2n$ équations différentielles pour $2n$ fonctions inconnues $\{x^i(t), a^i(t); i=1 \dots n\}$. Posons:

$$x^T = (x^1 \ x^2 \ \dots \ x^n) \quad a^T = (a^1 \ a^2 \ \dots \ a^n)$$

$$A_{11} = \begin{bmatrix} \varphi_1(x^1) & \varphi_1(x^2) & \dots & \varphi_1(x^n) \\ \varphi_2(x^1) & \varphi_2(x^2) & \dots & \varphi_2(x^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_n(x^1) & \varphi_n(x^2) & \dots & \varphi_n(x^n) \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = \begin{bmatrix} \varphi'_1(x^1) & \varphi'_1(x^2) & \dots & \varphi'_1(x^n) \\ \varphi'_2(x^1) & \varphi'_2(x^2) & \dots & \varphi'_2(x^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_n(x^1) & \varphi'_n(x^2) & \dots & \varphi'_n(x^n) \end{bmatrix}$$

$$A_{21} = \begin{bmatrix} \varphi_{n+1}(x^1) & \varphi_{n+1}(x^2) & \dots & \varphi_{n+1}(x^n) \\ \varphi_{n+2}(x^1) & \varphi_{n+2}(x^2) & \dots & \varphi_{n+2}(x^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{2n}(x^1) & \varphi_{2n}(x^2) & \dots & \varphi_{2n}(x^n) \end{bmatrix} \quad A_{22} = \begin{bmatrix} \varphi'_{n+1}(x^1) & \varphi'_{n+1}(x^2) & \dots & \varphi'_{n+1}(x^n) \\ \varphi'_{n+2}(x^1) & \varphi'_{n+2}(x^2) & \dots & \varphi'_{n+2}(x^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi'_{2n}(x^1) & \varphi'_{2n}(x^2) & \dots & \varphi'_{2n}(x^n) \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} L\varphi_1(x^1) & L\varphi_1(x^2) & \dots & L\varphi_1(x^n) \\ L\varphi_2(x^1) & L\varphi_2(x^2) & \dots & L\varphi_2(x^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L\varphi_n(x^1) & L\varphi_n(x^2) & \dots & L\varphi_n(x^n) \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} L\varphi_{n+1}(x^1) & L\varphi_{n+1}(x^2) & \dots & L\varphi_{n+1}(x^n) \\ L\varphi_{n+2}(x^1) & L\varphi_{n+2}(x^2) & \dots & L\varphi_{n+2}(x^n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L\varphi_{2n}(x^1) & L\varphi_{2n}(x^2) & \dots & L\varphi_{2n}(x^n) \end{bmatrix}$$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} a^1 & & & \\ & a^2 & & (0) \\ & & \ddots & \\ & (0) & & a^n \end{bmatrix}$$

Le système (3.4) s'écrit donc :

$$(3.5) \quad \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I & (0) \\ (0) & \tilde{A} \end{bmatrix} \times \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a \\ x \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \times a$$

posons

$$(3.6) \quad \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} I & (0) \\ (0) & \tilde{A} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}^{-1} \times \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} \times a$$

on peut calculer explicitement F_1 & F_2 :

$$\begin{cases} F_1 = A_{11}^{-1} \{ B_1 - A_{12} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} (B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1) \} a \\ F_2 = \tilde{A}^{-1} (A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12})^{-1} (B_2 - A_{21} A_{11}^{-1} B_1) a \end{cases}$$

(3.5) s'écrit donc :

$$(3.7) \quad \begin{cases} \frac{d}{dt} a(t) = F_1(a(t), x(t)) \\ \frac{d}{dt} x(t) = F_2(a(t), x(t)) \end{cases}$$

L'approximation de Gauss-Galerkin est obtenue en résolvant numériquement le système d'équations différentielles (3.7).

remarque 1: les matrices $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1$ & B_2 ne dépendent que des points $\{x^i(t)\}$. L'équation des poids est linéaire en $a(t)$ et non-linéaire en $x(t)$. L'équation des points est non-linéaire en $a(t)$ et $x(t)$ ■

remarque 2: l'approximation de Gauss-Galerkin p_n vérifie à l'instant $t=0$:

$$(p_n(0), \varphi) = (p_0, \varphi) \quad \forall \varphi \in P_{2n-1}$$

ainsi $\{x_0^i, a_0^i; i=1 \dots n\}$ les conditions initiales des fonctions $\{x^i(t), a^i(t); i=1 \dots n\}$ solutions de (3.7), ne sont autres que les points et les poids de l'approximation de Gauss-Christoffel de p_0 . Cette remarque justifie l'introduction de la méthode de Gauss-Christoffel dans ce mémoire ■

remarque 3: Soient $\{p(t, x); t \geq 0\}$ la famille densités solution de (3.1) et $\{p_n(t, x); t \geq 0\}$ son approximation de Gauss-Galerkin à n points. Pour tout t fixe notons $p_n^*(t, x)$ l'approximation de Gauss-Christoffel à n points de la densité $p(t, x)$. En général $p_n(t, x)$ & $p_n^*(t, x)$ ne coïncident pas. En effet notons:

$$E_t^*(\varphi) \triangleq (p(t), \varphi) - (p_n^*(t), \varphi)$$

par définition de $p_n^*(t, x)$:

$$E_t^*(\varphi) = 0, \quad \forall \varphi \in P_{2n-1}, \quad \forall t \geq 0$$

comme par ailleurs:

$$(p(t), \varphi) = (p_0, \varphi) + \int_0^t (p(s), L\varphi) ds$$

on en déduit:

$$(p_n^*(t), \varphi) = (p_0, \varphi) + \int_0^t \{(p_n^*(s), L\varphi) + E_s^*(L\varphi)\} ds, \quad \forall \varphi \in P_{2n-1}.$$

En général pour $\varphi \in P_{2n-1}$, $L\varphi \notin P_{2n-1}$, on n'a donc pas nécessairement $E_s^*(L\varphi) = 0$ ($\forall s$), d'où $p_n^*(t, x)$ n'est pas solution de (3.3) (i.e. $p_n^* = p_n$). Ainsi une condition suffisante pour que $p_n^* \equiv p_n$ est:

$$(3.8) \quad \forall \varphi: \varphi \in P_{2n-1} \implies L\varphi \in P_{2n-1}$$

Supposons (3.8) satisfaite. Si $EX_0^{2n} < \infty$ alors $E|X_t|^p < \infty \quad \forall p=0 \dots 2n \quad \forall t \geq 0$, et on déduit immédiatement de (3.1) que:

$$\frac{d}{dt} EX_t^p = E L \phi_p(X_t) \quad p=0 \dots 2n-1$$

où $\phi_p(x) = x^p$. D'après l'hypothèse (3.8) $E L \phi_p(X_t)$ peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des $2n-1$ premiers moments de X_t . Ainsi EX_t, \dots, EX_t^{2n-1} ne dépendent pas des moments d'ordre supérieur, on dit que la "hiérarchie des moments" de X_t est fermée.

Noter qu'une condition suffisante pour que (3.8) soit satisfaite est que $b(x)$ soit une fonction linéaire de x et $\sigma^2(x)$ une fonction quadratique de x . ■

III . APPLICATION A L'EQUATION DU FILTRAGE NON-LINEAIRE

1. Présentation du problème de filtrage non-linéaire.

Soit $\{X_t\}_{t \geq 0}$ le processus stochastique à valeurs dans \mathbb{R} solution de l'équation différentielle stochastique suivante:

(1.1)
$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t$$

$\{X_t\}$ décrit un système non observé qui évolue au cours du temps. On dispose d'une observation y_s de la forme:

$$y_s = h(X_s) + B_s$$

où B_s est un bruit de mesure. On suppose que B_s est un bruit blanc, c'est à dire (formellement) $B_s = d\overline{W}_s/ds$ où $\{\overline{W}_s\}$ est un processus de Wiener standard. Le problème de filtrage non-linéaire consiste à estimer X_t - ou plus généralement $\varphi(X_t)$ - au vu de l'observation faite jusqu'à l'instant t c'est à dire de $\{y_s; 0 \leq s \leq t\}$. Posons

$$Y_t \triangleq \int_0^t y_s ds = \int_0^t h(X_s) ds + \overline{W}_t$$

l'information contenue dans $\{y_s; 0 \leq s \leq t\}$ est équivalente à celle contenue dans $\{Y_s; 0 \leq s \leq t\}$. Cette information est donnée par $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s; 0 \leq s \leq t)$. L'estimateur de $\varphi(X_t)$ sachant \mathcal{F}_t qui minimise le risque quadratique est par définition:

$$E[\varphi(X_t) / \mathcal{F}_t]$$

que l'on calcule en déterminant la loi conditionnelle de X_t sachant \mathcal{F}_t .

Les équations sont donc :

$$(1.2) \quad \begin{cases} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t, \\ dY_t = h(X_t) dt + d\bar{W}_t. \end{cases}$$

On suppose :

- (i) $Y_t, h(\cdot), \bar{W}_t$ à valeurs dans \mathbb{R}^m ;
- (ii) $\{\bar{W}_t\}$ & $\{W_t\}$ indépendants.

Considérons l'équation :

$$(1.3) \quad \begin{cases} dp(t, x) = L^* p(t, x) dt + h^T(x) p(t, x) dY_t \\ p(0, x) = p_0(x) \end{cases}$$

où $p_0(x)$ est la densité de la loi de X_0 , L^* l'adjoint de l'opérateur infinitésimal du processus $\{X_t\}$ et $h^T(x)$ le transposé de $h(x)$. (1.3) est une équation aux dérivées partielles stochastique de condition initiale déterministe p_0 , appelée équation de Zakai.

Sous des hypothèses ad hoc, (1.3) admet une solution unique $p(t, x, \omega)$ et de plus cette solution vérifie :

$$E(\varphi(X_t) / \mathcal{F}_t) = \frac{\int_{\mathbb{R}} \varphi(x) p(t, x) dx}{\int_{\mathbb{R}} p(t, x) dx}$$

pour toute fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. $p(t, x)$ est appelée la densité conditionnelle non normalisée. Ainsi :

$$q(t, x) \triangleq \frac{p(t, x)}{\int_{\mathbb{R}} p(t, x) dx}$$

est la densité de la loi conditionnelle de X_t sachant \mathcal{F}_t .

(On trouvera dans E. PARDOUX [3] un exposé plus détaillé du problème de filtrage linéaire, ainsi qu'une bibliographie s'y rapportant.)

2. Approximation de Gauss-Galerkin

Par analogie avec la section II.2, nous allons approximer $p(t, x)$ solution de (1.3) par $p_n(t, x)$ de la forme:

$$P_n(t, x) = \sum_{i=1}^n a_t^i \delta x_t^i$$

où les points x_t^i et les poids a_t^i ne sont plus des fonctions du temps mais des processus aléatoires. Il s'agit d'établir les équations dont $\{x_t^i\}$ et $\{a_t^i\}$, $i=1, \dots, n$, sont solutions.

Auparavant nous allons traduire l'E.D.P.S. (1.3) (écrite "au sens de Ito") "au sens de Stratonovitch". En effet le calcul différentiel défini par l'intégrale stochastique de Stratonovitch respecte les règles du calcul différentiel ordinaire (en particulier la règle de dérivation des fonctions composées).

notation: notons $\int_0^t \cdot dV_s$ l'intégrale stochastique de Ito et $\int_0^t \cdot \circ dV_s$ celle de Stratonovitch. Ainsi :

$$dX_t = \varphi_t dt + \psi_t dV_t \quad \text{signifie} \quad X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \psi_s dV_s, \text{ et}$$

$$dX_t = \varphi_t dt + \psi_t \circ dV_t \quad \text{signifie} \quad X_t = X_0 + \int_0^t \varphi_s ds + \int_0^t \psi_s \circ dV_s \quad \blacksquare$$

règle de conversion Ito \leftrightarrow Stratonovitch :

considérons l'équation (de Ito) suivante:

$$(2.1) \quad d\xi_t = f(\xi_t) dt + G(\xi_t) d\beta_t$$

où $\{\xi_t\}$ est à valeurs dans \mathbb{R}^n , $\{\beta_t\}$ est un processus de Wiener standard à valeurs dans \mathbb{R}^m , $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $G: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$.

Notons $|f| = (f^T f)^{1/2}$ et $|G| = (\text{Tr } G^T G)^{1/2}$. On suppose:

- $|f(x)|^2 + |G(x)|^2 \leq K(1 + |x|^2)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$;
- $|f(x) - f(y)| + |G(x) - G(y)| \leq K|x - y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$;
- G admet des dérivées $\partial G(x) / \partial x_j$ ($j=1, \dots, n$) continues.

Alors l'équation (2.1) est équivalente (au sens de la coïncidence des solutions) à l'équation (de Stratonovitch) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi_t^i = \left\{ f^i(\xi_t) dt - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m G_{kj}(\xi_t) \frac{dG_{ij}(\xi_t)}{d\alpha_k} \right\} dt + G^i(\xi_t) d\beta_t \\ i=1 \dots n \end{array} \right.$$

où ξ_t^i , f^i sont les i èmes composantes de ξ_t , f , et G^i est la i ème ligne de G .

Inversement l'équation (de Stratonovitch) suivante:

$$d\xi_t = f(\xi_t) dt + G(\xi_t) d\beta_t$$

est équivalente à l'équation (de Ito):

$$\left\{ \begin{array}{l} d\xi_t^i = \left\{ f^i(\xi_t) dt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m G_{kj}(\xi_t) \frac{dG_{ij}(\xi_t)}{d\alpha_k} \right\} dt + G^i(\xi_t) d\beta_t \\ i=1 \dots n \end{array} \right.$$

L'équation de Zakai est :

$$dp(t) = L^* p(t) dt + h^T p(t) dY_t$$

d'après la formule de conversion Ito \leftrightarrow Stratonovitch, elle s'écrit donc (au sens de Stratonovitch):

$$dp(t) = \left\{ L^* p(t) - \frac{1}{2} h^T h p(t) \right\} dt + h^T p(t) dY_t$$

et sous forme faible:

$$\left\{ \begin{array}{l} d(p(t), \varphi) = (p(t), L\varphi - \frac{1}{2} h^T h \varphi) dt + (p(t), h^T \varphi) dY_t \\ \forall \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}) \end{array} \right.$$

Les équations de Galerkin pour les points x_t^i et les poids a_t^i s'obtiennent en posant :

$$\left\{ \begin{array}{l} d(p_n(t), \varphi_m) = (p_n(t), L\varphi_m - \frac{1}{2} h^T h \varphi_m) dt + (p_n(t), h^T \varphi_m) dY_t \\ m=1 \dots 2n \end{array} \right.$$

(où $\{\varphi_m\}_{m=1 \dots 2n}$ désigne une base de \mathcal{P}_{2n-1}). C'est à dire:

$$(2.2) \quad \left\{ \begin{array}{l} d\left[\sum_t a_t^i \varphi_m(x_t^i) \right] = \sum_t a_t^i L\varphi_m(x_t^i) + \sum_t a_t^i \varphi_m(x_t^i) \left(-\frac{1}{2} h^T h(x_t^i) dt + h^T(x_t^i) dY_t \right) \\ m=1 \dots 2n \end{array} \right.$$

On développe le premier terme de ces équations en utilisant les règles du calcul différentielle ordinaire - Ainsi en posant:

$$g = \begin{pmatrix} h^T h(x_t^1) \\ \vdots \\ h^T h(x_t^n) \end{pmatrix} \quad H = \begin{bmatrix} h^T(x_t^1) \\ \vdots \\ h^T(x_t^n) \end{bmatrix}$$

- $a, x, A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}, B_1, B_2, \tilde{A}$ étant définis comme en II.3 - (2.2) s'écrit:

$$\begin{cases} A_{11} da + A_{12} \tilde{A} dx = B_1 a dt + A_{11} \tilde{A} \left[-\frac{1}{2} g dt + H odY_t \right] \\ A_{21} da + A_{22} \tilde{A} dx = B_2 a dt + A_{21} \tilde{A} \left[-\frac{1}{2} g dt + H odY_t \right] \end{cases}$$

Après simplification et en définissant F_1 & F_2 comme en II.3, on trouve:

$$\begin{cases} da_t = F_1(a_t, x_t) dt + \tilde{A} \left[-\frac{1}{2} g dt + H odY_t \right] \\ dx_t = F_2(a_t, x_t) dt \end{cases}$$

La première de ces équations s'écrit aussi:

$$\begin{cases} da_t^i = [F_1(a_t, x_t)]^i dt + a_t^i \left[-\frac{1}{2} h^T h(x_t^i) dt + h^T(x_t^i) odY_t \right] \\ i=1 \dots n \end{cases}$$

On utilise la formule de conversion Ito \leftrightarrow Stratonovitch pour convertir ces équations au sens de Ito, on trouve:

$$\begin{cases} da_t^i = [F_1(a_t, x_t)]^i dt + a_t^i h^T(x_t^i) dY_t \\ i=1 \dots n \end{cases}$$

Les équations de Galerkin pour les points $x_t^i, i=1 \dots n$, et les poids $a_t^i, i=1 \dots n$, sont donc:

$$\begin{cases} da_t = F_1(a_t, x_t) dt + \tilde{A} H dY_t \\ dx_t = F_2(a_t, x_t) dt \end{cases}$$

c'est à dire:

(2.3)

$$\begin{cases} da_t^i = [F_1(a_t, x_t)]^i dt + a_t^i h^T(x_t^i) dY_t \\ dx_t^i = [F_2(a_t, x_t)]^i dt \\ i=1 \dots n \end{cases}$$

remarque 1: l'équation des points ne comporte pas de terme en dX_t . Les fonctions F_1 & F_2 sont définies en II.(3.6). ■

remarque 2: les processus $\{x_t^i\}$ & $\{a^i\}$ ($i=1, \dots, n$) étant solution de l'équation différentielle stochastique (2.3) on en déduit que $p_n(t, x)$ l'approximation de Gauss-Galerkin de la loi de X_t sachant \mathcal{F}_t , est elle-même \mathcal{F}_t -adaptée.

remarque 3:

Soit $\tilde{p}_n(t) = \sum_{i=1}^n \tilde{a}_t^i \delta x_t^i$, posons:

$$(p(t), \varphi) = (\tilde{p}_n(t), \varphi) + \xi_t^n(\varphi) \quad \forall t$$

où $\{p(t)\}$ désigne la solution de l'équation de Zakai. Supposons que $\tilde{p}_n(t)$ vérifie:

$$\blacktriangle \quad \xi_t^n(\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_{2n-1} \quad \forall t$$

Soit $\{p_n(t)\}$ l'approximation de Gauss-Galerkin de $\{p(t)\}$, on peut se demander (comme à la remarque 3 p.7) sous quelles conditions les points x_t^i & les poids a_t^i sont choisis de manière optimale, c'est à dire sous quelles conditions $p_n(t)$ vérifie la même propriété \blacktriangle que $\tilde{p}_n(t)$.

Considérons $\tilde{p}_n(t)$ et supposons \blacktriangle , comme:

$$(p(t), \varphi) = (p_0, \varphi) + \int_0^t (p(s), L\varphi) ds + \int_0^t (p(s), h^T \varphi) dY_s \quad \forall \varphi \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$$

on en déduit avec \blacktriangle :

$$(\tilde{p}_n(t), \varphi) = (p_0, \varphi) + \int_0^t \left\{ (p(s), L\varphi) + \xi_s^n(L\varphi) \right\} ds + \int_0^t \left\{ (p(s), h^T \varphi) + \xi_s^n(h^T \varphi) \right\} dY_s, \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_{2n-1}$$

pour avoir $\xi_s^n(L\varphi) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_{2n-1}$ on peut faire des hypothèses sur les coefficients de l'e.d.s.:

$$dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t$$

on peut en effet supposer que $b(x)$ et $\sigma(x)$ sont des

polynômes de degré 1, dans ce cas on a bien $\xi_t^n(L\varphi) = 0$ d'après (▲). Par contre pour avoir $\xi_t^n(h^T\varphi) = 0$ pour tout $\varphi \in \mathcal{P}_{2n-1}$ il faudrait supposer h constant ce qui n'est pas possible. On ne retrouve donc pas la condition suffisante énoncée à la page 3 pour le cas de l'équation de Fokker-Planck. ■

IV. ETUDE NUMERIQUE

1. Cas de l'équation de Fokker-Planck

1.a discrétisation et mise en oeuvre pratique

Pour discrétiser le système d'équations différentielles II-3.7 on a utilisé un schéma de Runge-Kutta d'ordre 4.

Il convient de revenir sur le calcul des fonctions F_1 & F_2 définies dans la section II-3. Etant donnés des points $x^i, i=1 \dots n$, et de poids $a^i, i=1 \dots n$, le calcul de $F_1(a, x)$ et $F_2(a, x)$ s'effectue de la manière suivante (les notations sont celles de la section II-3)

(i). formation des matrices :

$$A \triangleq \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad B \triangleq \begin{bmatrix} B_1 \\ B_e \end{bmatrix} ;$$

(ii). formation de $b = B \times a$;

(iii). résolution du système linéaire :

$$A \mu = b \quad (\mu \in \mathbb{R}^{2n}) ;$$

(iv). $F_1(a, x) = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}$, $F_2(a, x) = \begin{pmatrix} \mu_{n+1}/a_1 \\ \vdots \\ \mu_{2n}/a_n \end{pmatrix}$.

Ainsi chaque incrémentation en temps nécessite la formation puis la résolution d'un système linéaire de dimension $2n \times 2n$. C'est dans le point (1) de ce calcul qu'intervient le choix de la base $\{\varphi_m\}_{m=1 \dots 2n}$ (base de l'espace des polynômes de degré au plus $2n-1$). Deux

bases ont été utilisées:

- * la base canonique ($\varphi_m(x) \equiv x^{m-1}$);
- * la base des polynômes d'Hermite.

Sur les exemples présentés ici, les résultats obtenus dans les deux cas sont identiques. L'utilisation des polynômes d'Hermite a pour effet d'améliorer le conditionnement de la matrice A (définie au point (i)). On peut donc s'attendre à voir, sur des exemples difficiles, le calcul "fonctionner" dans de meilleures conditions avec les polynômes d'Hermite (en particulier lorsque l'on choisit un nombre de points n assez grand).

Le point délicat de cette méthode est le calcul des fonctions F_1 & F_2 plus exactement les parties (iii) & (iv) de ce calcul:

- * si la matrice A est mal conditionnée la résolution du système $Au = b$ peut engendrer des erreurs;
- * si un des poids a^i est trop petit - voir nul - le calcul de F_2 en (iv) risque de se faire dans de mauvaises conditions.

1.6 exemples

On s'est intéressé à une classe particulière d'équations différentielles stochastiques sur laquelle on a certains résultats (cf. LARNOLD [4]). Il s'agit des équations dites bilinéaires, c'est à dire de la forme:

$$dX_t = (AX_t + a) dt + (BX_t + b) dW_t$$

où A, a, B et b sont des constantes données. Pour ces équations on connaît la forme explicite de la solution X_t , et pour certaines d'entre elles, la forme explicite de la densité $p(t, x)$ solution de l'équation de Fokker-Planck

associée.

● EXEMPLE 1. Ce premier exemple (très simple) a pour but d'observer l'évolution au cours du temps de l'approximation, comparée avec la solution exacte de l'équation de Fokker-Planck. Soit $\{X_t\}$ un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, i.e. $\{X_t\}$ est solution de l'équation :

$$\begin{cases} dX_t = -\alpha X_t dt + \beta dW_t, & t \geq 0 \\ X_0 \sim N(\mu_0, \sigma_0^2) \end{cases}$$

où $\alpha \geq 0$, β , μ_0 , σ_0^2 sont des constantes. La solution de cette équation est :

$$X_t = e^{-\alpha t} X_0 + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s.$$

On en déduit que $\{X_t\}$ est un processus aléatoire gaussien, $X_t \sim N(\mu_t, \sigma_t^2)$, avec :

$$\begin{cases} \mu_t = e^{-\alpha t} \mu_0 \\ \sigma_t^2 = e^{-2\alpha t} \sigma_0^2 + \beta^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \end{cases}$$

On remarque que $X_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \bar{X}$ p.s. où \bar{X} est une variable gaussienne $N(0, \beta^2/2\alpha)$. La densité solution de l'équation de Fokker-Planck associée, est :

$$p(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right\}$$

Les paramètres du calcul sont :

* les coefficients : $\alpha = 1$, $\beta = 0.5$ ($\Rightarrow \bar{X} \sim N(0, 0.125)$);

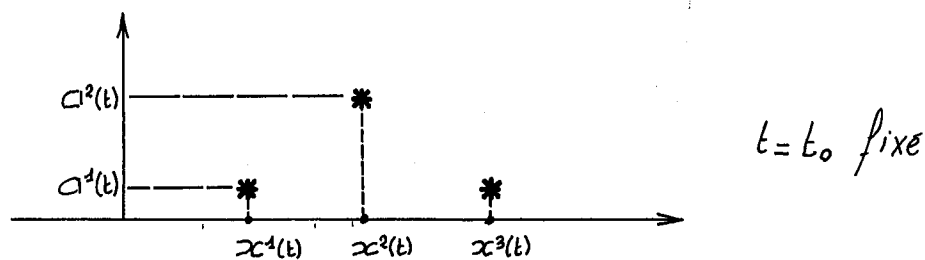
* la loi initiale : $\mu_0 = 3$, $\sigma_0^2 = 8$;

* nombre de points de Gauss : 3 ;

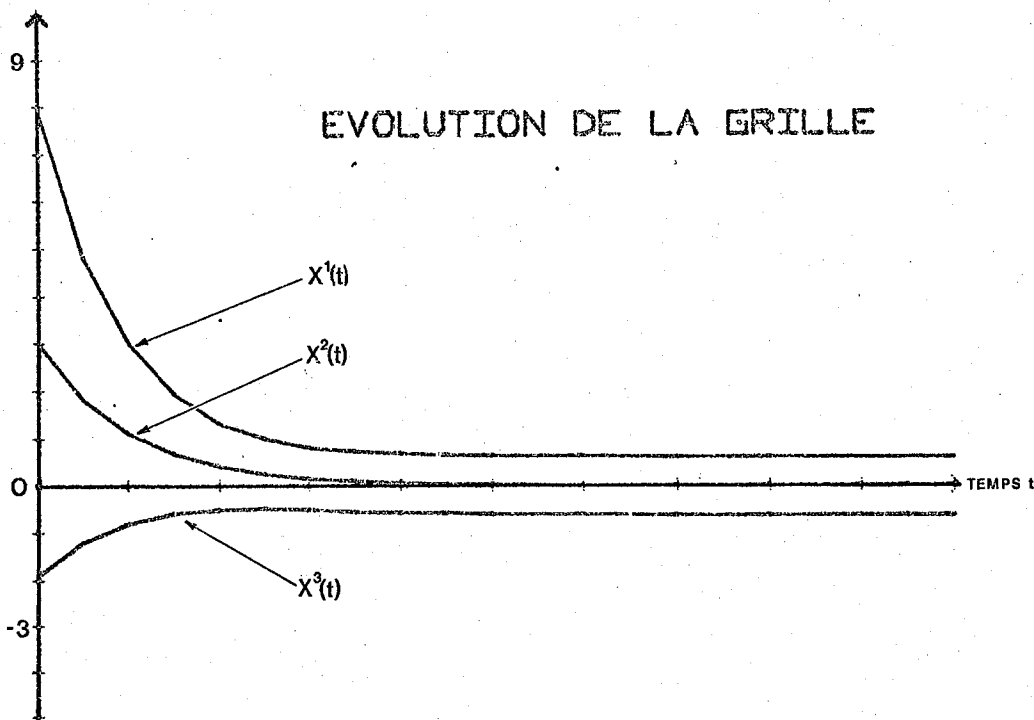
les équations ont été intégrées de $t=0$ à $t=10$.

La figure 1. présente l'évolution de la grille, c'est à dire le graphe des fonctions $t \rightarrow x^i(t)$ ($i=1,2,3$). La figure 2. reprend sur sa partie gauche l'évolution de la grille, sur sa partie droite est représentée la densité exacte et la densité approchée à certains instants t fixes. La rep-

représentation de la densité approchée doit s'interpréter ainsi :



On remarque donc que la grille suit parfaitement l'évolution de la solution et qu'une méthode avec grille fixe aurait nécessité un nombre nettement plus important de points de discrétisation. Par ailleurs les valeurs des 5 premiers moments de X_t (non présentés ici) sont approchées avec une très bonne précision.



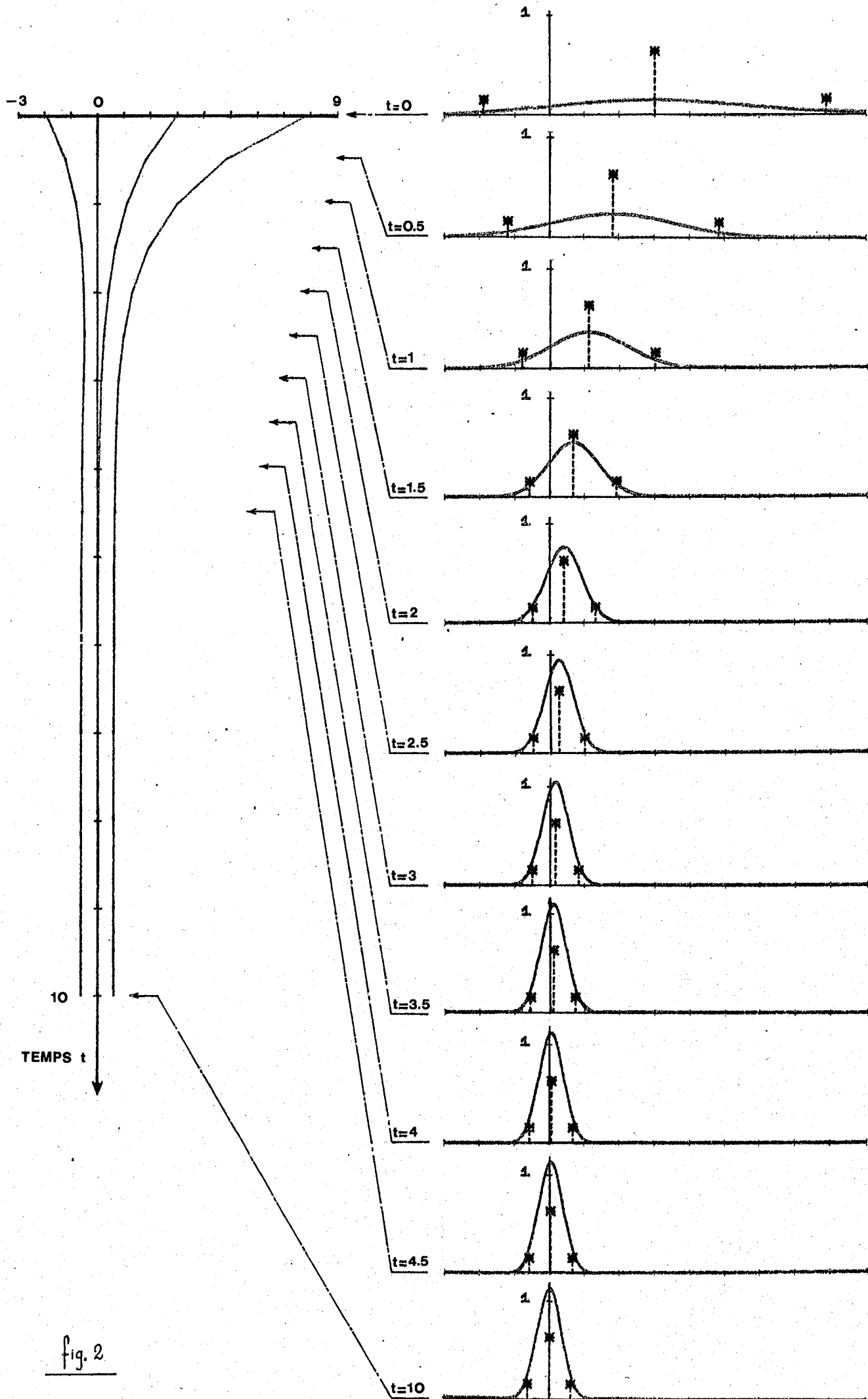


fig. 2

● EXEMPLE 2. Considérons l'équation bilinéaire suivante:

$$dX_t = AX_t dt + BX_t dW_t$$

la solution de cette équation est :

$$X_t = X_0 \exp \left\{ (A - \frac{1}{2} B^2) t + BW_t \right\} .$$

Comme $(A - \frac{1}{2} B^2)t + BW_t$ suit une loi de Gauss $N((A - \frac{1}{2} B^2)t, B^2 t)$, on obtient l'expression du moment d'ordre :

$$\blacktriangle EX_t^p = (EX_0^p) \exp \left\{ p \left(A - \frac{B^2}{2} \right) t + \frac{p^2}{2} B^2 t \right\}$$

Les paramètres du calcul sont :

- les coefficients: $A = -0.025$, $B = 0.1$
- loi initiale de Gauss $N(\mu, \sigma^2)$: $\mu = 2$, $\sigma^2 = 1$
- nombre de points de Gauss: 3.

Les équations ont été intégrées de $t=0$ à $t=100$, avec un pas d'incrémentalron $\Delta t = 1$.

Sur cette exemple nous allons comparer les valeurs exactes des premiers moments (données par \blacktriangle) avec celles obtenues par l'approximation. Le p ^{ème} moment de l'approximation $p_n(t, x)$ est donné par :

$$\int_{\mathbb{R}} x^p p_n(t, x) dx = \sum_{i=1}^n c_i(t) [x^i(t)]^p$$

Sur les figures 3 & 4 sont tracés les évolutions, au cours du temps, des 8 premiers moments (exactes & approchées). L'approximation donne les 5 premiers moments avec une erreur inférieure à 0.003% (sur ces 5 tracés la distinction entre la courbe exacte et la courbe approchée n'est pas faite). Ce résultat était prévisible car partant d'une équation bilinéaire, on a vu à la remarque 3 p. 7 que les approximations de Gauss-Christoffel et de Gauss-Galerkin coïncident à chaque instant t . Ainsi l'approximation doit donner les 5 premiers moments sans erreurs, ce qui est bien le cas. Mais on ne peut pas espérer plus comme le montre les graphes des moments d'ordres 6, 7 & 8 pour lesquels l'approximation donne des résultats médiocres.

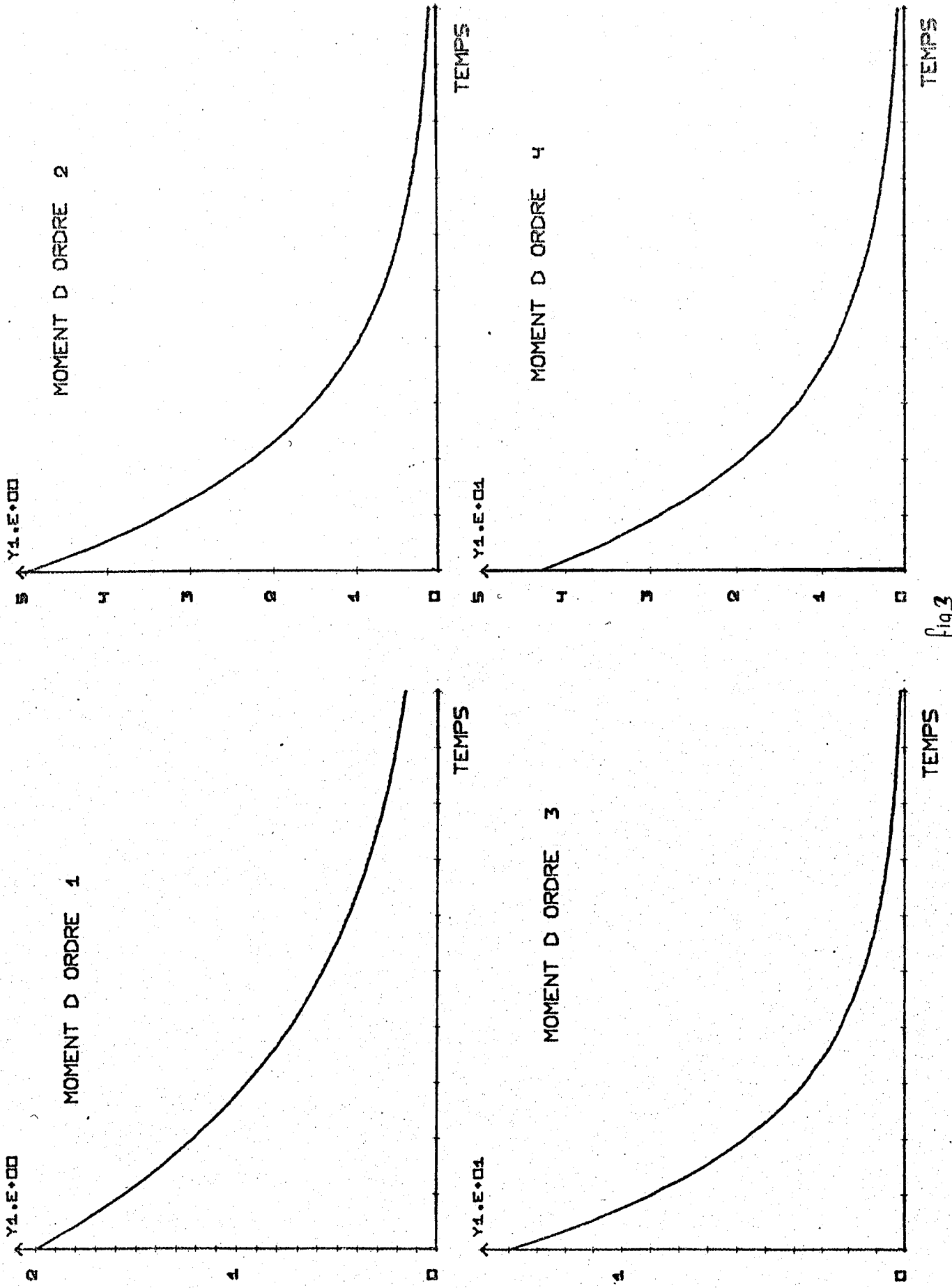


Fig 3

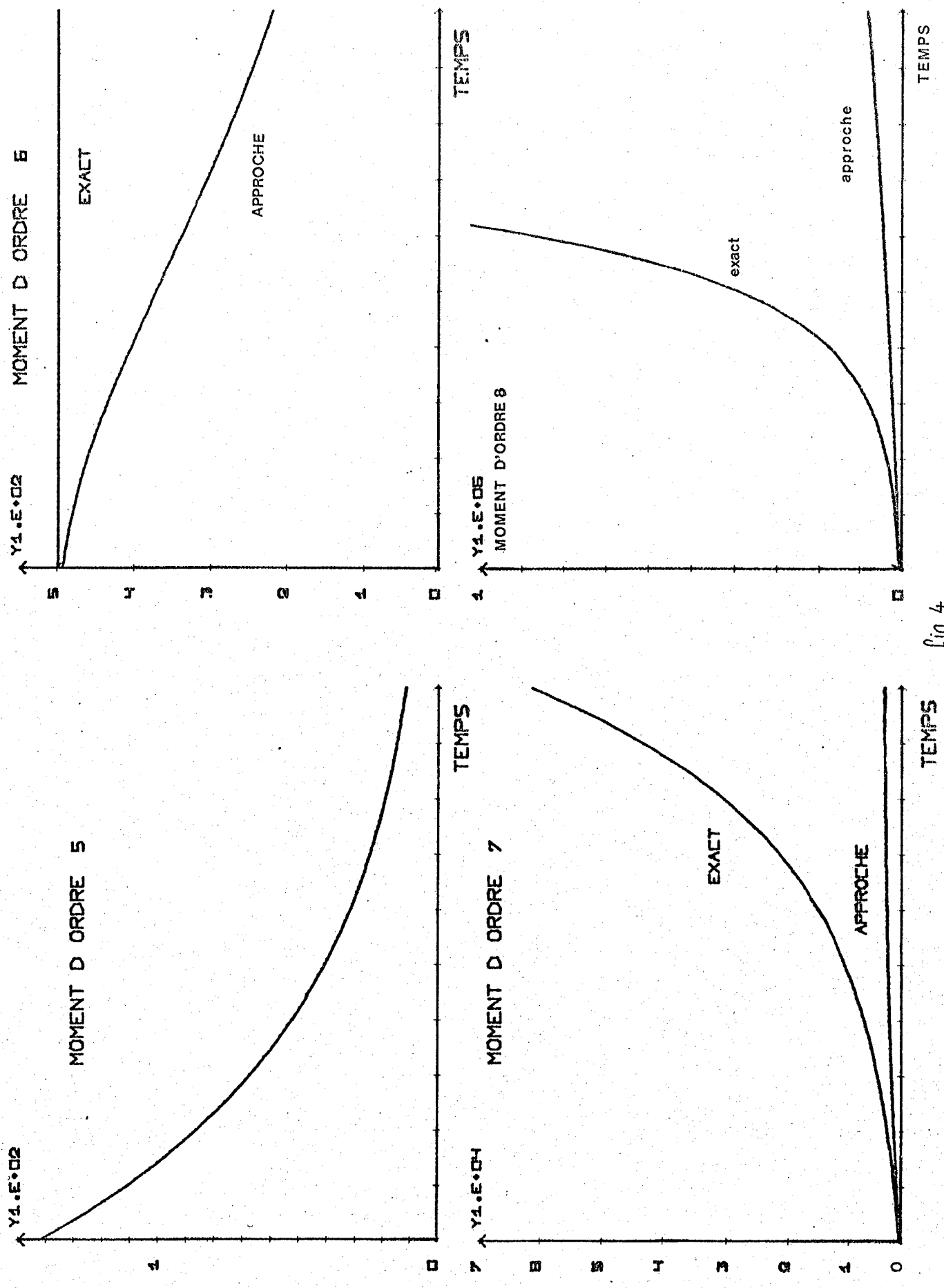


fig. 4

Les deux exemples précédents sont basés sur des équations différentielles stochastiques du type bilinéaire:

$$dX_t = (AX_t + a) dt + (BX_t + b) dW_t$$

or dans ce cas particulier, d'après la remarque 3. p.7, les approximations de Gauss-Galerkin et de Gauss-Christoffel coïncident à chaque instant, ce qui explique les bons résultats obtenus. De ce fait ces deux exemples ne permettent pas de conclure au bon comportement de la méthode. Il faut donc tester la méthode sur un exemple pour lequel les approximations de Gauss-Christoffel & Gauss-Galerkin ne coïncident pas nécessairement, c'est le cas de l'exemple suivant:

● EXEMPLE 3.

Considérons $\{\tilde{X}_t\}$ la solution de l'équation linéaire:

$$\text{II} \quad \begin{cases} d\tilde{X}_t = -\alpha \tilde{X}_t dt + \beta dW_t & (\alpha > 0) \\ \tilde{X}_0 = \text{Log } X_0 \end{cases}$$

où X_0 est une variable aléatoire réelle indépendante de $\{W_t\}$ et suivant une loi uniforme sur $[\alpha_1, \alpha_2]$ ($0 < \alpha_1 < \alpha_2$). Posons $X_t = \exp \tilde{X}_t$, en utilisant la formule de Ito (et le fait que $\tilde{X}_t = \text{Log } X_t$) on vérifie aisément que $\{X_t\}$ est solution de l'équation:

$$\text{III} \quad \begin{cases} dX_t = \left(\frac{\beta^2}{2} - \alpha \text{Log } X_t \right) X_t dt + \beta X_t dW_t \\ X_0 \text{ donné de loi uniforme sur } [\alpha_1, \alpha_2] \end{cases}$$

On utilise la méthode de Gauss-Galerkin afin de calculer une approximation de $\{p(t, x); t \geq 0\}$ la solution de l'équation de Fokker-Planck associée à III (i.e. $p(t, x)$ est la densité de la loi de X_t). On compare ensuite les moments de X_t obtenus à partir de l'approximation avec les moments exacts. On peut en effet déterminer l'expression exacte des moments de X_t ,

la solution de (1) est $\tilde{X}_t = e^{-\alpha t} \text{Log} X_0 + \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s$, ainsi:

$$EX_t^p = E \exp(p \tilde{X}_t) = E \exp \left\{ p e^{-\alpha t} \text{Log} X_0 + p \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right\}$$

X_0 et le processus $\{W_t\}$ sont indépendants, on en déduit :

$$EX_t^p = E \exp \{ p e^{-\alpha t} \text{Log} X_0 \} \times E \exp \left\{ p \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right\}$$

* X_0 suit une loi $U[\alpha_1, \alpha_2]$, d'où :

$$E \exp \{ p e^{-\alpha t} \text{Log} X_0 \} = E X_0^{p e^{-\alpha t}} = \frac{1}{\alpha_2 - \alpha_1} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} x^{p e^{-\alpha t}} dx = \frac{1}{\eta} \frac{\alpha_2^\eta - \alpha_1^\eta}{\alpha_2 - \alpha_1}$$

avec $\eta = p e^{-\alpha t} + 1$

* $\{ p \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \}$ suit une loi $N(0, p^2 \beta^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha})$, ainsi :

$$E \exp \left\{ p \beta \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW_s \right\} = \exp \left\{ \frac{1}{2} p^2 \beta^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{2\alpha} \right\}$$

En conclusion :

$$EX_t^p = \frac{1}{\eta} \frac{\alpha_2^\eta - \alpha_1^\eta}{\alpha_2 - \alpha_1} \exp \left\{ p^2 \beta^2 \frac{1 - e^{-2\alpha t}}{4\alpha} \right\}$$

(avec $\eta = p e^{-\alpha t} + 1$).

Les paramètres du calcul sont :

- $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.5$;
- loi initiale uniforme sur $[2, 5]$;
- instant initial $t = 0$, instant final $t = 6$;
- pas d'incrémentations $\Delta t = 0.05$;
- nombre de points de Gauss : 3 -

Les tables 1 à 8 donnent respectivement pour $p = 1$ à 8 la valeur du moment d'ordre p de X_t — approchée & exacte — ainsi que l'erreur correspondante (les valeurs sont données toutes les 4 incréments en temps).

On obtient donc un bon résultat puisqu'aucune erreur significative n'apparaît sur les 6 premiers moments.

table 1

MOMENT D'ORDRE 1 ERREURS

i	Ti	approche	exact	absolue	relative(%)
0	0.00000D+00	0.3500000D+01	0.3500000D+01	0.2775558D-15	0.000
1	0.20000D+00	0.3170353D+01	0.3169288D+01	0.1064873D-02	0.034
2	0.40000D+00	0.2893726D+01	0.2892778D+01	0.9488309D-03	0.033
3	0.60000D+00	0.2661190D+01	0.2660219D+01	0.7713012D-03	0.037
4	0.80000D+00	0.2464660D+01	0.2463519D+01	0.1140824D-02	0.046
5	0.10000D+01	0.2297711D+01	0.2296256D+01	0.1454604D-02	0.063
6	0.12000D+01	0.2155211D+01	0.2153307D+01	0.1903905D-02	0.088
7	0.14000D+01	0.2033029D+01	0.2030557D+01	0.2472319D-02	0.122
8	0.16000D+01	0.1927826D+01	0.1924687D+01	0.3139282D-02	0.163
9	0.18000D+01	0.1836887D+01	0.1833002D+01	0.3885415D-02	0.212
10	0.20000D+01	0.1757989D+01	0.1753298D+01	0.4690544D-02	0.268
11	0.22000D+01	0.1689303D+01	0.1683768D+01	0.5534972D-02	0.329
12	0.24000D+01	0.1629319D+01	0.1622917D+01	0.6402552D-02	0.395
13	0.26000D+01	0.1576781D+01	0.1569503D+01	0.7277951D-02	0.464
14	0.28000D+01	0.1530638D+01	0.1522490D+01	0.8148477D-02	0.535
15	0.30000D+01	0.1490011D+01	0.1481007D+01	0.9004379D-02	0.608
16	0.32000D+01	0.1454157D+01	0.1444320D+01	0.9836422D-02	0.681
17	0.34000D+01	0.1422447D+01	0.1411808D+01	0.1063961D-01	0.754
18	0.36000D+01	0.1394348D+01	0.1382939D+01	0.1140851D-01	0.825
19	0.38000D+01	0.1369402D+01	0.1357262D+01	0.1213993D-01	0.894
20	0.40000D+01	0.1347220D+01	0.1334387D+01	0.1283211D-01	0.962
21	0.42000D+01	0.1327463D+01	0.1313980D+01	0.1348328D-01	1.026
22	0.44000D+01	0.1309843D+01	0.1295749D+01	0.1409370D-01	1.088
23	0.46000D+01	0.1294107D+01	0.1279444D+01	0.1466317D-01	1.146
24	0.48000D+01	0.1280038D+01	0.1264845D+01	0.1519326D-01	1.201
25	0.50000D+01	0.1267446D+01	0.1251761D+01	0.1568457D-01	1.253
26	0.52000D+01	0.1256164D+01	0.1240024D+01	0.1613927D-01	1.302
27	0.54000D+01	0.1246046D+01	0.1229488D+01	0.1655856D-01	1.347
28	0.56000D+01	0.1236966D+01	0.1220021D+01	0.1694481D-01	1.389
29	0.58000D+01	0.1228810D+01	0.1211510D+01	0.1729941D-01	1.428
30	0.60000D+01	0.1221479D+01	0.1203854D+01	0.1762439D-01	1.464

table 2

MOMENT D'ORDRE 2 ERREURS

i	Ti	approche	exact	absolue	relative(%)
0	0.00000D+00	0.1300000D+02	0.1300000D+02	0.5501389D-07	0.000
1	0.20000D+00	0.1105014D+02	0.1104191D+02	0.8225017D-02	0.074
2	0.40000D+00	0.9472827D+01	0.9466796D+01	0.6031036D-02	0.064
3	0.60000D+00	0.8198958D+01	0.8194853D+01	0.4120946D-02	0.050
4	0.80000D+00	0.7164977D+01	0.7162562D+01	0.2415645D-02	0.034
5	0.10000D+01	0.6320942D+01	0.6320042D+01	0.8999622D-03	0.014
6	0.12000D+01	0.5627836D+01	0.5628223D+01	0.3876229D-03	0.007
7	0.14000D+01	0.5055204D+01	0.5056614D+01	0.1410631D-02	0.028
8	0.16000D+01	0.4579251D+01	0.4581389D+01	0.2138337D-02	0.047
9	0.18000D+01	0.4181335D+01	0.4183887D+01	0.2551534D-02	0.061
10	0.20000D+01	0.3846786D+01	0.3849436D+01	0.2650266D-02	0.069
11	0.22000D+01	0.3563996D+01	0.3566449D+01	0.2452598D-02	0.069
12	0.24000D+01	0.3323742D+01	0.3325726D+01	0.1984285D-02	0.060
13	0.26000D+01	0.3118646D+01	0.3119926D+01	0.1260505D-02	0.041
14	0.28000D+01	0.2942771D+01	0.2943152D+01	0.3807797D-03	0.013
15	0.30000D+01	0.2791322D+01	0.2790643D+01	0.6788427D-03	0.024
16	0.32000D+01	0.2660388D+01	0.2658531D+01	0.1857586D-02	0.070
17	0.34000D+01	0.2546780D+01	0.2543656D+01	0.3123842D-02	0.123
18	0.36000D+01	0.2447866D+01	0.2443420D+01	0.4445651D-02	0.182
19	0.38000D+01	0.2361473D+01	0.2355678D+01	0.5795395D-02	0.246
20	0.40000D+01	0.2285797D+01	0.2278644D+01	0.7152468D-02	0.314
21	0.42000D+01	0.2219325D+01	0.2210630D+01	0.8495605D-02	0.384
22	0.44000D+01	0.2160794D+01	0.2150983D+01	0.9811264D-02	0.456
23	0.46000D+01	0.2109133D+01	0.2098048D+01	0.1108568D-01	0.528
24	0.48000D+01	0.2062441D+01	0.2051129D+01	0.1231259D-01	0.600
25	0.50000D+01	0.2022947D+01	0.2009463D+01	0.1346333D-01	0.671
26	0.52000D+01	0.1986995D+01	0.1972400D+01	0.1459522D-01	0.740
27	0.54000D+01	0.1955022D+01	0.1939378D+01	0.1564445D-01	0.807
28	0.56000D+01	0.1926546D+01	0.1909915D+01	0.1663133D-01	0.871
29	0.58000D+01	0.1901146D+01	0.1883593D+01	0.1755378D-01	0.932
30	0.60000D+01	0.1878461D+01	0.1860049D+01	0.1841287D-01	0.990

table 3

MOMENT D'ORDRE 3 ERREURS

i	Ti	approche	exact	absolute	relative(%)
0	0.00000D+00	0.5075000D+02	0.5075000D+02	0.5776458D-06	0.000
1	0.20000D+00	0.4204255D+02	0.4199394D+02	0.4861273D-01	0.116
2	0.40000D+00	0.3490652D+02	0.3486867D+02	0.3784910D-01	0.109
3	0.60000D+00	0.2915420D+02	0.2912398D+02	0.3021521D-01	0.104
4	0.80000D+00	0.2453603D+02	0.2451120D+02	0.2482894D-01	0.101
5	0.10000D+01	0.2082964D+02	0.2080894D+02	0.2070309D-01	0.099
6	0.12000D+01	0.1784849D+02	0.1783128D+02	0.1720087D-01	0.096
7	0.14000D+01	0.1544126D+02	0.1542732D+02	0.1394522D-01	0.090
8	0.16000D+01	0.1348776D+02	0.1347692D+02	0.1083815D-01	0.080
9	0.18000D+01	0.1189349D+02	0.1188556D+02	0.7929494D-02	0.067
10	0.20000D+01	0.1058462D+02	0.1057928D+02	0.5337115D-02	0.050
11	0.22000D+01	0.9503528D+01	0.9500353D+01	0.3175442D-02	0.033
12	0.24000D+01	0.8605190D+01	0.8603652D+01	0.1537864D-02	0.018
13	0.26000D+01	0.7854330D+01	0.7853852D+01	0.4783179D-03	0.006
14	0.28000D+01	0.7223187D+01	0.7223182D+01	0.4368817D-05	0.000
15	0.30000D+01	0.6689824D+01	0.6689718D+01	0.1061269D-03	0.002
16	0.32000D+01	0.6236784D+01	0.6236056D+01	0.7276904D-03	0.012
17	0.34000D+01	0.5850123D+01	0.5848311D+01	0.1811826D-02	0.031
18	0.36000D+01	0.5518625D+01	0.5515337D+01	0.3288307D-02	0.060
19	0.38000D+01	0.5233213D+01	0.5228135D+01	0.5078454D-02	0.097
20	0.40000D+01	0.4986519D+01	0.4979398D+01	0.7120634D-02	0.143
21	0.42000D+01	0.4772497D+01	0.4763157D+01	0.9339588D-02	0.196
22	0.44000D+01	0.4586189D+01	0.4574508D+01	0.1168071D-01	0.255
23	0.46000D+01	0.4423486D+01	0.4409399D+01	0.1408646D-01	0.319
24	0.48000D+01	0.4280986D+01	0.4264465D+01	0.1652092D-01	0.387
25	0.50000D+01	0.4158335D+01	0.4136894D+01	0.1894130D-01	0.458
26	0.52000D+01	0.4045648D+01	0.4024326D+01	0.2132209D-01	0.530
27	0.54000D+01	0.3948407D+01	0.3924769D+01	0.2363724D-01	0.602
28	0.56000D+01	0.3862411D+01	0.3836538D+01	0.2587344D-01	0.674
29	0.58000D+01	0.3786204D+01	0.3758194D+01	0.2801064D-01	0.745
30	0.60000D+01	0.3718549D+01	0.3688509D+01	0.3004017D-01	0.814

table 4

MOMENT D'ORDRE 4 ERREURS

i	Ti	approche	exact	absolue	relative(%)
0	0.00000D+00	0.2062000D+03	0.2062000D+03	0.4111058D-05	0.000
1	0.20000D+00	0.1732916D+03	0.1730549D+03	0.2366754D+00	0.137
2	0.40000D+00	0.1439374D+03	0.1437542D+03	0.1831981D+00	0.127
3	0.60000D+00	0.1190594D+03	0.1189262D+03	0.1332661D+00	0.112
4	0.80000D+00	0.9832685D+02	0.9843311D+02	0.9373518D-01	0.095
5	0.10000D+01	0.8184715D+02	0.8178168D+02	0.6546531D-01	0.080
6	0.12000D+01	0.6841323D+02	0.6836662D+02	0.4660348D-01	0.068
7	0.14000D+01	0.5763125D+02	0.5759722D+02	0.3402964D-01	0.059
8	0.16000D+01	0.4897749D+02	0.4895239D+02	0.2510442D-01	0.051
9	0.18000D+01	0.4201477D+02	0.4199683D+02	0.1793923D-01	0.043
10	0.20000D+01	0.3639980D+02	0.3637824D+02	0.1156100D-01	0.032
11	0.22000D+01	0.3182323D+02	0.3181671D+02	0.5612138D-02	0.018
12	0.24000D+01	0.2809231D+02	0.2809218D+02	0.1303653D-03	0.000
13	0.26000D+01	0.2502791D+02	0.2502256D+02	0.4647965D-02	0.019
14	0.28000D+01	0.2249501D+02	0.2250350D+02	0.8485785D-02	0.038
15	0.30000D+01	0.2038826D+02	0.2040000D+02	0.1114149D-01	0.055
16	0.32000D+01	0.1862727D+02	0.1863980D+02	0.1252964D-01	0.067
17	0.34000D+01	0.1714561D+02	0.1715822D+02	0.1261654D-01	0.074
18	0.36000D+01	0.1589271D+02	0.1590415D+02	0.1143964D-01	0.072
19	0.38000D+01	0.1482787D+02	0.1483700D+02	0.9129117D-02	0.062
20	0.40000D+01	0.1391857D+02	0.1392436D+02	0.5792398D-02	0.042
21	0.42000D+01	0.1313858D+02	0.1314020D+02	0.1623418D-02	0.012
22	0.44000D+01	0.1246671D+02	0.1246348D+02	0.3227160D-02	0.026
23	0.46000D+01	0.1188569D+02	0.1187711D+02	0.8581073D-02	0.072
24	0.48000D+01	0.1138143D+02	0.1136712D+02	0.1431182D-01	0.126
25	0.50000D+01	0.1094228D+02	0.1092201D+02	0.2025752D-01	0.186
26	0.52000D+01	0.1055865D+02	0.1053231D+02	0.2634216D-01	0.250
27	0.54000D+01	0.1022253D+02	0.1019010D+02	0.3242990D-01	0.318
28	0.56000D+01	0.9927254D+01	0.9888790D+01	0.3846400D-01	0.389
29	0.58000D+01	0.9667196D+01	0.9622840D+01	0.4436636D-01	0.461
30	0.60000D+01	0.9437625D+01	0.9387569D+01	0.5005668D-01	0.533

table 5

NOMENT D'ORDRE 5 ERREURS

i	Ti	approche	exact	absolute	relative(%)
0	0.00000D+00	0.8645000D+03	0.8645000D+03	0.2476911D-04	0.000
1	0.20000D+00	0.7685643D+03	0.7675469D+03	0.1017388D+01	0.133
2	0.40000D+00	0.6609496D+03	0.6599204D+03	0.1029193D+01	0.156
3	0.60000D+00	0.5567152D+03	0.5557625D+03	0.9526678D+00	0.171
4	0.80000D+00	0.4633052D+03	0.4624776D+03	0.6276358D+00	0.179
5	0.10000D+01	0.3834785D+03	0.3827897D+03	0.6887355D+00	0.180
6	0.12000D+01	0.3172493D+03	0.3166869D+03	0.5624186D+00	0.178
7	0.14000D+01	0.2632794D+03	0.2628198D+03	0.4595140D+00	0.175
8	0.16000D+01	0.2197395D+03	0.2193588D+03	0.3807200D+00	0.174
9	0.18000D+01	0.1847731D+03	0.1844527D+03	0.3203859D+00	0.174
10	0.20000D+01	0.1567115D+03	0.1564392D+03	0.2722874D+00	0.174
11	0.22000D+01	0.1341472D+03	0.1339158D+03	0.2314147D+00	0.173
12	0.24000D+01	0.1159352D+03	0.1157404D+03	0.1947507D+00	0.168
13	0.26000D+01	0.1011639D+03	0.1010027D+03	0.1612032D+00	0.160
14	0.28000D+01	0.8911640D+02	0.8898569D+02	0.1307151D+00	0.147
15	0.30000D+01	0.7923195D+02	0.7912800D+02	0.1039492D+00	0.131
16	0.32000D+01	0.7107287D+02	0.7099143D+02	0.81444548D-01	0.115
17	0.34000D+01	0.6429733D+02	0.6423362D+02	0.6370519D-01	0.099
18	0.36000D+01	0.5863764D+02	0.5858658D+02	0.5105807D-01	0.087
19	0.38000D+01	0.5388312D+02	0.5383973D+02	0.4339015D-01	0.081
20	0.40000D+01	0.4986749D+02	0.4982691D+02	0.4058145D-01	0.081
21	0.42000D+01	0.4645840D+02	0.4641631D+02	0.4209622D-01	0.091
22	0.44000D+01	0.4355028D+02	0.4350281D+02	0.4747259D-01	0.109
23	0.46000D+01	0.4105817D+02	0.4100209D+02	0.5608037D-01	0.137
24	0.48000D+01	0.3891352D+02	0.3884613D+02	0.6739614D-01	0.173
25	0.50000D+01	0.3706051D+02	0.3697971D+02	0.8079515D-01	0.218
26	0.52000D+01	0.3545356D+02	0.3535778D+02	0.9578304D-01	0.271
27	0.54000D+01	0.3405518D+02	0.3394332D+02	0.1118606D+00	0.330
28	0.56000D+01	0.3283445D+02	0.3270577D+02	0.1286741D+00	0.393
29	0.58000D+01	0.3176557D+02	0.3161977D+02	0.15457931D+00	0.461
30	0.60000D+01	0.3082708D+02	0.3066415D+02	0.1627306D+00	0.531

table 6

MOMENT D'ORDRE 6 ERREURS

i	Ti	approche	exact	absolue	relative(%)
0	0.00000D+00	0.3713883D+04	0.3714143D+04	0.2602208D+00	0.007
1	0.20000D+00	0.3640823D+04	0.3643222D+04	0.2397177D+01	0.066
2	0.40000D+00	0.3350663D+04	0.3357882D+04	0.7219364D+01	0.215
3	0.60000D+00	0.2950037D+04	0.2961534D+04	0.1149713D+02	0.388
4	0.80000D+00	0.2520903D+04	0.2535071D+04	0.1416813D+02	0.559
5	0.10000D+01	0.2113909D+04	0.2129230D+04	0.1532061D+02	0.720
6	0.12000D+01	0.1754052D+04	0.1769402D+04	0.1534976D+02	0.868
7	0.14000D+01	0.1449293D+04	0.1463942D+04	0.1464851D+02	1.001
8	0.16000D+01	0.1198006D+04	0.1211531D+04	0.1352549D+02	1.116
9	0.18000D+01	0.9940896D+03	0.1006305D+04	0.1221508D+02	1.214
10	0.20000D+01	0.8300344D+03	0.8409127D+03	0.1087830D+02	1.294
11	0.22000D+01	0.6985083D+03	0.7081262D+03	0.9617848D+01	1.358
12	0.24000D+01	0.5930530D+03	0.6015426D+03	0.8489610D+01	1.411
13	0.26000D+01	0.5082879D+03	0.5158015D+03	0.7513654D+01	1.457
14	0.28000D+01	0.4398707D+03	0.4465584D+03	0.6687674D+01	1.498
15	0.30000D+01	0.3843628D+03	0.3903589D+03	0.5996164D+01	1.536
16	0.32000D+01	0.3390676D+03	0.3444864D+03	0.5418885D+01	1.573
17	0.34000D+01	0.3018815D+03	0.3068160D+03	0.4934467D+01	1.608
18	0.36000D+01	0.2711656D+03	0.2756884D+03	0.4522771D+01	1.641
19	0.38000D+01	0.2456396D+03	0.2498072D+03	0.4167642D+01	1.668
20	0.40000D+01	0.2243018D+03	0.2281572D+03	0.3855332D+01	1.690
21	0.42000D+01	0.2063636D+03	0.2099397D+03	0.3576184D+01	1.703
22	0.44000D+01	0.1912020D+03	0.1945244D+03	0.3322384D+01	1.708
23	0.46000D+01	0.1783216D+03	0.1814104D+03	0.3088734D+01	1.703
24	0.48000D+01	0.1673268D+03	0.1701981D+03	0.2871292D+01	1.687
25	0.50000D+01	0.1578988D+03	0.1605666D+03	0.2667730D+01	1.661
26	0.52000D+01	0.1497804D+03	0.1522567D+03	0.2476224D+01	1.626
27	0.54000D+01	0.1427619D+03	0.1450578D+03	0.2295811D+01	1.583
28	0.56000D+01	0.1366723D+03	0.1387978D+03	0.2125466D+01	1.531
29	0.58000D+01	0.1313703D+03	0.1333353D+03	0.1965028D+01	1.474
30	0.60000D+01	0.1267394D+03	0.1285535D+03	0.1814090D+01	1.411

table 7

MOMENT D'ORDRE 7

ERREURS

i	Ti	approche	exact	absolue	relative (%)
0	0.00000D+00	0.1625900D+05	0.1626538D+05	0.6378040D+01	0.039
1	0.20000D+00	0.1825253D+05	0.1842286D+05	0.1703318D+03	0.925
2	0.40000D+00	0.1845637D+05	0.1886664D+05	0.4102653D+03	2.175
3	0.60000D+00	0.1730410D+05	0.1793941D+05	0.6353049D+03	3.541
4	0.80000D+00	0.1539081D+05	0.1617151D+05	0.7806919D+03	4.828
5	0.10000D+01	0.1320866D+05	0.1404691D+05	0.8382451D+03	5.967
6	0.12000D+01	0.1107818D+05	0.1190588D+05	0.8276967D+03	6.952
7	0.14000D+01	0.9167583D+04	0.9942188D+04	0.7746048D+03	7.791
8	0.16000D+01	0.7539612D+04	0.8239867D+04	0.7002548D+03	8.498
9	0.18000D+01	0.6195498D+04	0.6814851D+04	0.6193331D+03	9.088
10	0.20000D+01	0.5106601D+04	0.5647263D+04	0.5406611D+03	9.574
11	0.22000D+01	0.4232660D+04	0.4702509D+04	0.4689489D+03	9.970
12	0.24000D+01	0.3537065D+04	0.3942850D+04	0.4057844D+03	10.292
13	0.26000D+01	0.2981503D+04	0.333239D+04	0.3517364D+03	10.552
14	0.28000D+01	0.2537435D+04	0.2843550D+04	0.3061154D+03	10.765
15	0.30000D+01	0.2181037D+04	0.2448984D+04	0.2679463D+03	10.941
16	0.32000D+01	0.1893495D+04	0.2129642D+04	0.2361479D+03	11.089
17	0.34000D+01	0.1660120D+04	0.1869799D+04	0.2096785D+03	11.214
18	0.36000D+01	0.1469517D+04	0.1657120D+04	0.1876029D+03	11.321
19	0.38000D+01	0.1312845D+04	0.1481972D+04	0.1691267D+03	11.412
20	0.40000D+01	0.1183247D+04	0.1336832D+04	0.1535848D+03	11.489
21	0.42000D+01	0.1075377D+04	0.1215815D+04	0.1404383D+03	11.551
22	0.44000D+01	0.9850586D+03	0.1114306D+04	0.1292479D+03	11.599
23	0.46000D+01	0.9090056D+03	0.1028669D+04	0.1196633D+03	11.633
24	0.48000D+01	0.8446206D+03	0.9560234D+03	0.1114029D+03	11.653
25	0.50000D+01	0.7898357D+03	0.8940786D+03	0.1042429D+03	11.659
26	0.52000D+01	0.7429980D+03	0.8410003D+03	0.9800225D+02	11.653
27	0.54000D+01	0.7027751D+03	0.7953118D+03	0.9253676D+02	11.635
28	0.56000D+01	0.6680903D+03	0.7558174D+03	0.8772709D+02	11.607
29	0.58000D+01	0.6380636D+03	0.7215428D+03	0.8347920D+02	11.570
30	0.60000D+01	0.6119759D+03	0.6916900D+03	0.7977141D+02	11.525

table 8

NOMENT D'ORDRE 8 ERREURS

i	Ti	approche	exact	absolue	relative(%)
0	0.00000+00	0.7222870D+05	0.7231900D+05	0.9030131D+02	0.125
1	0.20000+00	0.9579412D+05	0.9889832D+05	0.3104196D+04	3.139
2	0.40000+00	0.1082103D+06	0.1166949D+06	0.8484576D+04	7.271
3	0.60000+00	0.1090176D+06	0.1232074D+06	0.1418987D+05	11.517
4	0.80000+00	0.1014537D+06	0.1197940D+06	0.1834022D+05	15.310
5	0.10000+01	0.8940116D+05	0.1097161D+06	0.2031494D+05	18.516
6	0.12000+01	0.7595020D+05	0.9634352D+05	0.2039332D+05	21.167
7	0.14000+01	0.6303927D+05	0.8223376D+05	0.1919449D+05	23.341
8	0.16000+01	0.5163248D+05	0.6895049D+05	0.1731801D+05	25.117
9	0.18000+01	0.4204372D+05	0.5724998D+05	0.1520626D+05	26.561
10	0.20000+01	0.3422449D+05	0.4735764D+05	0.1313314D+05	27.732
11	0.22000+01	0.2796138D+05	0.3920362D+05	0.1124225D+05	28.677
12	0.24000+01	0.2299195D+05	0.3258335D+05	0.9591400D+04	29.437
13	0.26000+01	0.1906344D+05	0.2725184D+05	0.8188392D+04	30.047
14	0.28000+01	0.1595682D+05	0.2297221D+05	0.7015389D+04	30.539
15	0.30000+01	0.1349271D+05	0.1953655D+05	0.6043838D+04	30.936
16	0.32000+01	0.1152882D+05	0.1677162D+05	0.5242795D+04	31.260
17	0.34000+01	0.9954351D+04	0.1453744D+05	0.4583090D+04	31.526
18	0.36000+01	0.8683845D+04	0.1272291D+05	0.4039069D+04	31.746
19	0.38000+01	0.7651608D+04	0.1124074D+05	0.3589127D+04	31.930
20	0.40000+01	0.6807190D+04	0.1002264D+05	0.3215455D+04	32.082
21	0.42000+01	0.6111717D+04	0.9015348D+04	0.2903631D+04	32.208
22	0.44000+01	0.5535156D+04	0.8177195D+04	0.2642040D+04	32.310
23	0.46000+01	0.5054152D+04	0.7475547D+04	0.2421395D+04	32.391
24	0.48000+01	0.4650461D+04	0.6884728D+04	0.2234268D+04	32.453
25	0.50000+01	0.4309723D+04	0.6384448D+04	0.2074726D+04	32.497
26	0.52000+01	0.4020586D+04	0.5958586D+04	0.1938000D+04	32.525
27	0.54000+01	0.3773997D+04	0.5594262D+04	0.1820266D+04	32.538
28	0.56000+01	0.3562716D+04	0.5281129D+04	0.1718412D+04	32.539
29	0.58000+01	0.3380888D+04	0.5010822D+04	0.1629834D+04	32.528
30	0.60000+01	0.3223769D+04	0.4776542D+04	0.1552773D+04	32.508

2. Cas de l'équation de Zakai

2.a discretisation et mise en oeuvre pratique

Les équations sont:

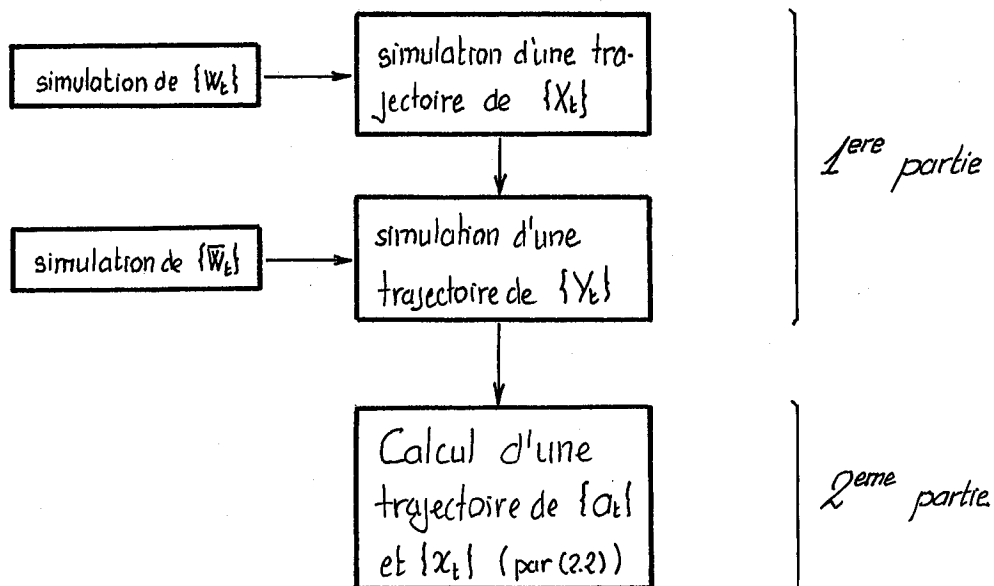
$$(2.1) \quad \begin{cases} dX_t = b(X_t) dt + \sigma(X_t) dW_t \\ dY_t = h(X_t) dt + d\bar{W}_t \end{cases}$$

$$(2.2) \quad \begin{cases} da_t^i = [F_1(a_t, x_t)]^i dt + a_t^i h^T(x_t) dY_t \\ dx_t^i = [F_2(a_t, x_t)]^i dt \\ i=1 \dots n \end{cases}$$

La mise en oeuvre pratique du calcul comporte deux parties:

- (i) la simulation d'une trajectoire de $\{X_t\}$ et de $\{Y_t\}$;
- (ii) le calcul proprement dit: utilisation de la trajectoire simulée de $\{Y_t\}$ pour résoudre (2.2).

Schématiquement:



1^{ere} partie : simulation.

Soit $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$ une suite croissante d'instants. On note :

- X_k, Y_k, W_k, \bar{W}_k les de X_t, Y_t, W_t, \bar{W}_t à l'instant $t = t_k$;
- $\Delta t_{k+1} = t_{k+1} - t_k$;
- $\Delta W_{k+1} = W_{k+1} - W_k$;
- $\Delta \bar{W}_{k+1} = \bar{W}_{k+1} - \bar{W}_k$;
- $\Delta Y_{k+1} = Y_{k+1} - Y_k$.

On discrétise les équations (2.1) en utilisant un schéma de Milshtein (sur la seconde de ces équations le schéma de Milshtein coïncide avec le schéma classique), on obtient :

$$(2.3) \quad \begin{cases} X_{k+1} = X_k + \left\{ b - \frac{1}{2} \sigma \sigma' \right\} (X_k) \Delta t_{k+1} + \sigma(X_k) \Delta W_{k+1} + \frac{1}{2} (\sigma \sigma') (X_k) \{\Delta W_{k+1}\}^2 \\ \Delta Y_{k+1} = h(X_k) \Delta t_{k+1} + \Delta \bar{W}_{k+1} \end{cases} \quad \begin{array}{l} , k=0,1,\dots, X_0 \text{ donné} \\ , k=0,1,\dots \end{array}$$

La simulation s'effectue donc ainsi :

- ① on génère une réalisation⁽¹⁾ des suites $\{\Delta W_k\}_{k \geq 1}$ et $\{\Delta \bar{W}_k\}_{k \geq 1}$, définies par :
 - * $\{\Delta W_k\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes gaussiennes, $\Delta W_{k+1} \sim N(0, \Delta t_{k+1})$,
 - * $\{\Delta \bar{W}_k\}$ est aussi une suite de v.a. indépendantes gaussiennes, $\Delta \bar{W}_{k+1} \sim N(0, \Delta t_{k+1})$,
 - * $\{\Delta W_k\}_{k \geq 1}$ & $\{\Delta \bar{W}_k\}_{k \geq 1}$ sont indépendantes ;
- ② on génère une réalisation⁽¹⁾ de la variable aléatoire X_0 suivant la loi initiale p_0 ;
- ③ on forme par l'intermédiaire de (2.3) et en utilisant les résultats de ① & ②, une réalisation⁽¹⁾ des suites $\{X_k\}_{k \geq 0}$ et $\{\Delta Y_k\}_{k \geq 1}$.

(1) dans les trois cas il ne s'agit bien sûr que d'une "approximation d'une réalisation".

2^{eme} partie : calcul de l'approximation

Notons a_k^i & x_k^i les valeurs de a_t^i & x_t^i à l'instant $t = t_k$. Considérons les équations (2.2), pour discrétiser l'équation des points x_t^i on utilise le schéma d'Euler (puisque cette équation ne contient pas de terme d'intégrale stochastique). Le schéma de Milshstein appliqué à l'équation des poids a_t^i donne :

$$a_{k+1}^i = [F_1(a_k, x_k)]^i \Delta t_{k+1} + a_k^i \left\{ 1 + h^T(x_k^i) \Delta Y_{k+1} - \frac{1}{2} h^T h(x_k^i) \Delta t_{k+1} + \frac{1}{2} (h^T(x_k^i) \Delta Y_{k+1})^2 \right\}$$

on reconnaît dans le second membre de cette équation les premiers termes du développement en série de :

$$\exp \left(h^T(x_k^i) \Delta Y_{k+1} - \frac{1}{2} h^T h(x_k^i) \Delta t_{k+1} \right)$$

Dans le développement en série de cette dernière expression on néglige les termes d'ordre supérieurs et à la place du schéma de Milshstein, on utilise le schéma suivant :

$$a_{k+1}^i = [F_1(a_k, x_k)]^i \Delta t_{k+1} + a_k^i \exp \left(h^T(x_k^i) \Delta Y_{k+1} - \frac{1}{2} h^T h(x_k^i) \Delta t_{k+1} \right)$$

qui donne de meilleurs résultats.⁽¹⁾

Les équations discrétisées sont donc :

$$(2.4) \quad \begin{cases} a_{k+1}^i = [F_1(a_k, x_k)]^i \Delta t_{k+1} + a_k^i \exp \left(h^T(x_k^i) \Delta Y_{k+1} - \frac{1}{2} h^T h(x_k^i) \Delta t_{k+1} \right) \\ x_{k+1}^i = x_k^i + [F_2(a_k, x_k)]^i \Delta t_{k+1} \\ k=0, 1, \dots \\ \{a_0^i, x_0^i; i=1 \dots n\} \text{ donné.} \end{cases}$$

D'après la remarque 2 p.7 $\{x_0^i\}_{i=1..n}$ $\{a_0^i\}_{i=1..n}$ sont les points et les poids de l'approximation de la densité initiale p_0 par la méthode de Gauss-Christoffel.

(1) cf. F. LE GLAND [5]

La méthode de calcul des fonctions F_1 & F_2 a été décrite dans la section IV.1.a. Étant données la suite d'instants $\{t_k\}_{k \geq 0}$ et la simulation de $\{\Delta Y_k\}_{k \geq 1}$, le calcul de l'approximation s'effectue de la manière suivante:

① initialisation :

calcul de $\{a_0^i, x_0^i; i=1 \dots n\}$

② incrémentations:

pour $k=1, 2, \dots$ faire:

• calcul de $F_1(a_{k-1}, x_{k-1})$ & $F_2(a_{k-1}, x_{k-1})$ -

• $a_k^i = [F_1(a_{k-1}, x_{k-1})]^i \Delta t_k +$
 $+ a_{k-1}^i \exp\left(h^T(x_{k-1}^i) \Delta Y_k - \frac{1}{2} h^T h(x_{k-1}^i) \Delta t_k\right)$, $i=1 \dots n$ -

• $x_k^i = x_{k-1}^i + [F_2(a_{k-1}, x_{k-1})]^i \Delta t_k$, $i=1 \dots n$ -

2.6 exemples

● EXEMPLE 1

Dans cet exemple nous traitons du problème de filtrage linéaire gaussien. Les équations sont:

$$\begin{cases} dX_t = b X_t dt + \sigma dW_t \\ X_0 \text{ donné de loi gaussienne} \\ dY_t = h X_t dt + d\bar{W}_t \end{cases}$$

Le filtre de Kalman-Bucy peut être utilisé pour résoudre ce problème, on dispose ainsi d'un très bon élément de comparaison.

Les paramètres du calcul sont:

- $b = -\frac{1}{4}$, $\sigma = 1$, $h = 1$;
- loi initiale gaussienne d'espérance 3, de variance 4 ;
- instant initial $t = 0$, instant final $t = 10$;
- pas d'incrémentabon $\Delta t = 0.05$
- nombre de points de Gauss : 2 .

Le résultat de la simulation des trajectoires de $\{X_t\}$ et $\{Y_t\}$ est représenté sur la figure 5. La meilleure estimée obtenue à partir de l'approximation de Gauss-Galerkin est représentée sur la figure 7. La meilleure estimée obtenue par le filtre de Kalman-Bucy est représentée sur la figure 8.

On constate donc qu'il y a très peu d'écart entre les estimations obtenues par les deux méthodes. Bien que d'après la remarque 3 p 14 le filtre de Kalman-Bucy et l'approximation de Gauss-Galerkin ne peuvent pas coïncider (car le filtre de Kalman-Bucy est optimale)

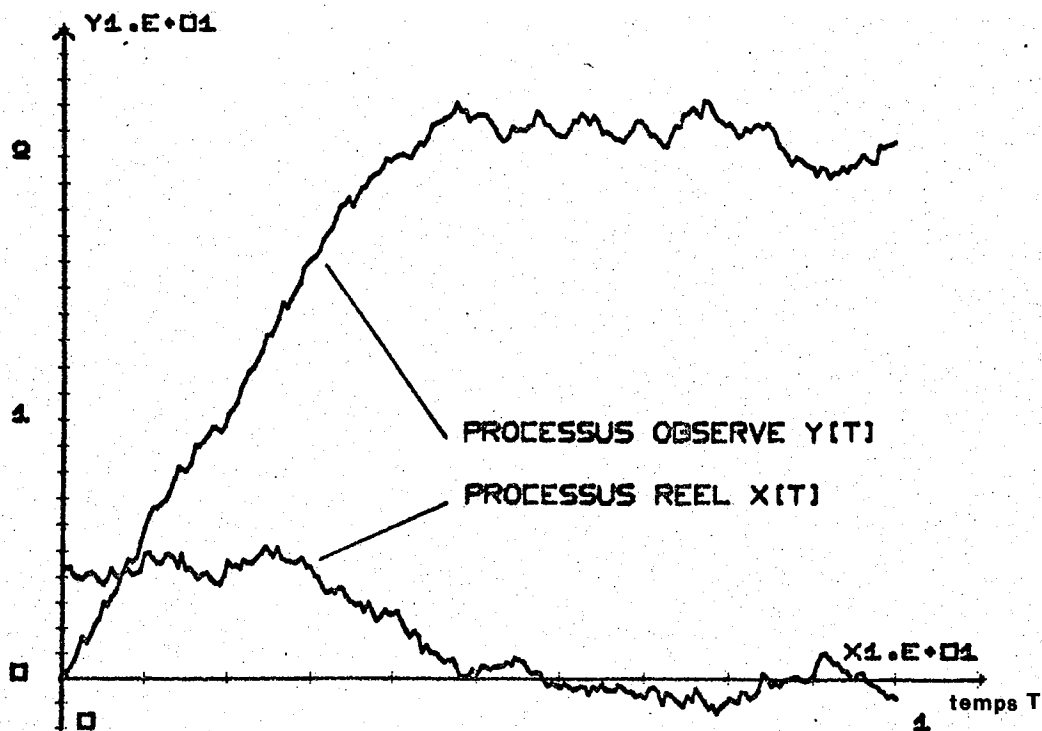


fig.5

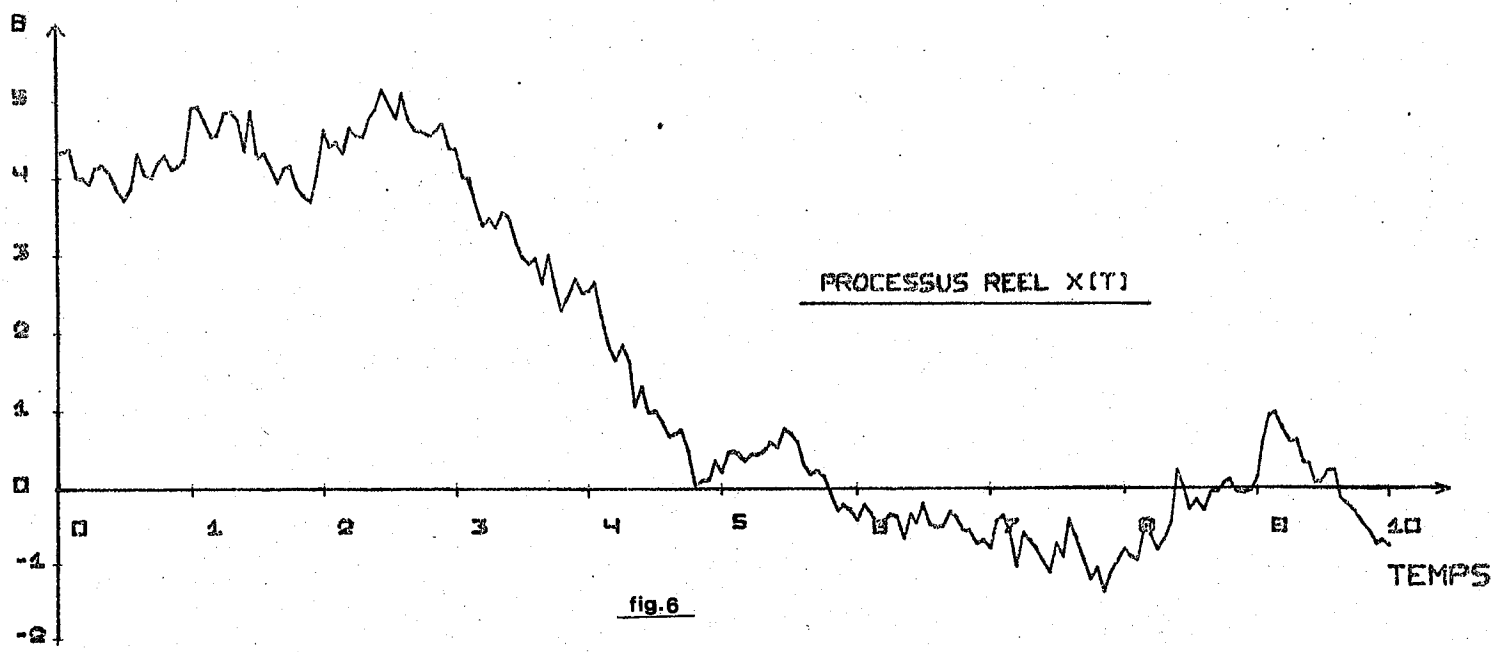


fig.6

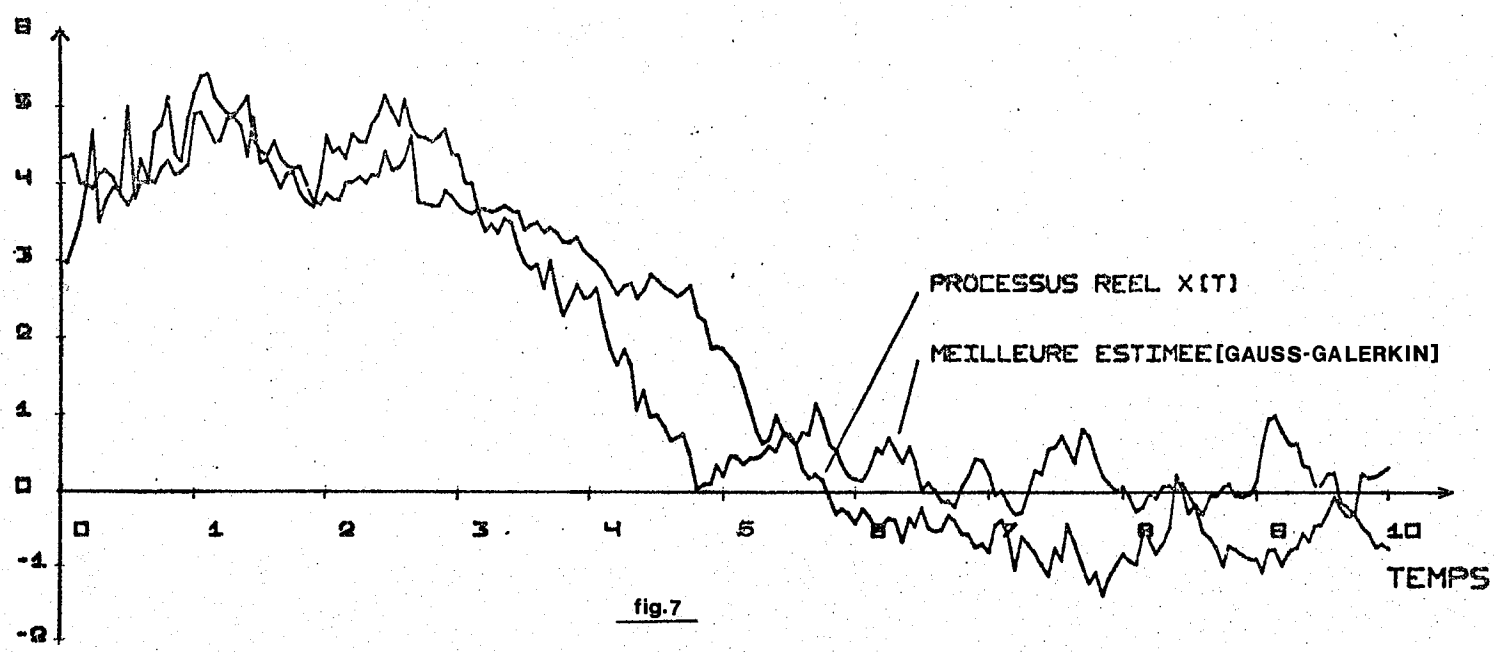


fig.7

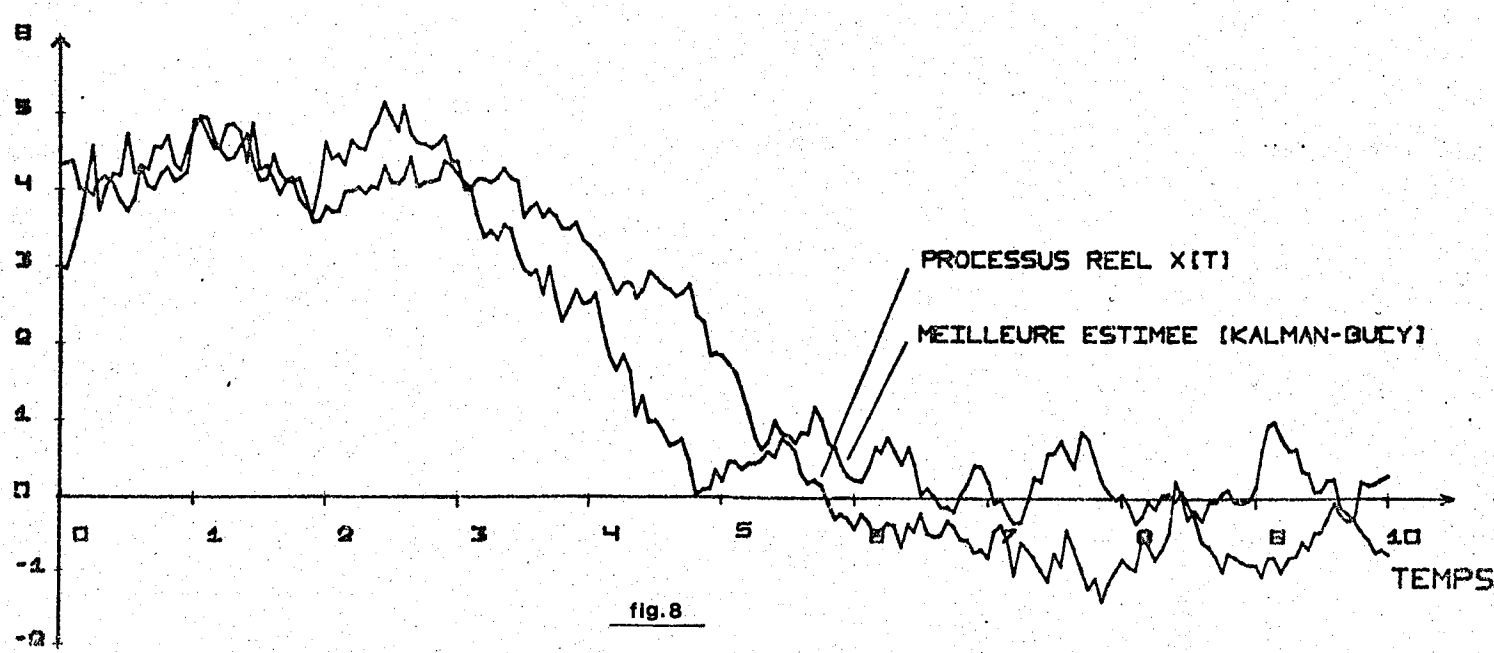


fig.8

Plusieurs essais ont mis en évidence le fait que les équations différentielles stochastiques III.(2.3) (que l'on doit intégrer pour obtenir l'approximation voulue) sont souvent très "rares" - L'exemple suivant a pour but d'étudier l'origine de cette difficulté.

● EXEMPLE 2

On se place toujours dans le cadre du filtrage linéaire gaussien - Considérons les équations:

$$\begin{cases} dX_t = -X_t dt + dW_t \\ X_0 \text{ donné de loi } N(3,5) \\ dY_t = h X_t dt + d\bar{W}_t \end{cases}$$

On a effectué des calculs pour trois valeurs différentes de h : $h=0$, $h=0.5$, $h=1$ ⁽¹⁾. Les équations ont été intégrées de $t=0$ à $t=6$ avec un pas $\Delta t=0.05$ (sauf pour $h=0$ où $\Delta t=0.3$). On a calculé une approximation à 2 points de Gauss.

La figure 9 représente l'évolution au cours du temps de la grille $\{x_t^1, x_t^2\}$ pour les trois valeurs de h , la figure 10 représente la trajectoire (simulée) de $\{X_t\}$ et la meilleure estimation obtenue à partir de l'approximation de Gauss-Galerkin, toujours dans les trois cas.

Sur la figure 9 on voit clairement apparaître l'origine des difficultés. En effet revenons un instant au problème de filtrage, à l'instant initial le filtre - décrit par l'équation de Zakai - ne dispose d'aucune information sur X_t (mis à part la loi de X_0), dans les premiers instants il utilise l'information qu'il reçoit pour corriger son estimation a priori. Ainsi

⁽¹⁾ pour $h=0$ on ne peut pas vraiment parler de "filtrage" puisque dans ce cas l'observation de $\{Y_s; 0 \leq s \leq t\}$ n'apporte aucune information sur X_t , d'ailleurs pour $h=0$ l'équation de Zakai n'est autre que l'équation de Fokker-Planck.

durant cette phase "d'accrochage" on voit la réponse du filtre augmentée en qualité, dans le sens où elle rend mieux compte du phénomène physique non observé (décrit par $\{X_e\}$). Cette période "d'accrochage" se traduit dans notre calcul par un rapprochement des points x_i plus ou moins brusque suivant que l'observation est "bonne" ou "mauvaise" (c'est à dire, dans notre exemple, suivant que h est plus ou moins grand.)

Ce phénomène n'apparaît pas dans le cas où $h=0$ (puisque dans ce cas le filtre ne dispose d'aucune information sur $\{X_e\}$), il commence à être visible pour $h=0.5$, enfin il devient très net pour $h=1$.

Par ailleurs le rapprochement des points x_i entraîne une autre difficulté numérique, en effet lorsque ces points sont trop rapprochés, la matrice A définie à la section IV-1-a (p15) devient mal conditionnée et le calcul des fonctions \overline{F}_1 & \overline{F}_2 risque de mal se faire. On reviendra dans la conclusion sur ce problème. ■

EVOLUTION DES GRILLES

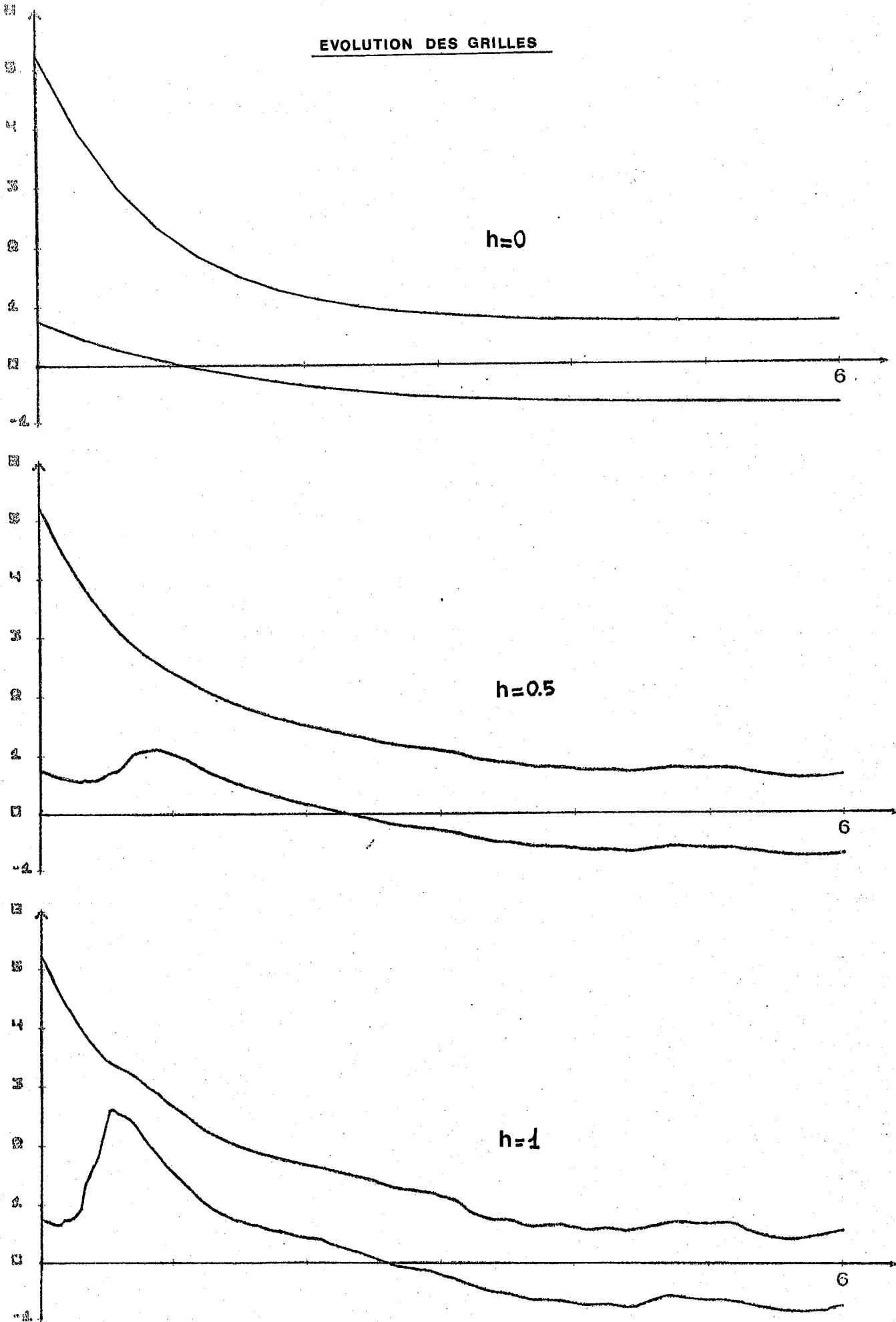


fig.9

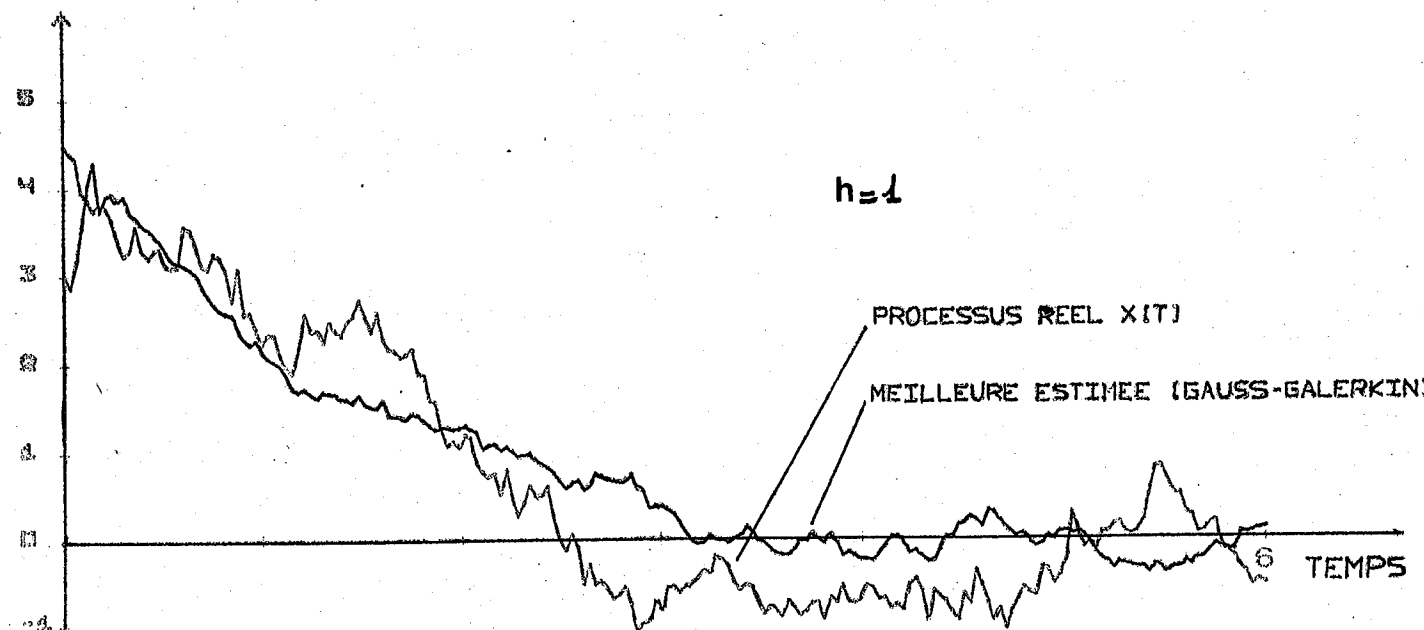
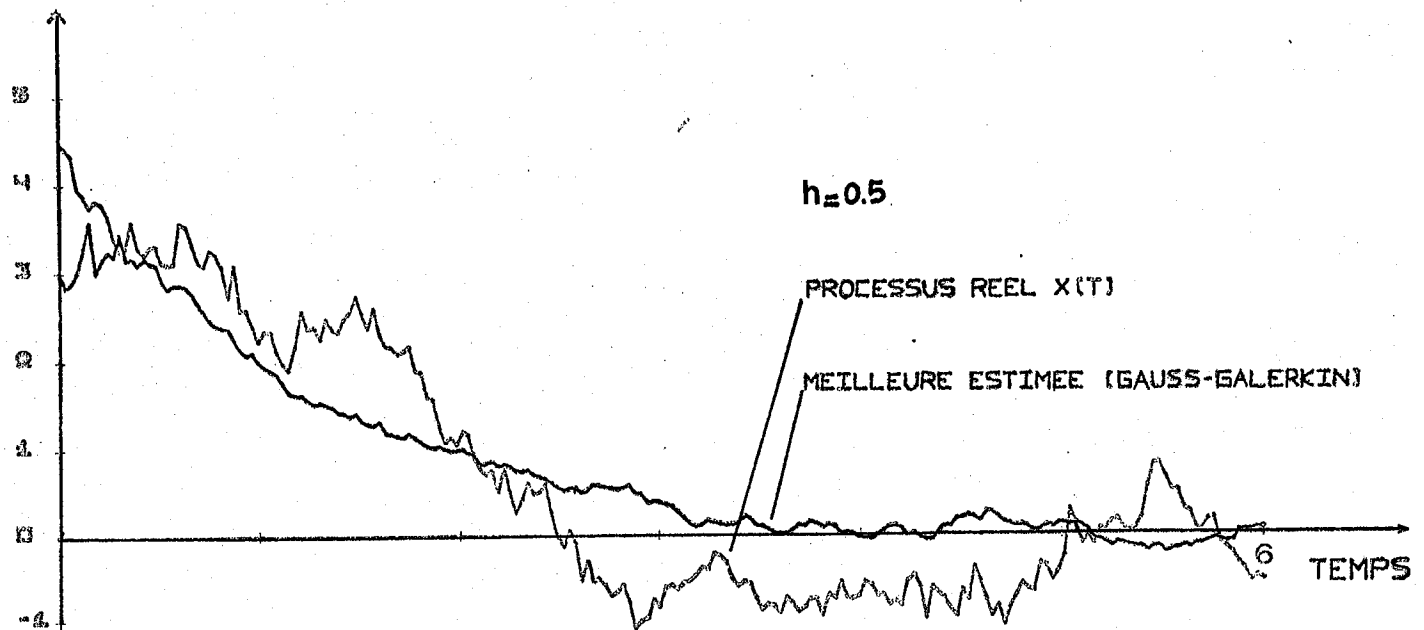
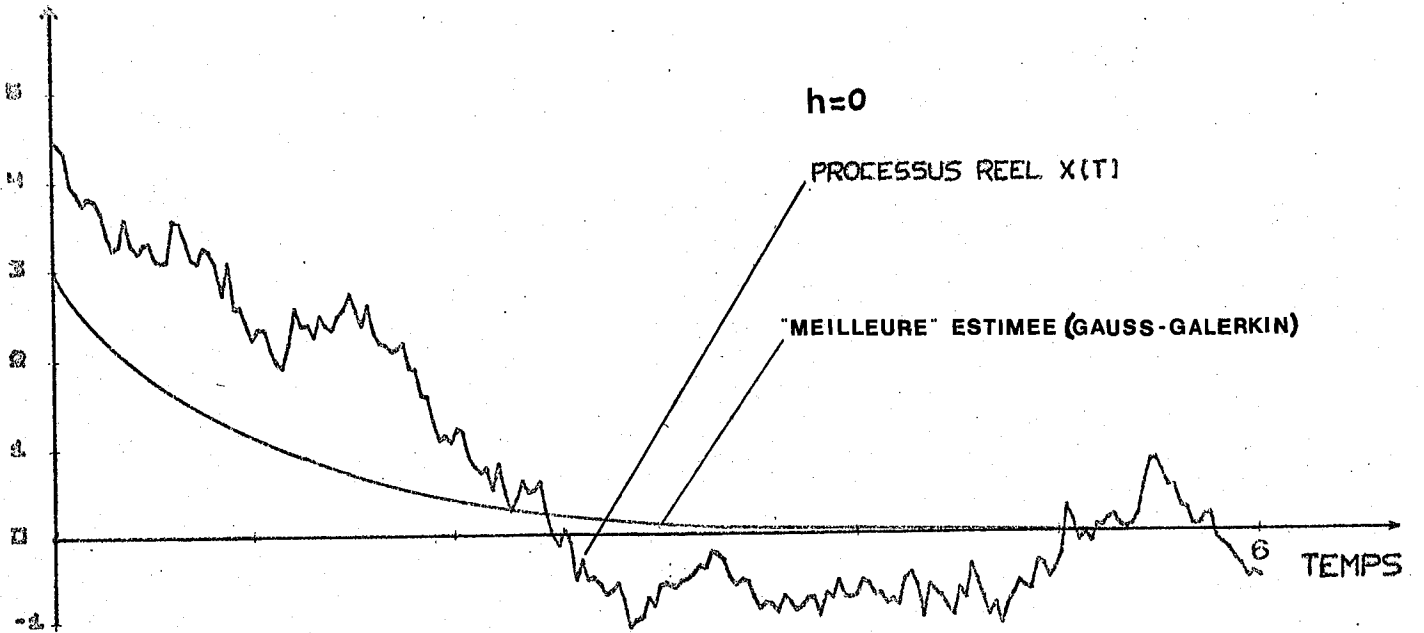


fig.10

● EXEMPLE 3

Considérons le problème de filtrage lié aux équations :

$$(\Delta) \begin{cases} dX_t = a X_t dt + b X_t dW_t \\ X_0 \text{ donné de loi gaussienne} \\ dY_t = h X_t dt + d\bar{W}_t \end{cases}$$

Pour ce type de problème on dispose du meilleur filtre linéaire, en effet notons $Q(s) = EX_s^2$ et $M_t = \int_0^t \frac{bX_s}{b\sqrt{Q(s)}} dW_s$. De

(Δ) on déduit les équations suivantes :

$$(\Delta\Delta) \begin{cases} dX_t = a X_t dt + b\sqrt{Q(t)} dM_t \\ X_0 \text{ donné de loi gaussienne} \\ dY_t = h X_t dt + d\bar{W}_t \end{cases}$$

$\{M_t\}$ est une martingale, mais ce n'est pas un processus de Wiener car $\{M_t^2 - t\}$ n'est pas une martingale.

Oublions pour un instant la définition de M_t et supposons que dans (ΔΔ) $\{M_t\}$ est un processus de Wiener (indépendant de X_0 & $\{\bar{W}_t\}$), on obtient alors un problème de filtrage linéaire gaussien, on montre que la solution de ce problème (obtenue par exemple à l'aide du filtre de Kalman-Bucy) est en fait la meilleure estimation linéaire de X_t sachant $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_s; 0 \leq s \leq t)$.

On a donc fait deux calculs, d'une part avec la méthode de Gauss-Galerkin, d'autre part avec ce filtre linéaire. Paramètres du calcul :

- $a = -0.1$, $b = 0.1$, $h = 1$;
- loi initiale $N(2, 1)$;
- instant initial $t = 0$, instant final $t = 20$;
- pas d'incrémentaire $\Delta t = 0.05$;
- nombre de points de Gauss : 2.

La figure 11 représente le résultat de la simulation la figure 13 l'évolution de la grille $\{x_t^1, x_t^2\}$, la figure 14 l'évolution de la grille qui aurait été

obtenue s'il n'y avait pas eu d'observation (i.e. si $h=0$). La comparaison de ces deux dernières figures fait bien apparaître la période "d'accrochage" et le rapprochement des points x_i . La figure 16 représente le résultat obtenu avec le meilleur filtre linéaire, la figure 17 celui obtenu par l'approximation de Gauss-Galerkin. Ainsi, comparé à la méthode de Gauss-Galerkin, le meilleur filtre linéaire donne des résultats un peu moins bons, ce qui était prévisible puisque la méthode de Gauss-Galerkin permet de résoudre le problème exact (\blacktriangle), alors que le meilleur filtre linéaire ne permet de résoudre qu'un problème approché.

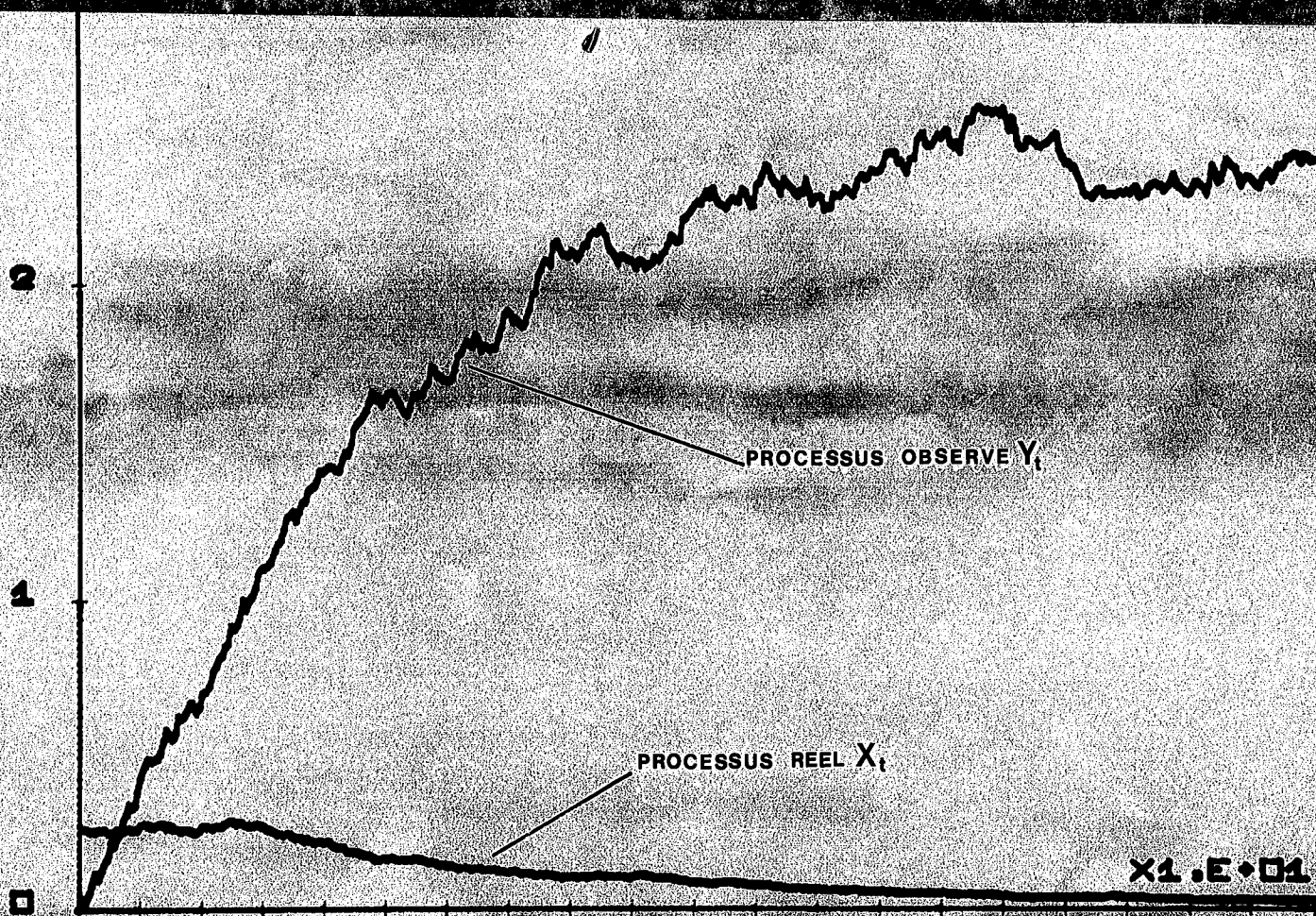


fig. 11

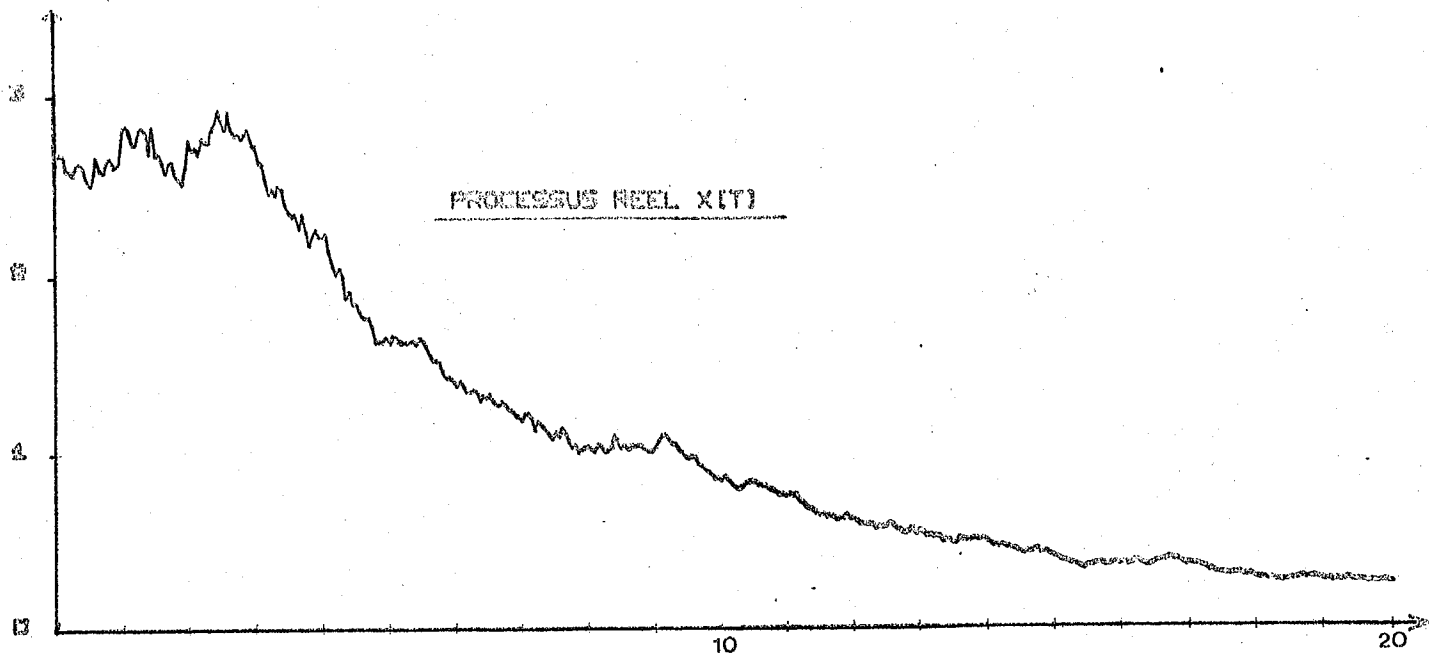


fig. 12

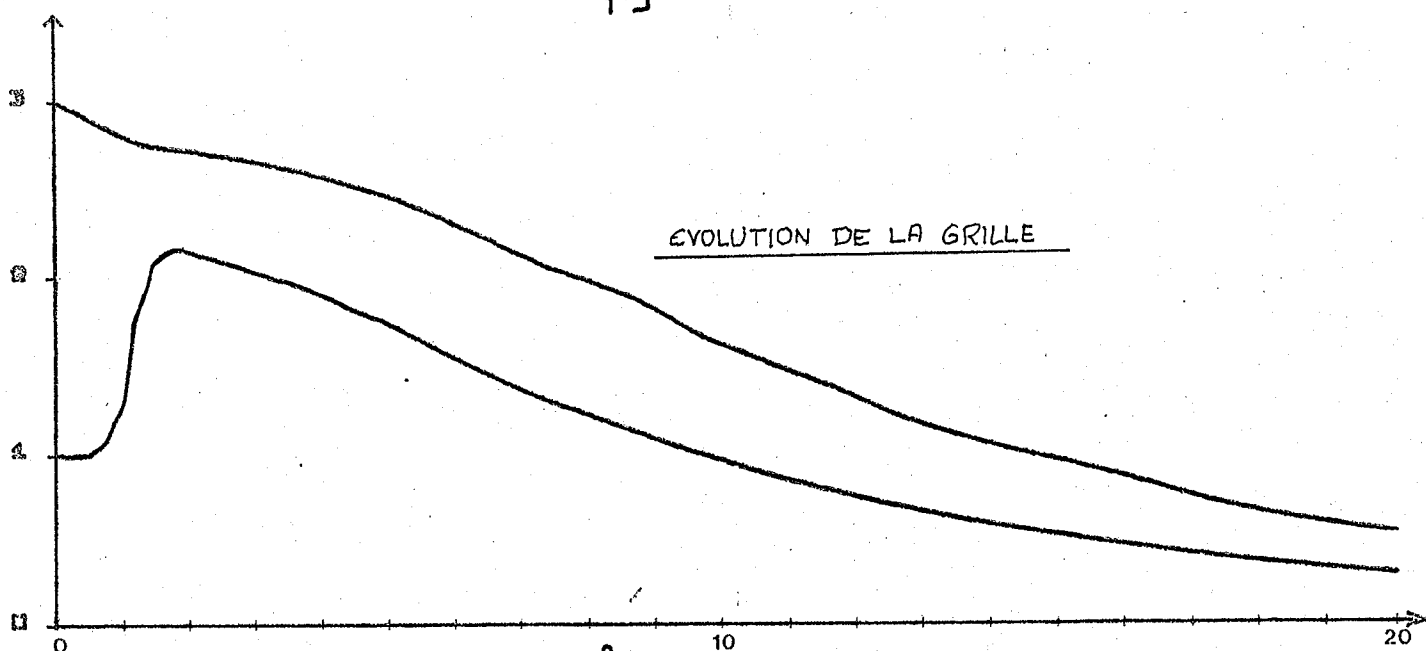


fig. 13

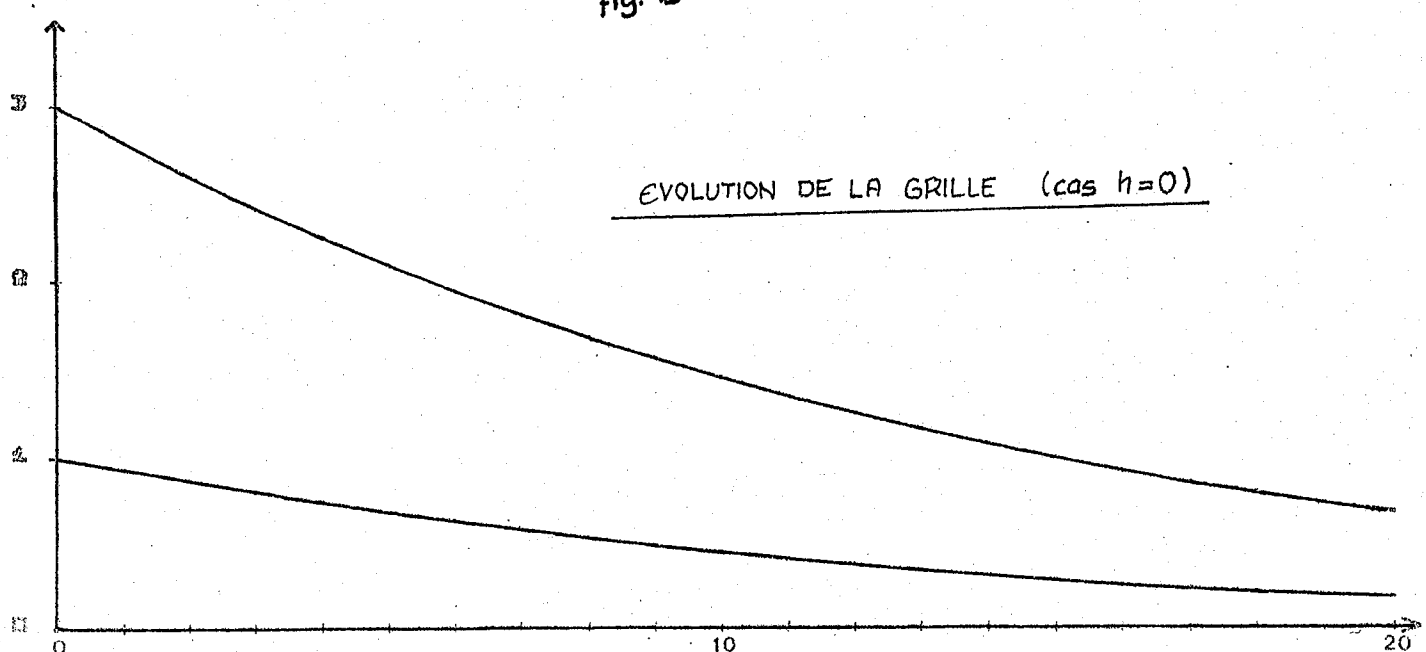


fig. 14

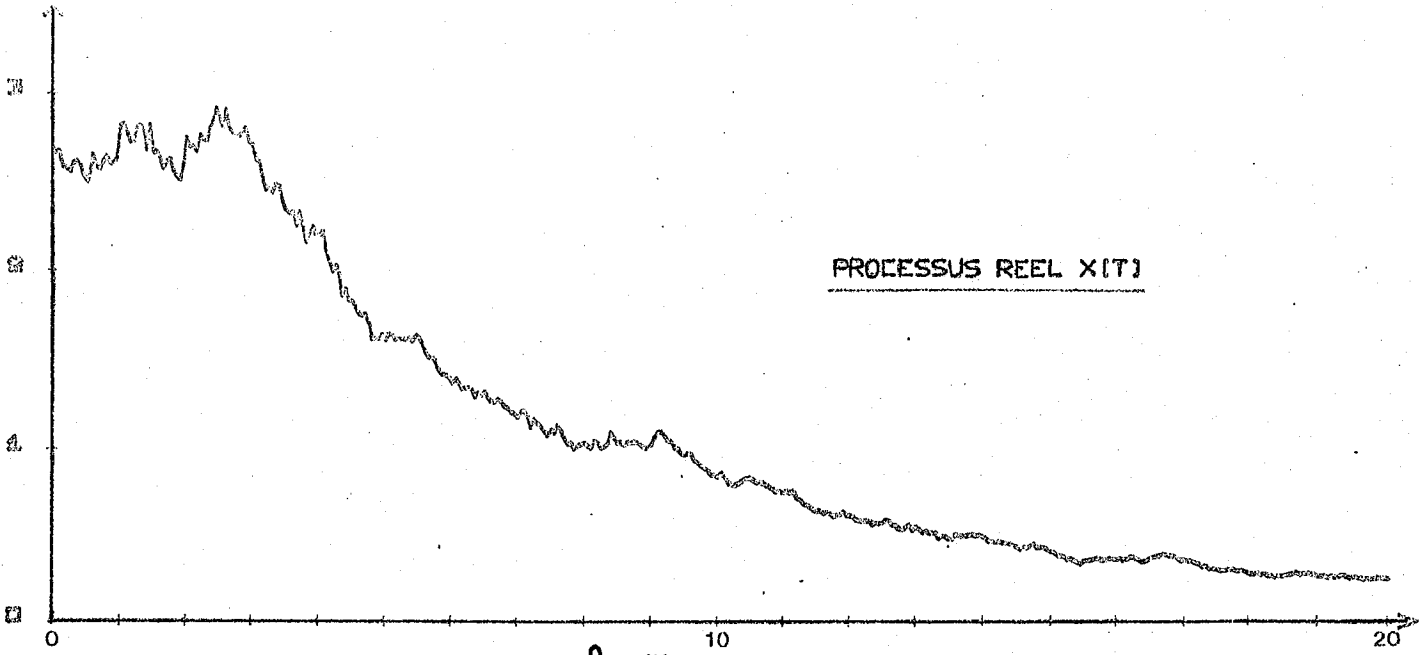


fig. 15

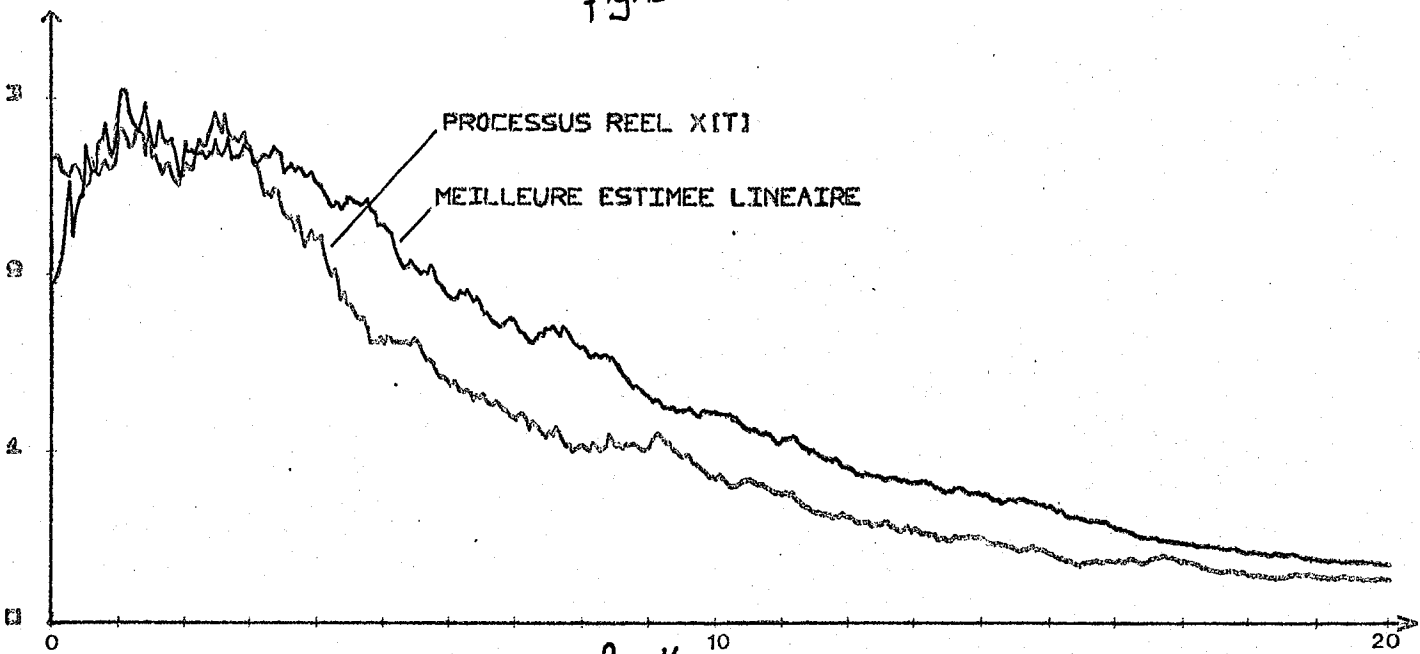


fig. 16

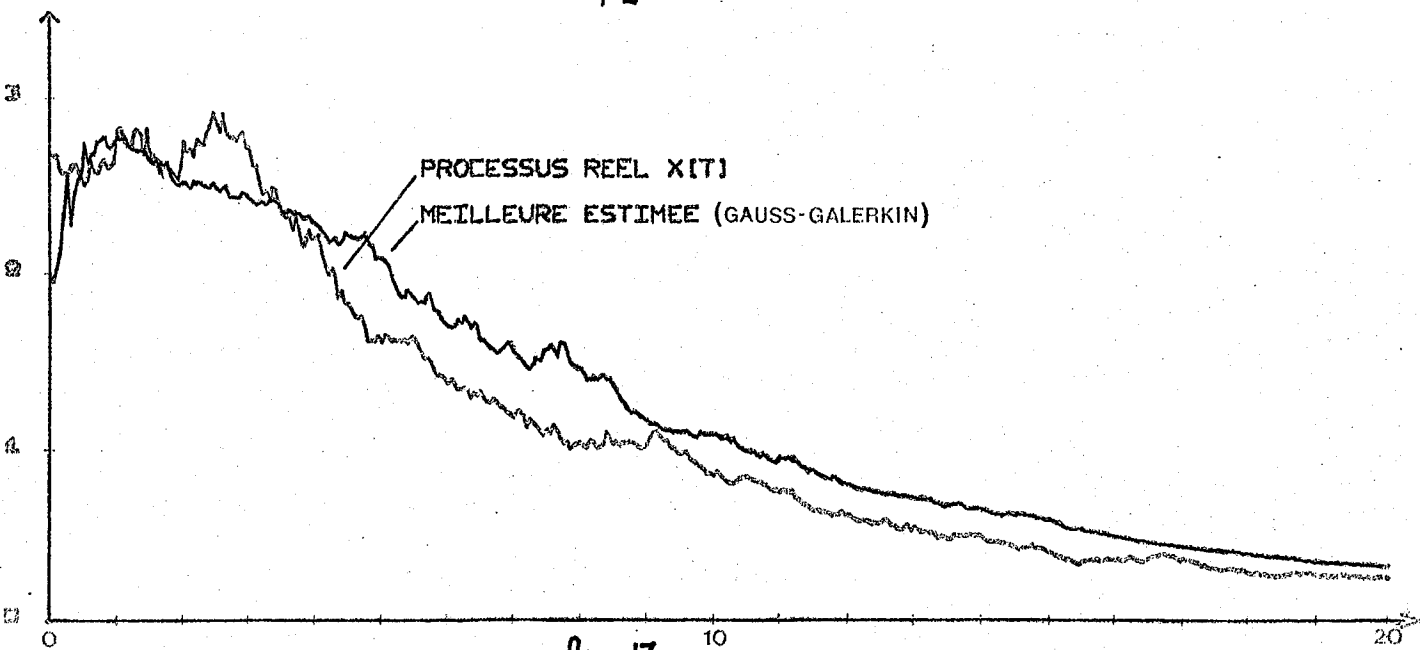


fig. 17

V. CONCLUSION

Cette méthode de résolution numérique de l'équation de Zakai fournit donc des résultats intéressants, pour un nombre très faible de points de discrétisation en espace. Néanmoins les équations différentielles stochastiques que l'on est amené à résoudre pour déterminer l'approximation de la solution de l'équation de Zakai, ont un caractère plutôt "raide". L'utilisation d'une méthode de résolution numérique avec contrôle du pas pour intégrer les équations différentielles considérées conduirait donc à une amélioration certaine de la méthode.

Par ailleurs au cours de l'intégration numérique des équations obtenues, chaque incrémentation en temps nécessite la résolution d'un système linéaire de matrice A . Le conditionnement de cette matrice est très mauvais lorsque deux points de la grille de discrétisation deviennent voisins. Or c'est précisément le cas lorsque l'on veut appliquer la méthode de Gauss-Galerkin à un problème de filtrage dans lequel l'observation est de bonne qualité. Une méthode qui permettrait d'éviter cette difficulté consisterait à transformer le problème initial (par un changement de variable) en un nouveau problème pour lequel les points de la grille de discrétisation resteraient à distance raisonnable les uns des autres.

Bibliographie

- [1] **D.A. DAWSON** GALERKIN APPROXIMATION OF NONLINEAR MARKOV PROCESSES (à paraître)
- [2] **A.H. STROUD** NUMERICAL QUADRATURE AND SOLUTION OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS
Springer - Verlag 1974
- [3] **E. PARDOUX** PROCESSUS DE DIFFUSION & FILTRAGE
Cours de D.E.A. 81/82 Université de Provence
- [4] **L. ARNOLD** STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATIONS: THEORY AND APPLICATIONS.
J. Wiley 1973.
- [5] **F. LE GLAND** ESTIMATION DE PARAMETRES DANS LES PROCESSUS STOCHASTIQUES, EN OBSERVATION INCOMPLETE / APP. LICATION A UN PROBLEME DE RADIOASTRONOMIE - thèse université PARIS IX 1981.