

Contrôle Optimal Semi-Actif de Suspension de Véhicule*

Serge Bellizzi, Robert Bouc

Fabien Campillo, Etienne Pardoux

LMA-CNRS

INRIA centre de Sophia Antipolis

31, Chemin Joseph Aiguier

Route des Lucioles

13402 Marseille cedex 9

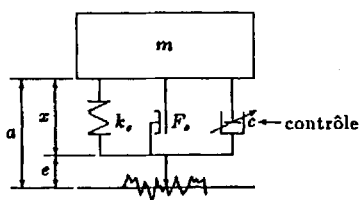
06565 Valbonne Cedex

Abstract

We present the problem of controlling the shock-absorber of a road-vehicle. We consider here a simplified one-dimensional model (which would be realistic as a model of the seat of a truck driver). The shock-absorber is controllable in the sense that one of its characteristics can be modified as time evolves. We look for an optimal feedback based on the position and velocity of the seat, such as to optimize the comfort, i.e. to minimize a given norm of the acceleration of the seat. We formulate the problem as an ergodic stochastic control problem, where the randomness comes in from the road surface. We compute an approximation of the optimal feedback by solving numerically the Hamilton-Jacobi-Bellman equation associated with our stochastic control problem. The optimal control is compared with two classes of sub-optimal policies.

1 Introduction

On considère un système non linéaire à un degré de liberté (cf. figure 1) avec frottement sec. Ce système comporte un amortisseur à caractéristique variable qu'il est possible de piloter à partir des grandeurs mesurées sur la structure sollicitée en situation réelle. On se pose le problème de la commande optimale, par rapport à un critère moyen de confort dynamique, en régime stationnaire. On étudie aussi des commandes sous-optimales et on compare les résultats avec un système purement passif. Ce système est soumis à une entrée aléatoire stationnaire \tilde{e} . L'équilibre des forces conduit à l'équation du mouvement



- a déplacement absolu
- x débattement relatif
- e entrée aléatoire (profil de la route)
- m masse
- c coefficient d'amortissement variable
- k_s coefficient de raideur
- F_s coefficient de frottement sec

Figure 1: modèle à un degré de liberté.

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k_s x + z = -m \ddot{e}, \quad (1)$$

où x désigne le débattement relatif. La force de rappel $k_s x + z$, se décompose en une partie linéaire $k_s x$, et une partie non linéaire z décrite par le modèle d'hystérésis (modèle de frottement sec adouci) [1,2]

$$\dot{z} + \beta (|\dot{x}|z + \dot{x}|z|) = (k - k_s) \dot{x}, \quad (2)$$

*travail effectué dans le cadre du contrat H6.10.601/INRIA/17 INRIA-Renault Recherches et Innovations

où $\beta > 0$ et $k > k_s > 0$. Pour les "grands débattements", z se comporte comme

$$z = F_s \operatorname{sgn}(\dot{x}), \quad (3)$$

terme de frottement de Coulomb, avec $F_s = (k - k_s)/2\beta$. La force d'amortissement s'écrit $c \dot{x}$ où $c > 0$ est le coefficient d'amortissement instantané lié au diamètre d'ouverture de l'orifice qui règle le débit d'huile dans l'amortisseur. C'est sur ce terme qu'agit le contrôle. On peut introduire un modèle permettant de tenir compte du temps de réponse du système

$$T_r \dot{c} + c = u, \quad (4)$$

où u désigne cette fois le contrôle. Si on néglige le temps de réponse (i.e. $T_r = 0$), on obtient $c = u$.

L'excitation aléatoire, $-m \ddot{x}$, s'exprime en fonction de l'accélération \ddot{e} à la base de la structure. Cette accélération résulte du déplacement, à vitesse constante d'un véhicule sur une route dont le profil est aléatoire.

Le modèle général est donc décrit par les équations (1,2,4). Le problème est de déterminer une loi de commande u telle que la solution du système défini par les équations (1,2,4) minimise un critère qui sera relié au confort vibratoire. Dans ce modèle simplifié, les effets de butée ne sont pas pris en compte.

2 Le Contrôle Optimal

On considère ici le modèle (1,3,4) où l'on néglige le temps de réponse ($T_r = 0$). On obtient un modèle simplifié d'une seule équation

$$m \ddot{x} + u \dot{x} + k_s x + F_s \operatorname{sgn}(\dot{x}) = -m \ddot{e}, \quad (5)$$

\ddot{e} est modélisée par un bruit blanc $\ddot{e} = -\sigma dW/dt$, W est un processus de Wiener standard. Cette modélisation a été choisie pour simplifier les études mathématique et numérique. Un bruit à bande limitée est plus proche de la réalité physique mais des essais numériques en cours montrent que l'hypothèse "bruit blanc" ne change guère la forme du contrôle optimal.

2.1 Le Problème de Contrôle Stochastique

Si on pose $X \triangleq \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ l'équation (5) s'écrit sous forme bidimensionnelle

$$dX_t = \begin{pmatrix} b_1(X_t) \\ b_2(u, X_t) \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma \end{pmatrix} dW_t, \quad (6)$$

avec

$$b_1(X) \triangleq \dot{x}, \quad b_2(u, X) \triangleq -\frac{1}{m} (u \dot{x} + k_s x + F_s \operatorname{sgn}(\dot{x})).$$

Le but est d'agir sur le système (6) par l'intermédiaire du contrôle u afin de minimiser une norme de l'accélération absolue $\ddot{a} = \ddot{x} + \ddot{e}$ qui est ici donnée par $\ddot{a} = d\dot{x}/dt - \sigma dW/dt = b_2(u, X)$. A une loi de commande $u : X \rightarrow u(X) = u(x, \dot{x})$, on associe la fonction coût

$$J(u) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T f(u, X_t) dt, \quad (7)$$

où

$$f(u, X) \triangleq |b_2(u(X), X)|^2 = \frac{1}{m^2} |u(X) \dot{x} + k_s x + F_s \operatorname{sgn}(\dot{x})|^2. \quad (8)$$

Ce coût est directement lié au confort du conducteur. Comme le corps humain n'est pas uniformément sensible à toutes les fréquences, un critère fonction de \bar{a} mais "pondéré" en fréquence serait plus juste. L'élaboration d'un tel critère est en cours de réalisation (cf. paragraphe 4 pour un critère fréquentiel lié à la notion de *transmissibilité*).

Le problème de contrôle stochastique est de déterminer une loi de commande \hat{u} telle que

$$J(\hat{u}) = \min_{u \in \mathcal{U}} J(u), \quad (9)$$

où \mathcal{U} désigne l'ensemble des lois de commande u telles que $0 \leq u(X) \leq \bar{u}$, (\bar{u} grand).

On se ramène à un problème de contrôle stochastique avec un coût de type ergodique [10]. Dans les paragraphes suivants on se propose de calculer le contrôle optimal via la résolution numérique de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

De telles résolutions ont rarement été menées sur des exemples concrets. On pourra trouver dans [4,9] des études numériques de l'équation du contrôle optimal dans des situations un peu différentes.

2.2 Discrétisation du Problème

On se limite à un domaine rectangulaire $D = [x_{\min}, x_{\max}] \times [\dot{x}_{\min}, \dot{x}_{\max}] \subset \mathbb{R}^2$ (avec $x_{\max} = -x_{\min} > 0$ et $\dot{x}_{\max} = -\dot{x}_{\min} > 0$). On discrétise D en prenant n_x points dans la direction x et $n_{\dot{x}}$ dans la direction \dot{x} . On obtient ainsi une grille G de $d = n_x \times n_{\dot{x}}$ points en espace.

On considère le générateur infinitésimal associé à la diffusion X_t solution de (6)

$$\mathcal{L}(u) \phi(X) \triangleq b_1(X) \frac{\partial \phi(X)}{\partial x} + b_2(u, X) \frac{\partial \phi(X)}{\partial \dot{x}} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 \phi(X)}{\partial \dot{x}^2}. \quad (10)$$

Cet opérateur est approché par différences finies [8,6]

$$\mathcal{L}(u) \phi(X_i) \simeq [L(u) \phi]_i,$$

où X_i est le i ème élément de la grille G , dans le membre de droite $L(u)$ est une matrice de taille $d \times d$, ϕ est le vecteur de \mathbb{R}^d de composantes $\phi_i = \phi(X_i)$, $i = 1, \dots, d$ (1).

Les schémas aux différences utilisés sont tels que la matrice $L(u)$ est le générateur infinitésimal d'un processus de Markov \tilde{X}_t en temps continu et à espace d'état fini G [8,6]. On choisit des conditions aux bords de type "réflexion". Le choix précis de ces conditions n'est pas très important car le domaine de discrétisation est suffisamment grand et le support de la loi de X_t est concentré autour de l'origine. Toutefois, on doit s'assurer qu'avec les conditions choisies tous les états du processus de Markov \tilde{X}_t communiquent.

Le problème de contrôle à état discret se formule donc de la manière suivante: soit \tilde{X}_t un processus de Markov en temps continu et à espace d'état $G = \{X_i; i = 1 \dots d\}$ fini et de générateur infinitésimal $L(u)$; on veut minimiser la fonction coût (notée elle aussi J par abus de notation)

$$J(u) \triangleq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T f(u, \tilde{X}_t) dt, \quad (11)$$

où f est définie en (8).

2.3 L'Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

Le problème de contrôle ergodique discret admet une solution au sens suivant: on considère (v, ρ) le couple solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\min_{0 \leq u_i \leq \bar{u}} [L(u) v + f(u)]_i = \rho, \quad i = 1, \dots, d, \quad (12)$$

¹ on utilisera la notation: $f_i(u) = f(u, X_i)$, $\mu_i(u) = \mu(u, X_i)$, $u_i = u(X_i)$, $i = 1, \dots, d$.

(la i ème ligne du vecteur $L(u)v + f(u)$ ne dépend que de u_i) avec $(v, \rho) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. Le contrôle optimal \hat{u} est alors donné par

$$\hat{u}_i = \hat{u}(X_i) = \text{Arg} \min_{0 \leq u_i \leq \bar{u}} [L(u)v + f(u)]_i, \quad i = 1, \dots, d. \quad (13)$$

De plus ρ est le coût optimal, i.e. $\rho = J(\hat{u})$.

Pour résoudre l'équation (12), on a utilisé l'algorithme d'itérations sur les politiques [7,5]: on se donne un contrôle initial $u^{(0)}$, et le passage de $u^{(k)}$ à $u^{(k+1)}$ se fait en deux étapes

1. Calcul de $(v^{(k)}, \rho^{(k)})$ solution du système linéaire

$$L(u^{(k)})v^{(k)} + f(u^{(k)}) = \rho^{(k)}. \quad (14)$$

2. Calcul de $u^{(k+1)}$ solution de

$$u_i^{(k+1)} = \text{Arg} \min_{0 \leq u_i \leq \bar{u}} [L(u)v^{(k)} + f(u)]_i, \quad i = 1, \dots, d. \quad (15)$$

Le test d'arrêt est $|\rho^{(k)} - \rho^{(k+1)}| < \varepsilon$. La convergence de cet algorithme est démontrée en annexe.

3 Résultats Numériques

les constantes physiques

L'étude concerne le système de suspension d'un siège de poids-lourd. Les valeurs des paramètres utilisées sont $m = 60(\text{kg})$, $k_s = 3500(\text{N/m})$, $F_s = 40(\text{N})$, $\sigma = 0.5$.

Pour discrétiser l'espace d'état on a utilisé $x_{\max} = -x_{\min} = 0.1$ (m), $\dot{x}_{\max} = -\dot{x}_{\min} = 1$ (m/s), $n_x = n_{\dot{x}} = 30$. On obtient ainsi une grille de $30 \times 30 = 900$ points. Par la suite les unités physiques seront omises.

calcul du contrôle optimal

L'algorithme d'itérations sur les politiques donne des résultats très satisfaisants (il converge rapidement et est insensible au choix de la condition initiale). Le valeur du coût optimal est donnée plus loin. Le contrôle optimal $\hat{u}(x, \dot{x})$ est tracé sur la figure 2.

calcul du contrôle sous-optimal 1

Une possibilité consiste à chercher un contrôle $u(X)$ qui minimise le coût instantané (8). On obtient $\hat{u}(X) = (-k_s x - F_s \text{sgn}(\dot{x}))/\dot{x}$. Pour tenir compte de la contrainte $0 \leq u \leq \bar{u}$, on considère la loi de commande $u(X) = (\hat{u}(X) \vee 0) \wedge \bar{u}$ (cf. figure 4).

calcul du contrôle sous-optimal 2

Les résultats précédents nous ont amené à nous intéresser à une classe de contrôles paramétrés par $\theta \in \mathbb{R}^2$ de la forme

$$u_\theta(X) \triangleq (\theta_1 + \theta_2 x \text{sgn}(\dot{x}))^+, \quad \theta = (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2. \quad (16)$$

Les techniques ci-dessus peuvent aussi être utilisées pour calculer un contrôle sous-optimal u_θ tel que

$$J(u_\theta) = \min_{\theta \in \Theta} J(u_\theta),$$

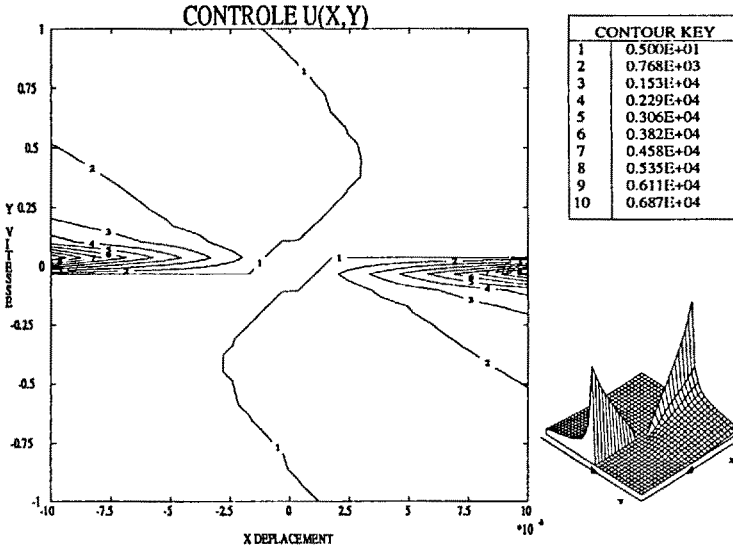


Figure 2: le contrôle optimal

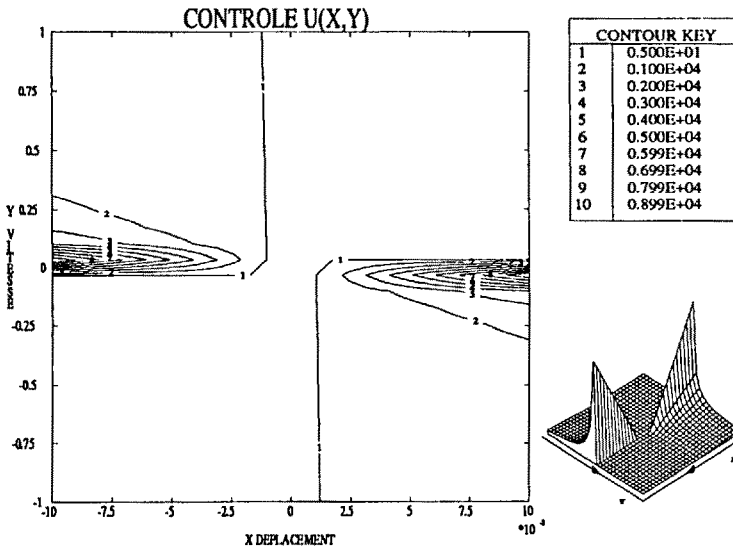


Figure 3: le contrôle sous-optimal 1

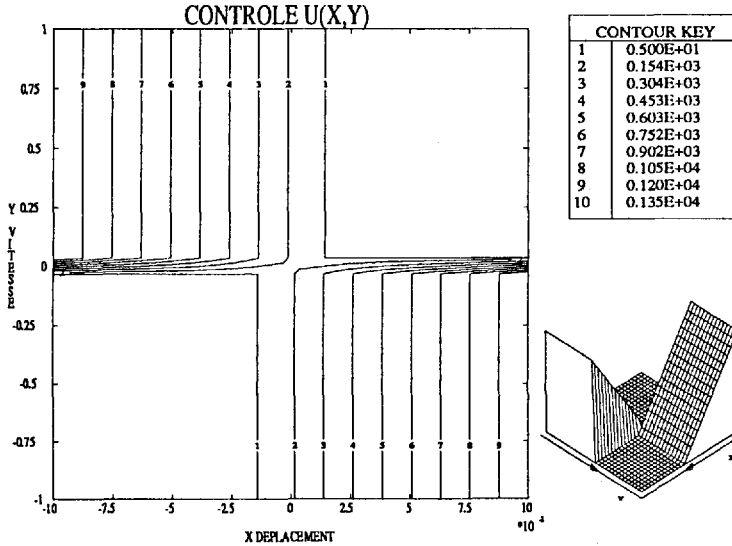


Figure 4: le contrôle sous-optimal 2

où $\Theta = \{\theta \in \mathbb{R}^2; u_\theta \in U\}$. On obtient

$$\hat{\theta}_1 = 137.2, \hat{\theta}_2 = -12130. \quad (17)$$

Le contrôle $u_\theta(x, \dot{x})$ est tracé sur la figure 3. Ce contrôle — plus simple à mettre en œuvre en pratique que le contrôle optimal — sera testé sur le modèle plus général (1,2,4) dans le paragraphe 4.

Un contrôle où intervient le signe du produit $x \dot{x}$ est considéré en [11].

comparaison des différents coûts

On compare maintenant les trois contrôles obtenus avec le cas du contrôle constant $u(X) \equiv u_0$. La constante optimale u_0 (i.e. celle qui minimise le coût) est 288. Les coûts obtenus dans les différents cas sont donnés dans le tableau suivant

type de contrôle	coût
contrôle constant	2.93
contrôle optimal	2.22
contrôle sous-optimal 1	2.68
contrôle sous-optimal 2	2.37

4 Application du Contrôle Sous-Optimal au Modèle Général

Sur le modèle général (1,2,4) on a testé les contrôles u_θ de la forme (16). L'excitation \ddot{x} n'est plus modélisée par un bruit blanc, mais par un bruit à bande limitée (de densité spectrale constante dans l'intervalle 1Hz–10Hz) plus proche des conditions réelles.

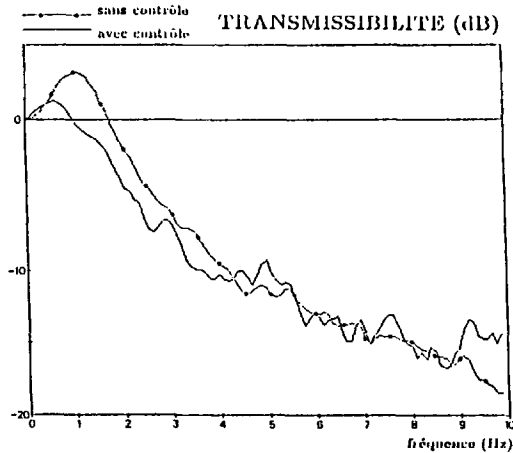


Figure 5: Comparaison du module (exprimé en dB) des transmissibilités obtenues avec un système sans contrôle (avec $c = 300$) et avec le contrôle $u(X) = (-700 - 80000 x \operatorname{sgn}(\dot{x}))^+$.

La minimisation ne vise plus le critère (7), mais un critère fréquentiel lié à l'écart entre, d'une part la transmissibilité $T(u, f)$ entre \bar{z} et \bar{u} et d'autre part une transmissibilité $\hat{T}(f)$ idéale au vu du confort dynamique. Le système étant non linéaire la transmissibilité est calculée par la formule $T(u, f) = S_{\bar{u}, \bar{z}}(f) / S_{\bar{z}}(f)$, où $S_{\bar{u}, \bar{z}}(f)$ est la densité inter-spectrale entre \bar{u} et \bar{z} , $S_{\bar{z}}(f)$ est la densité spectrale de \bar{z} .

La loi de commande en u_θ , convenablement pondérée (cf. (16)), permet tout à la fois d'abaisser la fréquence propre apparente, d'atténuer fortement l'amplitude de la résonance et d'assurer un filtrage efficace (-10dB) au delà de 3 Hz, ce que ne peut pas faire globalement un amortisseur constant (cf. figure 5).

remarque Des commandes du type linéaire $u(X) = \theta_1 + \theta_2 x + \theta_3 \dot{x}$ n'ont donné aucun résultat significatif sur ce problème.

Annexe

A L'Equation de Hamilton-Jacobi-Bellman Discrète

Dans ce paragraphe — indépendant des autres —, on démontre un résultat d'existence et d'unicité d'une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman discrète (i.e. pour un problème à espace d'état discret et fini) du type (12). On démontre en même temps la convergence de l'algorithme utilisé. On trouvera dans [5] une étude plus complète pour des processus à espaces d'état discrets. L'étude de la convergence des contrôles optimaux associés aux problèmes discrétisés sera abordée dans un travail ultérieur.

A.1 Le Cadre

On considère un processus de Markov \tilde{X}_t en temps continu et à espace d'état fini de cardinal d . Son générateur infinitésimal $L(u)$ dépend d'un vecteur $u \in \mathbb{R}^d$. $L(u)$ dépend de u de la manière suivante: la i ème ligne de $L(u)$ ne dépend que de u_i .

On suppose que \tilde{X}_t est récurrent positif, admet donc une mesure de probabilité invariante $\mu(u)$ et comme tous les états communiquent, cette mesure est unique [3]. Cette mesure de probabilité est donnée par l'équation² [3]

$$\begin{cases} L(u)^* \mu(u) = 0, \\ \mu(u)^* \underline{1} = 1. \end{cases} \quad (18)$$

On définit la fonction coût

$$J(u) \triangleq \mu(u)^* f(u), \quad (19)$$

La fonction coût (11) est bien de cette forme car

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} E \int_0^T f(u, \tilde{X}_t) dt = \sum_{i=1}^d f(u, X_i) \mu(u, X_i) = \mu(u)^* f(u).$$

Le but est de déterminer \hat{u} qui minimise le coût (19) sous la contrainte $u_i \geq 0$. On se donne donc

$$\begin{array}{ll} f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d & L : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times d} \\ u \rightarrow f(u) & u \rightarrow L(u) \end{array}$$

et on suppose que

(H1) $f_i(u)$ ne dépend que de u_i et $f_i(u)$ est une fonction quadratique de u_i

$$f_i(u) = |\alpha_i u_i + \beta_i|^2, \quad \alpha_i > 0, \quad i = 1, \dots, d.$$

(H2) A u fixé, $L(u)$ est le générateur infinitésimal d'un processus de Markov \tilde{X}_t en temps continu et à espace fini de cardinal d . On suppose que le processus de Markov \tilde{X}_t est récurrent positif. De plus la fonction $u \rightarrow L(u)$ est continue et à croissance au plus linéaire, i.e.

$$\exists c \text{ tel que } |L(u)| \leq c(1 + |u|), \quad \forall u \in \mathbb{R}^d.$$

A.2 L'Equation de Hamilton–Jacobi–Bellman

On considère l'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman discrète

$$\min_{0 \leq u'_i \leq u} [L(u') v + f(u')]_i = \rho, \quad i = 1, \dots, d, \quad (20)$$

(la i ème ligne du vecteur $L(u') v + f(u')$ ne dépend que de u'_i). Si $(v, \rho) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$ est une solution de (20) alors $(v + \underline{c}, \rho)$ est aussi solution de (20). On peut donc supposer que

$$v_1 = 0. \quad (21)$$

Lemme A.1 Soit (v, ρ) une solution de (20), alors

$$\rho = \min_{0 \leq u'_i \leq u} J(u'),$$

et \hat{u} tel que

$$\hat{u}_i = \text{Arg} \min_{0 \leq u'_i \leq u} [L(u') v + f(u')]_i, \quad i = 1, \dots, d,$$

est un contrôle optimal.

²pour toute constante $c \in \mathbb{R}$, \underline{c} désigne le vecteur de \mathbb{R}^d dont toutes les composantes sont c .

Preuve: D'après les hypothèses H1-H2, il existe \hat{u}_i qui réalise le minimum dans (20), donc

$$L(\hat{u})v + f(\hat{u}) = \rho \mathbf{1},$$

en prenant le produit scalaire de cette expression avec $\mu(\hat{u})$ on obtient d'après (18) et (19)

$$\mu(\hat{u})^* L(\hat{u})v + \mu(\hat{u})^* f(\hat{u}) = \rho \mu(\hat{u})^* \mathbf{1} \implies \mu(\hat{u})^* f(\hat{u}) = \rho,$$

c'est-à-dire $J(\hat{u}) = \rho$. Par ailleurs, pour un autre u , on a

$$L(u)v + f(u) \geq \rho \mathbf{1},$$

(l'inégalité est à comprendre terme à terme). En prenant le produit scalaire de cette expression avec $\mu(u)$ on obtient d'après (18) et (19)

$$J(u) \geq \rho.$$

D'où le résultat cherché.

Théorème A.2 (20,21) admet au plus une solution $(v, \rho) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

Preuve: Soient (v_i, ρ_i) ($i = 1, 2$) deux solutions de (20,21). On définit alors u_i par

$$L(u_i)v_i + f(u_i) = \rho_i \mathbf{1}, \quad i = 1, 2. \quad (22)$$

Et on suppose que $\rho_2 \geq \rho_1$. Par définition de (v_2, ρ_2) on a (termes à termes)

$$L(u_1)v_2 + f(u_1) \geq \rho_2 \mathbf{1}. \quad (23)$$

En faisant la différence termes à termes de (23) et (22), on obtient

$$L(u_1)(v_2 - v_1) \geq (\rho_2 - \rho_1) \mathbf{1} \geq \mathbf{0}.$$

En prenant le produit scalaire de cette dernière expression avec $\mu(u_1)$ on a $0 \geq \rho_2 - \rho_1 \geq 0$, d'où $\rho_2 = \rho_1$. Par ailleurs, posons $\chi \triangleq L(u_1)(v_2 - v_1)$. On a

$$\mathbf{0} = \mu(u_1)^* \chi = \sum_{i=1}^d \chi_i \mu_i(u_1),$$

ce qui implique $\chi = \mathbf{0}$ car $\chi_i \geq 0$ et $\mu_i(u_1) > 0$. D'où

$$L(u_1)(v_2 - v_1) = \mathbf{0}.$$

$\text{rang}(L(u)) = \text{rang}(L(u)^*) = d - 1$, car tous les états du processus de Markov \bar{X}_i communiquent. Donc $(v_2 - v_1) \in \text{Ker}(L(u_1))$ implique que $v_2 - v_1 = \mathbf{0}$ car $\text{Ker}(L(u_1))$ est égal à l'espace vectoriel des vecteurs "constants" \underline{c} . Ce qui montre l'unicité d'une solution de l'équation (20,21).

Théorème A.3 (20,21) admet une solution $(v, \rho) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$.

Preuve: On va montrer que l'algorithme d'itérations sur les politiques converge vers une solution. Cet algorithme est décrit par l'itération $u^n \rightarrow u^{n+1}$

1. calcul de (v^n, ρ^n) solution de

$$L(u^n)v^n + f(u^n) = \rho^n \mathbf{1}, \quad (24)$$

2. calcul de u^{n+1} en posant

$$\left[L(u^{n+1}) v^n + f(u^{n+1}) \right]_i = \min_{0 \leq u'_i \leq u} [L(u') v^n + f(u')]_i . \quad (25)$$

On montre d'abord que ρ^n est une suite décroissante.

$$\begin{aligned} (\rho^{n+1} - \rho^n) \mathbf{1} &= L(u^{n+1}) v^{n+1} + f(u^{n+1}) - L(u^n) v^n - f(u^n) , \\ &\leq L(u^{n+1})(v^{n+1} - v^n) . \end{aligned}$$

Donc, en utilisant les mêmes arguments que précédemment, si $\rho^{n+1} - \rho^n \geq 0$ alors $\rho^{n+1} = \rho^n$ et $v^{n+1} = v^n$. Dans ce cas l'algorithme a convergé vers la solution optimale. En conclusion, ρ^n est une suite décroissante bornée inférieurement par 0. Il existe donc $\rho \geq 0$ tel que

$$\rho^n \searrow \rho , \quad \text{quand } n \rightarrow \infty .$$

On définit $A(u) \in \mathbb{R}^{d-1 \times d}$ la matrice formée par $L(u)$ moins sa première ligne et \mathcal{E} l'ensemble des éléments v de \mathbb{R}^d tels que $v_1 = 0$. On considère l'application linéaire

$$\begin{aligned} A(u) : \mathcal{E} &\longrightarrow \mathbb{R}^{d-1} , \\ v &\longrightarrow A(u) v . \end{aligned}$$

Pour tout u , $A(u)$ est inversible et comme $u \rightarrow A(u)$ est continue, l'ensemble

$$\{ |A(u)^{-1}| ; u \in K \text{ compact} \}$$

est borné. La suite v^n est donc bornée car

$$|v^n| = |A(u^n)^{-1} w| , \quad w = \begin{pmatrix} \rho^n - f_2(u^n) \\ \vdots \\ \rho^n - f_d(u^n) \end{pmatrix} ,$$

et u^n est dans un compact de \mathbb{R}^d ($0 \leq u_i^n \leq \bar{u}$).

(ρ^n) converge et la suite (u^n, v^n) reste dans un borné, donc — à une sous-suite près — il existe $(u, v, \rho, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\rho})$ tel que

$$(u^n, v^n, \rho^n, u^{n+1}, v^{n+1}, \rho^{n+1}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (u, v, \rho, \bar{u}, \bar{v}, \bar{\rho}) ,$$

et $\rho = \bar{\rho}$. D'après (25),

$$L(u^{n+1}) v^n + f(u^{n+1}) \leq \rho^n \mathbf{1} ,$$

en passant à la limite on obtient

$$L(\bar{u}) v + f(\bar{u}) \leq \rho \mathbf{1} . \quad (26)$$

Par ailleurs, en passant à la limite dans (24) (pris à l'indice $n+1$), on obtient

$$L(\bar{u}) \bar{v} + f(\bar{u}) = \rho \mathbf{1} . \quad (27)$$

La différence entre (26) et (27) donne

$$L(\bar{u})(\bar{v} - v) \geq \mathbf{0} ,$$

en utilisant le même argument que dans la preuve du théorème A.2, on en déduit que $\bar{v} = v$.

On a donc $(u^{n+1}, v^n, v^{n+1}) \rightarrow (\bar{u}, v, v)$. Comme l'application $(u, v) \rightarrow L(u) v + f(u)$ est bicontinue, l'application

$$v \longrightarrow \min_{0 \leq u'_i \leq u} (L(u') v + f(u')) ,$$

est aussi continue. On peut donc prendre la limite dans (25), on obtient

$$[L(\bar{u})v + f(\bar{u})]_i = \min_{0 \leq u'_i \leq u} [L(u')v + f(u')]_i. \quad (28)$$

(27) avec $\bar{v} = v$ et (28) démontrent le théorème.

En particulier on vient donc de démontrer que

Corollaire A.4 *L'algorithme d'itérations sur les politiques (14,15) converge vers un contrôle optimal.*

Références

- [1] R. BOUC. Forced vibration of mechanical system with hysteresis. In *Proceedings of 4th conference ICNO*, Prague, 1967. (résumé).
- [2] R. BOUC. Modèle mathématique d'hystérésis. *Acustica*, **24**(3):16-25, 1971.
- [3] D.R. COX and H.D. MILLER. *The theory of Stochastic Processes*. Methuen & Co Ltd, London, 1968.
- [4] F. DELEBECQUE and J.-P. QUADRAT. Contribution of stochastic control singular perturbation averaging and team theories to an example of large-scale systems: management of hydropower production. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **AC-23**(2):209-221, April 1978.
- [5] B.T. DOSHI. Continuous time control of Markov processes on an arbitrary state space: average return criterion. *Stochastic Processes and their Applications*, **4**:55-77, 1976.
- [6] F. LE GLAND. *Estimation de paramètres dans les processus stochastiques, en observation incomplète — Applications à un problème de radio-astronomie*. Thèse de docteur-ingénieur, Université de Paris IX - Dauphine, 1981.
- [7] R.A. HOWARD. *Dynamic programming and Markov processes*. J. Wiley, New-York, 1960.
- [8] H.J. KUSHNER. *Probability methods for approximations in stochastic control and for elliptic equations*. Volume 129 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, New-York, 1977.
- [9] J.P. QUADRAT. *Sur l'identification et le contrôle de systèmes dynamiques stochastiques*. Thèse, Université de Paris IX - Dauphine, 1981.
- [10] M. ROBIN. Long-term average cost control problems for continuous time Markov processes: a survey. *Acta Applicandae Mathematicae*, **1**:281-299, 1983.
- [11] S. TAKAHASHI, T. KANEKO, and K. TAKAHASHI. A damping force control method which reduce energy to the vehicule body. *JSAE Review*, **8**(3):95-98, 1987.