

MÉTHODE DE GRADIENT STOCHASTIQUE POUR LE CONTRÔLE DE SUSPENSIONS SEMI-ACTIVES

F. Campillo

INRIA Sophia Antipolis, 2004 route des Lucioles, 06565 Valbonne Cedex

S. Bellizzi

CNRS LMA, 31 chemin J. Aiguier, 13402 Marseille Cedex 9

Résumé Nous présentons une application du contrôle stochastique à la conception de lois de commande pour des amortisseurs à caractéristiques variables, dits semi-actifs. Le problème de contrôle stochastique associé est non linéaire, ergodique et ne peut se traiter avec les outils classiques du type LQG.

Pour une classe de lois de commandes paramétrées, nous utilisons un algorithme de gradient stochastique pour déterminer la meilleur commande. Nous présentons une application numérique aux véhicules routiers.

1 Introduction

Par opposition à un amortisseur classique, dit passif, un amortisseur semi-actif développe une force d'amortissement qui peut être modulée par variation du coefficient d'amortissement instantané (obtenu par une variation de la section des orifices qui règlent le débit d'huile à travers le piston). Le problème est donc de déterminer une loi de commande de ce coefficient d'amortissement qui optimise un critère donné (par exemple de confort).

Depuis les années soixantes dix de nombreux articles ont été publiés dans ce domaine. Mais ces travaux ne traitent que le cas linéaire et ne proposent que des loi sous-optimales (cf. par exemple Crosby-Karnopp [6], Margolis [7], Alanoly-Sankar [1])

Dans Campillo [4] ce problème est formulé comme un problème de contrôle stochastique, ergodique, non linéaire (équation d'état non linéaire et contrôle multiplicatif) pour lequel il existe une solution optimale solution d'une équation aux dérivées partielles (l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman). Cette équation est ensuite résolue numériquement à l'aide de schémas adaptés.

Cette méthode n'est toutefois utilisable que pour des systèmes de petite dimension. Pour des systèmes de dimension plus importante on peut chercher une loi de commande optimale dans une classe restreinte de contrôles, plus précisément dans une classe de contrôles paramétrés par $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ (pour un d fixé). Le problème est alors de déterminer le paramètre $\hat{\theta}$ optimal en utilisant, par exemple, un algorithme de type gradient stochastique. Dans Bellizzi–Bouc [2], une telle classe de lois de commande sous optimales est proposée. Cette classe s'inspire des résultats obtenus par la méthode optimale.

Dans cet article nous décrivons cette méthode de gradient stochastique. Afin d'alléger les notations nous travaillerons sur un modèle en dimension 2 (un degré de liberté).

2 Problème de contrôle associé à une suspension semi-active

On considère un système non linéaire à un degré de liberté (cf. figure 1 et table 1), pouvant modéliser un quart de véhicule, formé d'un ressort, d'un amortisseur et d'un frotteur supportant la masse. L'équation du mouvement s'écrit

$$m \ddot{y}_t + C(t) \dot{y}_t + K y_t + F \text{sign}(\dot{y}_t) = -m \ddot{e}_t . \quad (1)$$

où m , K et F sont donnés et l'entrée aléatoire \ddot{e}_t est modélisée par un bruit blanc gaussien d'intensité σ donnée, c'est à dire

$$\ddot{e}_t = \sigma \frac{dW_t}{dt}$$

où W_t est un processus de Wiener standard.

Dans ce modèle, la force de frottement sec est de type frottement pur de Coulomb ce qui n'est pas déraisonnable dans le cas de fortes sollicitations.

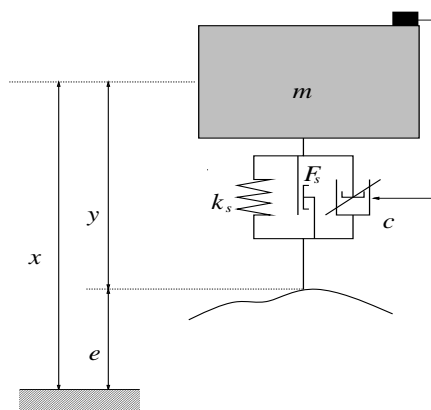


Figure 1: Modèle à un degré de liberté.

a	déplacement absolu de la masse m
y	déplacement relatif ($y = a - e$)
e	entrée aléatoire (profil de la route)
m	masse
$C(t)$	coefficient d'amortissement (contrôlé)
K	coefficient de raideur
F	force de frottement sec

Tableau 1: Notations.

Si le coefficient d'amortissement est constant (indépendant du temps), la suspension est dite passive. Dans le cas semi-actif, on agit sur la suspension par l'intermédiaire de ce coefficient, $C(t)$, qui est notre terme de contrôle. Le problème est de calculer une loi de commande en boucle fermée $C(t) = u(y_t, \dot{y}_t)$ qui minimise le critère de confort vibratoire suivant

$$J(u) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T |\ddot{a}_t|^2 dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T |\ddot{y}_t + \ddot{e}_t|^2 dt , \quad (2)$$

sous la contrainte

$$C_{min} \leq u(y_t, \dot{y}_t) \leq C_{max} , \quad (3)$$

avec $0 < C_{min} < C_{max} < \infty$. C_{min} (resp. C_{max}) correspond à l'ouverture minimale (resp. maximale) de l'orifice réglant le débit d'huile.

Contrairement à l'approche optimale on se restreint ici à une classe de contrôles paramétrés. Une classe possible (cf. [2]) est donnée par

$$c(\theta, y, \dot{y}) = C_{min} + \min \left(C_{max} - C_{min}, [\theta_1 + \theta_2 y \text{sign}(\dot{y})]^+ \right)$$

où $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ est un vecteur de paramètres réels à déterminer en fonction du critère (2). Cette classe a été suggérée par l'étude optimal et a permis de montrer l'efficacité d'un système semi-actif par rapport à un système purement passif.

Le problème de contrôle est de déterminer θ qui minimise le critère (2) sous les contraintes (1) et (3) et peut se résoudre numériquement par un algorithme de gradient.

La méthode que nous allons présenter peut s'appliquer à d'autres classes de contrôles paramétrés et pour d'autres critères (par exemple la limitation de l'amplitude des déplacements relatifs).

3 Gradient stochastique

On définit le vecteur d'état

$$X_t(\theta) = \begin{pmatrix} X_t^1(\theta) \\ X_t^2(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_t \\ \dot{y}_t \end{pmatrix} , \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \end{pmatrix}$$

et on pose

$$\theta = \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix}, \quad u(\theta, x) = \frac{1}{m} c(\theta, y, \dot{y}), \quad \beta = \frac{K}{m}, \quad \gamma = \frac{F}{m}.$$

Le système (1) s'écrit donc

$$dX_t(\theta) = a(\theta, X_t(\theta)) dt + b dW_t, \quad (4)$$

où

$$a(\theta, x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -u(\theta, x) x_2 - \beta x_1 - \gamma \text{signe}(x_2) \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix}$$

et la fonction coût devient

$$J(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta, X_t(\theta)) dt \quad (5)$$

où

$$f(\theta, x) = [u(\theta, x) x_2 + \beta x_1 + \gamma \text{signe}(x_2)]^2.$$

Dans Campillo–Pardoux [5] nous montrons que (4) admet une unique solution (au sens fort) et dans Bellizzi et al [3] nous montrons que la fonction coût (5) est bien définie, c'est-à-dire — pour tout θ — le processus $X_t(\theta)$ admet une unique mesure invariante $\mu_\theta^X(dx)$ et donc

$$J(\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} f(\theta, x) \mu_\theta^X(dx).$$

3.1 Processus gradient

Il s'agit maintenant de calculer le gradient de la fonction coût (5). On doit donc dans un premier temps calculer

$$Y_t(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} X_t(\theta).$$

L'équation d'état (4) s'écrit sous forme intégrale

$$X_t(\theta) = X_0 + \int_0^t \begin{bmatrix} X_s^2(\theta) \\ -u(\theta, X_s(\theta)) X_s^2(\theta) - \beta X_s^1(\theta) - \gamma \text{signe}(X_s^2(\theta)) \end{bmatrix} ds + b W_t.$$

La dérivation de cette dernière équation par rapport à θ est classique (noté que $u(\theta, x)$ n'est pas continu en x^2 mais $u(\theta, x) x_2$ l'est) à l'exception de

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^t \text{signe}(X_s^2(\theta)) ds. \quad (6)$$

On introduire la notion de *temps local* du processus $X_t^2(\theta)$ en 0 définit par

$$L_t = \sigma^2 \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \text{-p.s.} \int_0^t \frac{1}{2\varepsilon} \mathbf{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(X_s^2(\theta)) ds. \quad (7)$$

Le temps local L_t peut s'écrire formellement $\sigma^2 \int_0^t \delta(X_s^2(\theta)) ds$ (où δ est la mesure de Dirac en 0), L_t est une mesure du temps d'occupation du processus $X_t^2(\theta)$ en 0. La dérivation (6) peut s'écrire formellement

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \int_0^t \text{signe}(X_s^2(\theta)) ds = \int_0^t 2 \delta(X_s^2(\theta)) Y_s^2(\theta) ds = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^t Y_s^2(\theta) dL_s .$$

On peut en fait montrer que $Y_t(\theta)$ est solution de l'équation

$$dY_t(\theta) = A(\theta, X_t(\theta)) Y_t(\theta) dt + B Y_t(\theta) dL_t + C(\theta, X_t(\theta)) dt , \quad (8)$$

avec $Y_0 \equiv 0$ et

$$A(\theta, x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta - u_{x_1}(\theta, x) x_2 & -u(\theta, x) - u_{x_2}(\theta, x) x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2\gamma}{\sigma^2} \end{pmatrix}, \quad C(\theta, x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -u_\theta(\theta, x) x_2 \end{pmatrix},$$

où u_{x_1} , u_{x_2} , u_θ désignent respectivement les dérivées partielles de u par rapport à x_1 , x_2 et θ .

3.2 Gradient de la fonction coût

Soit $g(\theta, x)$ défini par $f(\theta, x) = [g(\theta, x)]^2$, les dérivées partielles de f sont données par

$$f_\theta(\theta, x) = 2g(\theta, x) u_\theta(\theta, x) x_2$$

$$f_{x_1}(\theta, x) = 2g(\theta, x) (u_{x_1}(\theta, x) x_2 + \beta)$$

$$f_{x_2}(\theta, x) = 2g(\theta, x) [u_{x_2}(\theta, x) x_2 + u(\theta, x) + 2\gamma \delta(x_2)]$$

$$= 2g(\theta, x) [u_{x_2}(\theta, x) x_2 + u(\theta, x)] + 4\gamma \beta x_1 \delta(x_2) .$$

On pose

$$\tilde{f}_{x_1}(\theta, x) = f_{x_1}(\theta, x)$$

$$\tilde{f}_{x_2}(\theta, x) = 2g(\theta, x) [u_{x_2}(\theta, x) x_2 + u(\theta, x)]$$

ainsi $f_{x_2}(\theta, x) = \tilde{f}_{x_2}(\theta, x) + 4\gamma \beta x_1 \delta(x_2)$. Le gradient de la fonction coût s'écrit donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta) &= \frac{\partial}{\partial \theta} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\theta, X_t(\theta)) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial}{\partial \theta} [f(\theta, X_t(\theta))] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T [f_\theta(\theta, X_t(\theta)) + \tilde{f}_x(\theta, X_t(\theta)) Y_t(\theta) \\ &\quad + 4\gamma \beta X_1^t(\theta) \delta(X_t^2(\theta)) Y_t^2(\theta)] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_0^T [f_\theta(\theta, X_t(\theta)) + \tilde{f}_x(\theta, X_t(\theta)) Y_t(\theta)] dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T 4\gamma \beta X_1^t(\theta) \gamma Y_t^2(\theta) dL_t \right] \end{aligned}$$

Posons

$$F_1(\theta, x, y) = f_\theta(\theta, x) + \tilde{f}_x(\theta, x) y, \quad F_2(x, y) = 4 \beta \gamma x_1 y_2 .$$

Le gradient de la fonction coût est donc

$$\frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left[\int_0^T F_1(\theta, X_t(\theta), Y_t(\theta)) dt + \int_0^T F_2(X_t(\theta), Y_t(\theta)) dL_t \right] . \quad (9)$$

3.3 Algorithme de gradient

Soit $n \geq 1$, on pose $\Delta t = 1/n$ et $t_k = k \Delta t$. L'algorithme de gradient s'écrit

$$\begin{aligned} \theta_{k+1} = \theta_k - \rho_k \left[F_1(\theta_k, X_{t_{k+1}}(\theta_k), Y_{t_{k+1}}(\theta_k)) \Delta t \right. \\ \left. + F_2(X_{t_{k+1}}(\theta_k), Y_{t_{k+1}}(\theta_k)) \Delta L_k \right] \end{aligned} \quad (10)$$

où

$$\Delta L_k = L_{t_{k+1}} - L_{t_k}$$

et $(X_{t_{k+1}}(\theta_k), Y_{t_{k+1}}(\theta_k))$ est donnée par

$$dX_t(\theta) = a(\theta, X_t(\theta)) dt + b dW_t, \quad (11)$$

$$dY_t(\theta) = A(\theta, X_t(\theta)) Y_t(\theta) dt + B Y_t(\theta) dL_t + C(\theta, X_t(\theta)) dt, \quad (12)$$

en prenant $\theta = \theta_k$ sur l'intervalle $t \in]t_k, t_{k+1}]$.

Pour démontrer la convergence des algorithmes de gradient il faut choisir $\rho_k = 1/k$. En pratique ce choix n'est pas judicieux : en effet il entraîne une convergence très lente de l'algorithme, qui se traduit numériquement par une convergence "artificielle" vers une valeur non optimale.

Nous utilisons ici un gain matricielle de la forme

$$\rho_k = \begin{pmatrix} \rho_k^1 & 0 \\ 0 & \rho_k^2 \end{pmatrix}$$

avec

$$\rho_k^i = a_i + \frac{b_i}{\max(1, k - k_i)}, \quad i = 1, 2$$

où a_i, b_i, k_i sont des paramètres à choisir. L'algorithme ainsi obtenu n'est pas exactement un algorithme de gradient (on utilise une direction de descente différente de celle du gradient), mais il permet une plus grande souplesse d'utilisation.

3.4 Discrétisation

Pour utiliser l'algorithme (10), il faut simuler les processus $(X_t(\theta), Y_t(\theta))$ donnés en (11,12). On utilise pour cela un schéma de discrétisation d'Euler et on prend comme approximation de ΔL_k

$$\Delta L_k \simeq \begin{cases} |X_{t_{k+1}}^2(\theta_k)| & \text{si } X_{t_{k+1}}^2(\theta_k) X_{t_k}^2(\theta_k) < 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(cf. [5] pour plus de détails).

4 Résultats numériques

On utilise les valeurs numériques suivantes

$$\begin{aligned} m & 100 \text{ Kg} \\ K & 26000 \text{ N/m} \\ F & 85 \text{ N} \\ \sigma & 0.5 \end{aligned}$$

et on suppose que $C_{min} = 300$ (Ns/m), $C_{max} = +\infty$.

On traite les trois cas suivants

- Cas passif : on détermine le meilleur contrôle constant

$$u(\theta, x) = \theta \in [C_{min}, +\infty[.$$

- Cas semi-actif 1 : on détermine loi de commande de la forme

$$u(\theta, x) = C_{min} + [\theta_2 x_1 \text{signe}(x_2)]^+$$

(on suppose que $\theta_1 = 0$).

- Cas semi-actif 2 : on détermine loi de commande de la forme

$$u(\theta, x) = C_{min} + [\theta_1 + \theta_2 x_1 \text{signe}(x_2)]^+ .$$

Les résultats de simulations sont présentés dans le tableau 2.

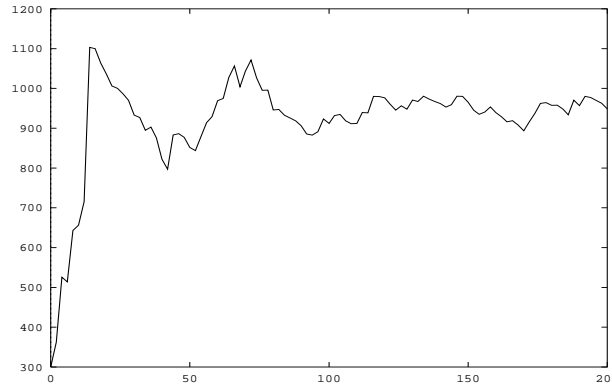


Figure 2: Cas passif, tracé de $t_k \rightarrow \theta_k^1$

5 Conclusion

Nous avons étudié un problème de contrôle stochastique non linéaire où le contrôle est choisi parmi une classe de lois de commande paramétrées. A partir du calcul du gradient de la fonctionnelle de coût, un algorithme de type gradient stochastique est développé. Cet algorithme c'est révélé un outil efficace pour l'évaluation de loi de commandes et s'applique à une grande classe de problèmes.

	passif	semi-actif 1	semi-actif 2
a_1	0.8	–	1
b_1	1	–	4
n_1	40000	–	20000
θ_1^{ini}	300	–	1000
a_2	–	100000	100000
b_2	–	200000	300000
n_2	–	40000	20000
θ_2^{ini}	–	1000	1000
itérations	100000	100000	200000
Δt	0.002	0.002	0.002
$\hat{\theta}_1$	951	–	387
$\hat{\theta}_2$	–	226347	170708
coût $J(\hat{\theta})$	3.81	3.41	3.39
σ_x (m)	0.0060	0.0076	0.0073
$\sigma_{\dot{x}}$ (m/s ²)	0.0093	0.0094	0.0092

Tableau 2: résultats de simulation

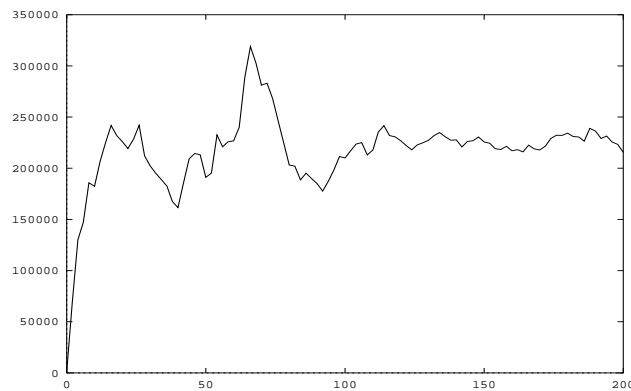
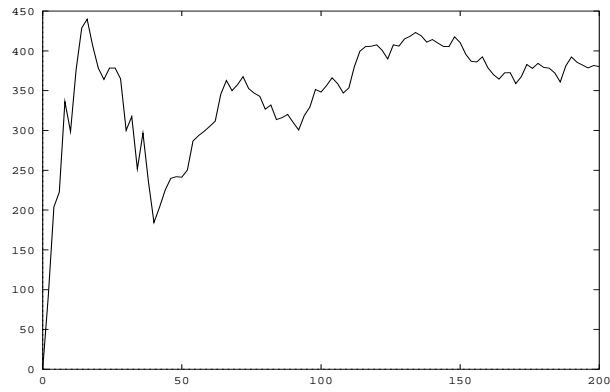
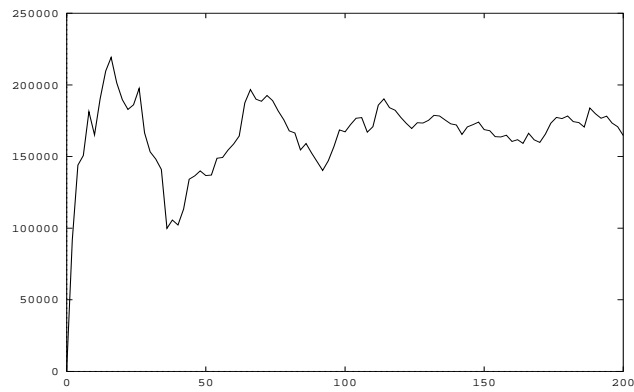


Figure 3: Cas semi-actif 1, tracé de $t_k \rightarrow \theta_k^2$



$$k \rightarrow \theta_k^1$$



$$k \rightarrow \theta_k^2$$

Figure 4: Cas semi-actif 2, tracé de $t_k \rightarrow \theta_k^1$ et $t_k \rightarrow \theta_k^2$

Références

- [1] J. ALANOLY and S. SANKAR. Semi-active force generators for shock isolation. *Journal of Sound and Vibration*, **126**(1):145–156, 1988.
- [2] S. BELLIZZI and R. BOUC. Adaptive control for semi-active isolators. In S. Sankar, editor, *12th Conference on Mechanical Vibration and Noise*, ASME, September 1989.
- [3] S. BELLIZZI, R. BOUC, F. CAMPILLO, and E. PARDOUX. Contrôle optimal semi-actif de suspension de véhicule. In A. Bensoussan and J.L. Lions, editors, *Analysis and Optimization of Systems*, pages 689–699, INRIA, Antibes, Lecture Notes in Control and Information Sciences **111**, 1988.
- [4] F. CAMPILLO. Optimal ergodic control for a class of nonlinear stochastic systems. In *Proceedings of 28th Conference on Decision and Control*, pages 1190–1195, IEEE, Tampa, Florida, December 1989.
- [5] F. CAMPILLO and E. PARDOUX. Numerical methods in ergodic optimal stochastic control and application. (à paraître).
- [6] M.J. CROSBY and D.C. KARNOPP. The active damper – a new concept for shock and vibration control. *The Shock and Vibration Bulletin*, **43**(4):119–133, 1973.
- [7] D.L. MARGOLIS. Semi-active heave and pitch control for ground vehicle. *Vehicle System Dynamics*, **11**:31–42, 1982.