



Mémoire M1 Mathématiques

Classification des Surfaces

Adrien Fontaine et Eléonore Gauci

28 mai 2012

sous la direction de Ludovic Rifford

Résumé

Notre mémoire a pour objectif de classifier les surfaces orientables lisses. Notre travail repose sur l'étude des points critiques d'une fonction de Morse définie sur une surface orientable. L'exemple classique que nous suivrons durant ce travail est celui du tore vu dans \mathbb{R}^3 .

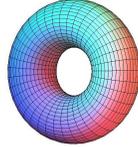


Table des matières

1	Théorie de Morse	3
1.1	Théorème de Sard	3
1.2	Théorème de Morse	4
2	Topologie et fonctions de Morse	6
2.1	Champ de vecteur et groupe à un paramètre de difféomorphisme	6
2.2	Valeurs régulières d'une fonction de Morse	7
2.3	Franchissement d'une valeur critique	8
3	Classification des surfaces	12
3.1	Preliminaires	12
3.2	Le théorème de classification	13

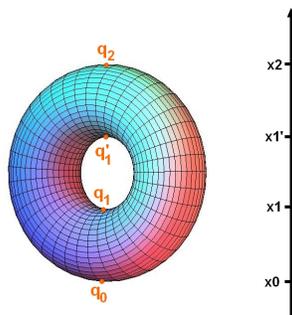
1 Théorie de Morse

Nous allons, pour commencer, introduire la théorie de Marston Morse (1892, 1977). La théorie de Morse a pour objectif de relier l'étude de la topologie de la sous variété à celle des points critiques de certaines fonctions de Morse. La donnée d'une fonction de Morse sur une surface compacte M permet de reconstituer la structure topologique globale, c'est à dire à homéomorphisme près, de l'espace M .

Définition 1. Soient U un ouvert de \mathbb{R}^n et $f : U \mapsto \mathbb{R}^m$ une application différentiable.

- Un point $x \in U$ est critique si $\text{rang}(Df(x)) < \min(n, m)$. L'ensemble des points critiques est le lieu critique, noté C_f .
- Un point critique de f est dit dégénéré lorsque le déterminant de la matrice hessienne en ce point est nul.
- Une valeur critique $y \in \mathbb{R}^m$ est l'image d'un point critique (i.e un y tel que $C_f \cap f^{-1}(y) \neq \emptyset$).
- Un point $y \in \mathbb{R}^m$ qui n'est pas une valeur critique est dite valeur régulière.

Définition 2. Une fonction de Morse $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^∞ dont tous les points critiques sont non dégénérés et les valeurs critiques correspondantes toutes distinctes.



Dans le cas du tore à un trou, on considère comme fonction de Morse, la fonction cote. Celle-ci a 4 points critiques q_0 d'indice 0, q_1 et q_1' d'indice 1 et q_2 d'indice 2 de valeurs critiques x_0 , x_1 , x_1' et x_2 respectivement. (se reporter à **2.3** pour la définition des indices)

Le but de cette partie est de démontrer l'existence d'une fonction de Morse sur M .

1.1 Théorème de Sard

Théorème 1 (Sard). Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$ et $k > \frac{n}{m} - 1$. On suppose que f est de classe C^k .

Alors l'ensemble des valeurs critiques de f est de mesure nulle.

Démonstration. On va démontrer le résultat pour le cas $n = m = 1$ (pour une démonstration dans le cas général, se reporter à l'article de Norton et Bates [5], [6]). Considérons tout d'abord la restriction de f à $[0, 1]$. Par hypothèse f' y est continue, donc elle y est uniformément continue par compacité de $[0, 1]$.

Donc, pour $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in [0, 1]$,

$$|x - y| < \eta \Rightarrow |f'(x) - f'(y)| < \varepsilon$$

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{N} < \eta$. Considérons le recouvrement, $([\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}])_{0 \leq k \leq N-1}$ de $[0, 1]$. Soit $x \in C_f \cap [0, 1]$. Il existe $0 \leq k \leq N - 1$ tel que $x \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$. Alors $|f'(y)| < \varepsilon$ pour

tout $y \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$. Donc, d'après l'inégalité des accroissements finis

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{N} \text{ pour tout } x_1, x_2 \in [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}]$$

Donc, si pour un certain $0 \leq k \leq N-1$, on a $C_f \cap [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}] \neq \emptyset$, alors $f(C_f \cap [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}])$ est inclus dans un intervalle de longueur au plus $\frac{\varepsilon}{N}$. Or,

$$f(C_f \cap [0, 1]) \subset \bigcup_{C_f \cap [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}] \neq \emptyset} f(C_f \cap [\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}])$$

Donc, $f(C_f \cap [0, 1])$ est de mesure au plus ε et ce pour tout $\varepsilon > 0$ donc $f(C_f \cap [0, 1])$ est de mesure nulle. Enfin,

$$f(C_f) \subset \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} f(C_f \cap [\frac{p}{N}, \frac{p+1}{N}])$$

qui est une union dénombrable d'ensembles de mesure nulle. Donc, $f(C_f)$ est de mesure nulle. \square

1.2 Théorème de Morse

La preuve de l'existence de fonctions de Morse sur M repose sur la notion de *formes fondamentales*. Nous avons donc d'abord besoin de quelques notations et définitions.

On définit $N \subset M \times \mathbb{R}^3$ par :

$$N = \{(q, v) \in M \times \mathbb{R}^3 / v \in T_q M^\perp\}$$

Ainsi défini, N est une variété différentiable de dimension 3 (la démonstration est facile et sans grand intérêt).

Soit $E : N \rightarrow \mathbb{R}^3$ la fonction lisse définie par $E(q, v) = q + v$.

Définition 3. Soit $e \in \mathbb{R}^3$. On dit que e est un point focal de M s'il existe q un point de M tel que $e = E(q, v)$ avec $(q, v) \in N$ et (q, v) est un point critique de E . On dira alors que e est un point focal de (M, q) de multiplicité la dimension du noyau de dE en (q, v) .

Le théorème de Sard a une première conséquence immédiate qui nous sera utile par la suite :

Corollaire 1. L'ensemble des points focaux de M est de mesure nulle.

Nous allons maintenant démontrer que si p n'est pas un point focal de M , alors la fonction L_p définie par :

$$f : M \rightarrow \mathbb{R} \\ q \mapsto \|\vec{pq}\|^2$$

n'a pas de point critique dégénéré.

Définition 4. Soit q un point de M et soit ϕ un paramétrage de M dans un voisinage de q . La première forme fondamentale de M en q , relativement au paramétrage ϕ , est la restriction du produit scalaire canonique à $T_q M$. Cette forme bilinéaire est définie par la matrice :

$$G(q) = [g_{i,j}] \text{ où } g_{i,j} = \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right\rangle$$

Soit ν un vecteur normal à M en q . La seconde forme fondamentale est la forme bilinéaire définie par la matrice :

$$H(q) = [h_{i,j}], \text{ où } h_{i,j} = \left\langle \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j}, \nu \right\rangle$$

Les valeurs propres de $H(q)$ sont les courbures principales de M en q . Leurs inverses, s'ils sont définis, sont les rayons de courbures principaux en q .

Remarque Quitte à changer de paramétrage en q , on peut supposer que $G(q)$ est la matrice identité.

Soit ν un vecteur normal à M en q et posons $\Delta = \{q + t\nu, t \in \mathbb{R}\}$.

Lemme 1. *Les points focaux de (M, q) sur Δ sont exactement les points,*

$$q + \nu r_i$$

où les r_i sont les rayons de courbure principaux de M en q .

Démonstration. On garde les notations précédentes, en notant $\nu(x, y)$ le vecteur normal unitaire défini dans un voisinage de q de manière continue et tel que $\nu(0, 0) = \nu$. Pour tout (m, v) proche de (q, ν) appartenant à N , on peut fixer $x, y, t \in \mathbb{R}^3$ tel que $(m, v) = (\phi(x, y), t\nu(x, y))$. Alors (x, y, t) définit un système de coordonnées locales sur N . Dans ce système, $E(m, v) = E(\phi(x, y), t\nu(x, y)) = \phi(x, y) + t\nu(x, y)$. Donc, la matrice Jacobienne de E en (x, y, t) dans la base $(\partial_x \phi(x, y), \partial_y \phi(x, y), \nu(x, y))$ est la matrice suivante, où les vecteurs sont évalués en (x, y) :

$$\begin{bmatrix} \langle \partial_x \phi, \partial_x \phi \rangle + t \langle \partial_x \nu, \partial_x \phi \rangle & \langle \partial_y \phi, \partial_x \phi \rangle + t \langle \partial_y \nu, \partial_x \phi \rangle & 0 \\ \langle \partial_x \phi, \partial_y \phi \rangle + t \langle \partial_x \nu, \partial_y \phi \rangle & \langle \partial_y \phi, \partial_y \phi \rangle + t \langle \partial_y \nu, \partial_y \phi \rangle & 0 \\ t \langle \partial_x \nu, \nu \rangle & t \langle \partial_y \nu, \nu \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

Car

$$\langle \partial_x \phi(x, y), \nu(x, y) \rangle = \langle \partial_y \phi(x, y), \nu(x, y) \rangle = 0$$

De plus, en dérivant cette relation selon x , on obtient :

$$\langle \partial_x \nu(x, y), \partial_x \phi(x, y) \rangle = - \langle \nu(x, y), \partial_x^2 \phi(x, y) \rangle$$

En procédant de même par rapport à y , et en considérant un paramétrage ϕ tel que G soit la matrice identité ($\langle \frac{\partial \phi}{\partial x_i}, \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \rangle = \delta_{i,j}$), on obtient :

$$\begin{bmatrix} 1 - t \langle \nu(x, y), \partial_x^2 \phi(x, y) \rangle & -t \langle \nu(x, y), \partial_{x,y}^2 \phi(x, y) \rangle & 0 \\ -t \langle \nu(x, y), \partial_{x,y}^2 \phi(x, y) \rangle & 1 - t \langle \nu(x, y), \partial_y^2 \phi(x, y) \rangle & 0 \\ t \langle \partial_x \nu(x, y), \nu(x, y) \rangle & t \langle \partial_y \nu(x, y), \nu(x, y) \rangle & 1 \end{bmatrix}$$

Donc, $(\phi(x, y), t\nu(x, y))$ est un point focal de (M, q) si et seulement si, le noyau de la matrice $Id - tH(x, y)$ n'est pas réduit à $\{0\}$. C'est à dire, si et seulement si, $\frac{1}{t}$ est valeur propre de $H(x, y)$. D'où le résultat par définition des rayons de courbures principaux. \square

Lemme 2. *Soit $q \in M$. Alors q est un point critique dégénéré de L_p si et seulement si, p est un point focal de (M, q) .*

Démonstration. Posons $f = L_p$ et $q = \phi(x, y)$. f est une fonction lisse sur M et $f(q) = \|\vec{p}\vec{q}\|^2$. Donc :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2 \langle \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y), \vec{p}\vec{q} \rangle \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \langle \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y), \vec{p}\vec{q} \rangle$$

Donc, q est un point critique de f si et seulement si $\vec{p}\vec{q}$ est normal à M en q . (*)

De plus, la Hessienne de f en un point critique q dans la base $(\partial_x \phi(x, y), \partial_y \phi(x, y))$ est :

$$\begin{bmatrix} 2(\langle \partial_x \phi, \partial_x \phi \rangle + \langle \partial_x^2 \phi, \vec{p}\vec{q} \rangle) & 2(\langle \partial_x \phi, \partial_y \phi \rangle + \langle \partial_{x,y}^2 \phi, \vec{p}\vec{q} \rangle) \\ 2(\langle \partial_y \phi, \partial_x \phi \rangle + \langle \partial_{y,x}^2 \phi, \vec{p}\vec{q} \rangle) & 2(\langle \partial_y \phi, \partial_y \phi \rangle + \langle \partial_y^2 \phi, \vec{p}\vec{q} \rangle) \end{bmatrix}$$

où $\partial_x \phi$ et $\partial_y \phi$ sont évalués en (x, y) .

En posant $p = \phi(x, y) + t\nu(x, y)$ (ce qu'on a le droit de faire d'après (*)), on obtient la matrice $2(Id - tH(x, y))$. D'où le résultat d'après le lemme précédent. \square

On déduit alors de ce lemme et du corollaire de Sard, le théorème suivant :

Théorème 2 (Morse). *Pour presque tout $p \in M$, la fonction L_p est une fonction lisse sans point critique dégénéré.*

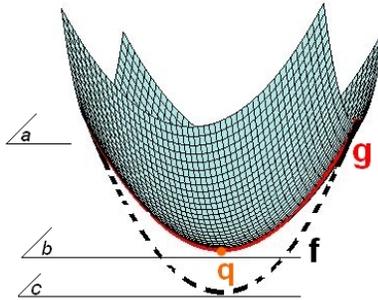
Pour obtenir une fonction de Morse, il reste à faire en sorte que les valeurs critiques soient toutes distinctes.

Tout d'abord, on peut remarquer que si f est une fonction dont tous les points critiques sont non dégénérés, alors les points critiques de f , et donc les valeurs critiques, sont isolés, comme conséquence du théorème d'inversion locale.

Enfin, on dispose du résultat suivant (que l'on admet) qui permet de rendre distinctes les valeurs critiques :

Proposition 1. *Soit f une fonction dont tous les points critiques sont non dégénérés et q un point critique de f . Alors on a :*

1. *Si q est d'indice 0 et U un voisinage de q limité par la courbe de niveau $f(x) = a$, alors pour tout $b < a$ il existe une fonction g dont tous les points critiques sont non dégénérés, ayant les mêmes points critiques que f avec même indice, coïncidant avec f hors de U et telle que $g(q) = b$.
(On a bien évidemment un résultat similaire pour un point critique d'indice 2)*
2. *Si q est d'indice 1 et U un voisinage de q limité par la courbe de niveau inférieur $f(x) = a$ et de niveau supérieur $f(x) = b$, alors pour tout $d \in]a, b[$ il existe une fonction g dont tous les points critiques sont non dégénérés, ayant les mêmes points critiques que f avec même indice, coïncidant avec f hors de U et telle que $g(q) = d$.*



2 Topologie et fonctions de Morse

Cette partie se consacre à l'étude locale du comportement d'une fonction de Morse sur une surface compacte.

2.1 Champ de vecteur et groupe à un paramètre de difféomorphisme

Définition 5. *Un groupe à un paramètre de difféomorphisme de classe C^r d'une variété M est une application*

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{R} \times M &\rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \phi_t(x) \end{aligned}$$

telle que :

1. pour tout t , l'application $\phi_t : M \rightarrow M$ est un C^r -difféomorphisme.
2. pour tous s et t , on a $\phi_{s+t} = \phi_t \circ \phi_s$, en particulier $\phi_0 = Id(M)$

Définition 6. Un champ de vecteur est une application X définie sur M telle que pour tout $x \in M$, $X(x) \in T_x M$

Remarque si ϕ est un groupe à un paramètre de difféomorphisme, alors l'application X qui à un point x de M associe le vecteur vitesse au point $t = 0$ du chemin différentiable $t \mapsto \phi_t(x)$, i.e

$$\forall x \in M, X(x) = \left[\frac{\partial}{\partial t} \phi_t(x) \right]_{t=0}$$

est un champ de vecteur. Dans ce cas, on dit que le champ $X(x)$ engendre le groupe à un paramètre ϕ . On va montrer que tout champ de vecteur engendre un groupe à un paramètre de difféomorphisme. C'est l'objet du théorème suivant.

Théorème 3. Soit M une surface compacte et X un champ de vecteurs tangents à M , de classe C^r . Il existe un unique groupe à un paramètre de difféomorphisme de M , de classe C^r , engendré par X .

Démonstration partielle. Pour tout $x_0 \in M$, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe un voisinage U de x_0 dans M tel que le problème de Cauchy suivant,

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} y(t) = X(y(t)) \\ y(0) = x \end{cases}$$

, noté $PC(x)$ ait une solution unique définie pour $|t| < \varepsilon$, et ce quel que soit $x \in U$. Par compacité de M , il existe un recouvrement fini de M par des ouverts U définies par l'argument précédent. Soit η le plus petit des ε correspondants. On a alors une application

$$\begin{aligned} \phi :]-\eta, \eta[\times M &\rightarrow M \\ (t, x) &\mapsto \phi_t(x) \end{aligned}$$

définie comme la valeur en t de la solution du problème de Cauchy définie ci-dessus.

On admet le fait que ϕ ainsi définie est de classe C^r .

Si $|t|, |s|$ et $|t+s| < \eta$, alors si on fixe s , $\phi_{t+s}(x)$ et $\phi_t(\phi_s(x))$ sont deux solutions du problème de Cauchy $PC(\phi_s(x))$. Par unicité, ces deux solutions sont égales, i.e $\phi_{t+s}(x) = \phi_t(\phi_s(x))$. De plus, comme $\phi_0(x)$, on a $\phi_t \circ \phi_{-t} = \phi_{-t} \circ \phi_t = Id_M$ et donc ϕ_t est un difféomorphisme. on étend alors notre groupe à un paramètre à \mathbb{R} en composant n fois ϕ_t . \square

2.2 Valeurs régulières d'une fonction de Morse

Soit $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de Morse et $a < b$ deux valeurs régulières. On note :

$$V(a) = f^{-1}(a) = \{x \in M / f(x) = a\}$$

$$M(a) = f^{-1}(]-\infty, a]) = \{x \in M / f(x) \leq a\}$$

$$W(a, b) = M(b) \setminus Int(M(a)) = f^{-1}([a, b]) = \{x \in M / a \leq f(x) \leq b\}$$

Proposition 2. Si $a < b$ sont deux valeurs régulières telles que la fonction de Morse f n'ait pas de valeur critique comprise entre a et b , alors on a :

1. $V(a)$ est difféomorphe à $V(b)$
2. $M(a)$ est difféomorphe à $M(b)$

3. $W(a, b)$ est difféomorphe à $V(a) \times [a, b]$

Démonstration. Les points critiques de f étant isolés, il existe une fonction $\alpha : M \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, nulle au voisinage des points critiques de f et égale à 1 hors d'un voisinage de ces points critiques.

Soit x un point de M . On lui associe vecteur tangent $X(x) \in T_x M$ tel que $X(x)$ est orthogonal à la ligne de niveau $f(x) = cte$ et tel que $\langle \nabla f(x), X(x) \rangle > 0$. On définit ainsi une application X sur M qu'on peut supposer de norme 1 (quitte à diviser par sa norme) et de classe C^∞ . Par exemple, pour donner une formule explicite de X , on peut prendre :

$$X(x) = \frac{Proj_{T_x M}(\nabla f(x))}{\|Proj_{T_x M}(\nabla f(x))\|}$$

où $Proj_{T_x M}$ désigne la projection sur l'espace tangent à M en x .

Posons alors :

$$Y(x) = \begin{cases} \frac{\alpha(x)}{\langle \nabla f(x), X(x) \rangle} X(x) & \text{si } x \text{ n'est pas critique} \\ 0 & \text{si } x \text{ est critique} \end{cases}$$

Le champ de vecteur $Y(x)$ est différentiable et $\langle \nabla f(x), Y(x) \rangle = \alpha(x)$. Comme il n'y a pas de point critique dans le compact $W(a, b)$, on peut supposer que α vaut 1 sur cette partie. Soit ϕ_t le groupe à un paramètre de difféomorphismes de M associé au champ $Y(x)$. On a alors :

$$\frac{d}{dt}(f(\phi_t(x))) = \langle \nabla f(\phi_t(x)), Y(\phi_t(x)) \rangle = \alpha(\phi_t(x))$$

La fonction $t \mapsto f(\phi_t(x))$ est linéaire de dérivée 1 pourvu que $\alpha(\phi_t(x)) = 1$, c'est le cas si $f(\phi_t(x)) \in [a, b]$. En particulier, le difféomorphisme ϕ_{b-a} envoie $M(a)$ sur $M(b)$ et $V(a)$ sur $V(b)$. Enfin, l'application $\psi : V(a) \times [a, b] \rightarrow W(a, b)$ définie par $\psi(x, t) = \phi_{t-a}(x)$ est un difféomorphisme dont l'inverse est $\psi^{-1}(y) = (\phi_{a-f(y)}(y), f(y))$. \square

Ainsi, lorsque a varie continûment dans l'ensemble des valeurs régulières de f , les variétés $M(a)$ et $V(a)$ sont invariantes à difféomorphisme près.

2.3 Franchissement d'une valeur critique

Définition 7. On appelle indice d'un point critique x de f la dimension du plus grand sous-espace de \mathbb{R}^n sur laquelle la matrice Hessienne est définie négative.

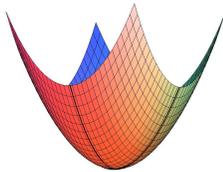


FIGURE 1 – indice 0

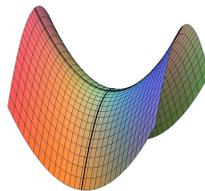


FIGURE 2 – indice 1

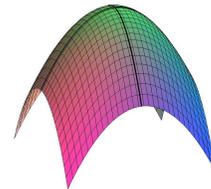


FIGURE 3 – indice 2

Le lemme suivant va nous permettre de faire une étude locale autour des valeurs critiques :

Lemme 3. (Morse, 1932) Soit q un point critique non dégénéré de $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, de classe C^r ($r \geq 3$). Il existe un paramétrage ϕ par des coordonnées locales (X, Y) d'un voisinage $\phi(U)$ de q tel que :

$$f(\phi(X, Y)) = f(q) + g_i(X, Y) \text{ avec } \begin{cases} g_0(X, Y) = X^2 + Y^2 \text{ si l'indice est } 0 \\ g_1(X, Y) = X^2 - Y^2 \text{ si l'indice est } 1 \\ g_2(X, Y) = -X^2 - Y^2 \text{ si l'indice est } 2 \end{cases}$$

Définition 8. On appellera voisinage canonique de q la donnée d'une paramétrisation $\phi : U(\epsilon) \rightarrow M$ centrée en q , et telle que $\forall (X, Y) \in U(\epsilon)$, $f(\phi(X, Y)) = f(q) + g_i(X, Y)$

Démonstration. On peut admettre sans perte de généralité que $q = (0, 0)$. Soit ψ un paramétrage de M centré en $(0, 0)$ par des coordonnées locales (x, y) et soit $g(x, y) = f(\psi(x, y))$. Posons $1/2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(0, 0) = r$, $1/2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(0, 0) = s$, $1/2 \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(0, 0) = t$

Le point $(0, 0)$ est non dégénéré si $rt - s^2 \neq 0$. La formule de Taylor avec reste intégral s'écrit :

$$g(h, k) - g(0) = \underbrace{h^2 \int_0^1 (1-u) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(hu, ku) \right) du}_{R(h,k)} + \underbrace{2hk \int_0^1 (1-u) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(hu, ku) \right) du}_{S(h,k)} + \underbrace{k^2 \int_0^1 (1-u) \left(\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(hu, ku) \right) du}_{T(h,k)} \quad (1)$$

1er cas : $rt - s^2 > 0$, r et $t > 0$. Au voisinage de $(0, 0)$, on a R et $T > 0$, et :

$$g(h, k) - g(0) = R(h, k) \left(h + k \frac{S(h, k)}{R(h, k)} \right)^2 + k^2 \frac{R(h, k)T(h, k) - S(h, k)^2}{R(h, k)}.$$

Posons :

$$\begin{cases} X = \sqrt{R}(h + k \frac{S}{R}) \\ Y = k \sqrt{\frac{RT - S^2}{R}} \end{cases}$$

On a $g(h, k) - g(0) = X^2 + Y^2$; l'indice du point critique est 0. De plus,

$$\frac{\partial X}{\partial x} = \sqrt{r}, \quad \frac{\partial Y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} = \sqrt{\frac{rt - s^2}{r}}$$

En $(0, 0)$, la matrice jacobienne de (X, Y) en (x, y) a un déterminant $\sqrt{rt - s^2} \neq 0$. Donc le couple (X, Y) est bien un système de coordonnées locales.

2e cas : $rt - s^2 > 0$, r et $t < 0$. En considérant $-g$ on se ramène au 1er cas. D'où $g(h, k) - g(0, 0) = -X^2 - Y^2$; l'indice du point critique est 2.

3e cas : $rt - s^2 < 0$. Si r ou t n'est pas nul, on raisonne comme au premier cas. Sinon on s'y ramène par un changement linéaire de coordonnées. Et alors $g(h, k) - g(0, 0) = X^2 - Y^2$; l'indice du point critique est 1. \square

Si a et b sont des valeurs régulières de f entre lesquelles il n'y a qu'une seule valeur critique $f(q)$ qui correspond à un point critique q , alors $M(a)$ et $M(b)$ ne sont plus homéomorphes comme dans la section précédente, et $V(a)$ et $V(b)$ vont être différents.

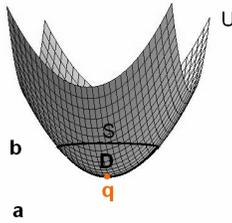
D'après 2.2, on peut supposer a et b aussi voisins de $f(q)$ qu'on veut. On prendra donc $a = f(q) - \epsilon$, $b = f(q) + \epsilon$ avec $\epsilon > 0$ aussi petit qu'on veut.

Franchissement d'un point critique d'indice 0 ou 2

Proposition 3. *Si q est un point critique d'indice 0, alors*

1. $M(a)$ est homéomorphe à $M(b) - D$ où D est un disque (de dim 2)
2. $V(a)$ à $V(b) - S$, S bord du disque D .

Démonstration. Soit U un voisinage canonique de q limité par $f(q) + \epsilon$; l'intersection $D = M(b) \cap U$ est homéomorphe au disque $X^2 + Y^2 \leq \epsilon$ (lemme de Morse), et sa frontière $S = V(b) \cap U$ au cercle $X^2 + Y^2 = \epsilon$. Mais $V(a) \cap U = \emptyset$ et $M(a) \cap U = \emptyset$. On raisonne alors comme pour les valeurs régulières avec une fonction nulle dans un voisinage du disque D et on obtient notre résultat.



□

Proposition 4. *Si q est un point critique d'indice 2, alors*

1. $M(b)$ est homéomorphe à $M(a) - D$ où D est un disque (de dim 2)
2. $V(b)$ à $V(a) - S$, S bord du disque D .

Démonstration. Il suffit d'appliquer le 1er cas à $-f$.

□

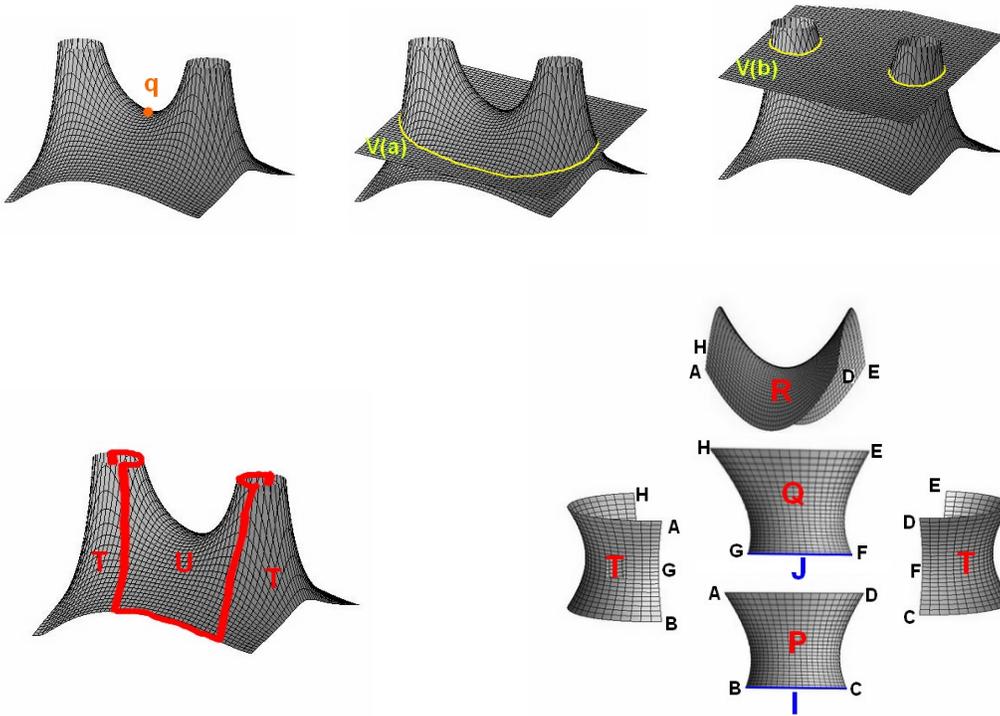
Franchissement d'un point critique d'indice 1

Proposition 5. *Soit f une fonction de Morse, a et b deux valeurs régulières de f entre lesquelles il n'y a qu'une seule valeur critique $f(q)$ d'indice 1, alors*

1. $M(b)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en collant à $M(a)$ un rectangle.
2. la transformation de $V(a)$ en $V(b)$ dépend de la différence du nombre de composantes connexes entre $V(a)$ et $V(b)$. Si $V(a)$ a une composante connexe alors $V(b)$ aura deux composantes connexes et dans ce cas on dira que le point critique q sépare les composantes connexes; sinon si $V(a)$ a deux composantes connexes, $V(b)$ n'en aura qu'une et on dira que le point critique relie les composantes connexes.

Démonstration. Soit $U(\epsilon)$ un voisinage canonique de q ie il existe une paramétrisation $\phi : U(\epsilon) \rightarrow U = \phi(U(\epsilon))$ avec U voisinage de q tel que $f(\phi(X, Y)) = f(q) + X^2 - Y^2$ (lemme de Morse). On pose $T = \overline{W(a, b) - U}$. Soit $V(b)$ a une composante connexe de plus que $V(a)$, soit une de moins, soit le même nombre. Le dernier cas n'est pas possible dans le cadre de notre mémoire car sinon la surface ne serait pas orientable. Quitte à prendre $-f$, on se place dans le premier cas.

Intéressons-nous d'abord à $U = \phi(U(\epsilon))$. On découpe alors $U(\epsilon)$ en trois parties : $P' = \phi^{-1}(P)$, $Q' = \phi^{-1}(Q)$ et $R' = \phi^{-1}(R)$ (voir le découpage sur la figure page suivante). Chacune est homéomorphe à un rectangle.



On pose alors $K = T \cap V(a) = \overline{W(a, b) - U} \cap V(a) = \overline{(W(a, b) - U) \cap V(a)} = \overline{V(a) - U \cap V(a)} = \overline{V(a) - I \cup J}$ où $I = [B, C]$ et $J = [G, F]$ (voir figure). Montrons que T est homéomorphe à $K \times [a, b]$.

On considère à nouveau la fonction α définie en **2.2**. On veut construire un homéomorphisme $\psi : K \times [a, b] \rightarrow M$ sur T de la forme $\psi(x, t) = \phi_{t-a}(x)$. Or c'est un homéomorphisme sur T si les courbes intégrales de $X(x)$ pour $x \in T$ restent dans T ou encore si les courbes intégrales de $X(x)$ pour $x \in U$ restent dans U . Il nous suffit donc de construire le champ $X(x)$. Soient $U' = \phi(U(2\epsilon))$ un voisinage canonique de q contenant U et $Z(x)$ le champ sur U' tel que $Z(x) = D\phi(X(x), -Y(x))$. Soit

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R} = \begin{cases} 1 & \text{dans } U \\ 0 & \text{hors de } \phi(U(3/2\epsilon)) \end{cases}$ et X_0 un champ sur M transversal aux lignes de niveau de f , défini partout sauf aux points critiques. On pose alors :

$$X(x) = \begin{cases} \beta(x)Z(x) + (1 - \beta(x))X_0(x) & \text{si } x \in U' \\ X_0(x) & \text{sinon} \end{cases}$$

qui a bien les propriétés voulues.

Il suffit à présent de recoller les différents espaces obtenus. On a P et Q homéomorphes à $I \times [a, b]$ et $J \times [a, b]$ respectivement. Notons ϕ_I^{-1} et ϕ_J^{-1} les homéomorphismes correspondant. ϕ_I^{-1} et ϕ_J^{-1} se recollent à l'homéomorphisme ψ^{-1} pour donner un homéomorphisme de $T \cup U \cup Q$ sur $V(a) \times [a, b]$. En recollant $V(a) \times [a, b]$ à $M(a)$ le long de $V(a)$, on obtient $M(b) - \text{int}(R) = M(a) \cup T \cup P \cup Q$. Cet espace est homéomorphe à $M(a)$ (cf **2.2**). En recollant R et $M(a)$ suivant $[A, D]$ et $[E, H]$, on a bien que $M(b)$ est homéomorphe à $R \times M(a)$.

On s'est placé dans le cas où $V(b)$ a une composante connexe de plus que $V(a)$ ie $[A, H]$ et $[D, E]$ ne sont pas dans la même composante connexe de $V(b)$. Notons ces composantes

S' et S'' et S celle de $V(a)$. $\overline{S - (I \cup J)}$ est la réunion de 2 segments $[B, G]$ et $[C, F]$ lorsqu'on recolle à $[B, G]$ un autre segment $[B, G]$ on obtient un cercle S' de même en recollant un autre segment $[C, F]$ à $[C, F]$, on obtient un cercle S'' . L'espace $V(b)$ est donc obtenu à partir de $V(a)$ en remplaçant S par $S' \cup S''$. \square

3 Classification des surfaces

3.1 Préliminaires

On notera T_n le tore à n trous. Plus précisément, T_0 désigne la sphère, T_1 le tore, et on obtient T_n , $n \geq 2$ en enlevant un disque au tore et à T_{n-1} , puis en recollant ces derniers le long du bord de ces disques. Ceci fournit une structure topologique de T_n . Ces espaces peuvent également être munis d'une structure différentiable en utilisant les paramétrages usuels de la sphère, du tore, et en procédant par récurrence en utilisant un lemme de recollement.

On va démontrer que toute variété différentiable de dimension 2, compacte, connexe et orientable est difféomorphe à l'une des variétés définies précédemment.

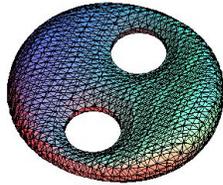


FIGURE 4 – T2

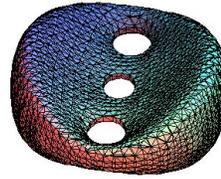


FIGURE 5 – T3

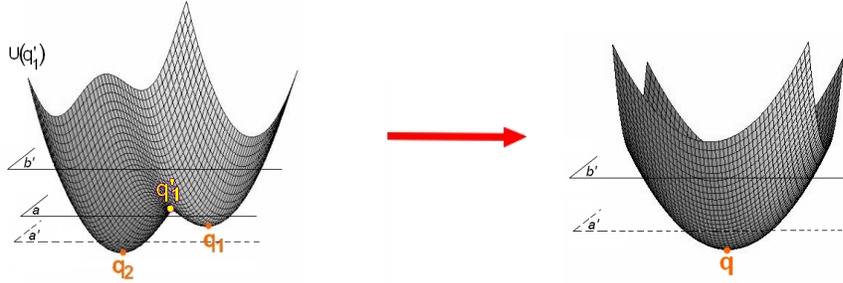
Commençons tout d'abord par simplifier la fonction de Morse

Proposition 6. *Il existe une fonction de Morse g ayant mêmes points critiques que f , avec même indice, et deux niveaux $c < d$ tels que :*

1. (a) $M(c) = g^{-1}(]-\infty, c])$ contient $n(0)$ points critiques d'indice 0 et $n(0) - 1$ points critiques d'indice 1
 (b) $M(c)$ homéomorphe à un disque.
2. (a) $M'(d) = g^{-1}([d, +\infty[)$ contient $n(2)$ points critiques d'indice 2 et $n(2) - 1$ points critiques d'indice 1
 (b) $M'(d)$ homéomorphe à un disque.
3. $W(c, d) = g^{-1}([c, d])$ contient $n(1) - n(0) - n(2) + 2$ points critiques d'indice 1.

Démonstration. On choisit des voisinages canoniques disjoints $U(q'_j)$ ($1 \leq j \leq n(1)$) des points critiques q'_j d'indice 1, de niveau supérieur b_j et inférieur a_j . Ce choix est faisable compte tenu de la proposition 1. Pour alléger les notations, nous noterons dans la suite

a pour a_1 et b pour b_1 . Pour démontrer la première assertion, il suffit de montrer qu'on peut, en modifiant uniquement f au dessous du niveau b , trouver une fonction g et un niveau c qui convient.



Si $n(0) = 1$, il suffit de prendre $f = g$ et $c = a$ pour prouver le résultat. Supposons donc $n(0) \geq 2$ et q_1 le point critique d'indice 0 le plus élevé (voir le schéma de gauche sur la figure au-dessus). $M(b)$ est alors le complémentaire dans M de $n(2)$ disques disjoints. M étant connexe, $M(b)$ l'est nécessairement aussi. Or $M(a)$ est lui aussi la réunion de disques disjoints. Donc il existe un point critique q'_1 d'indice 1 et un point critique q_2 d'indice 0 tels que le voisinage $U(q'_1)$ relie les voisinages $U(q_1)$ et $U(q_2)$. D'après la proposition 1, quitte à changer f à l'intérieur de $U(q'_1)$, on peut supposer que $f(q'_1)$ est la plus faible des valeurs critiques d'indice 1. Alors $f^{-1}(]f(q_1), f(q'_1)[)$ ne contient pas de point critique et $U(q_1) \cap V(a)$ contient une seule composante connexe de $U(q'_1) \cap V(a)$.

Soient maintenant les niveaux a' et b' tels que $f(q_1)$ et $f(q'_1)$ soient les deux seules valeurs critiques de $]a', b'[$. D'après la proposition 5 l'espace $M(a)$ est homéomorphe à l'union disjointe de $M(a')$ et d'un disque D . De même l'espace $M(b')$ est homéomorphe à l'espace obtenu en recollant $M(a')$ et D à l'aide d'un rectangle R , en identifiant un des côtés du rectangle à un segment I contenu dans $V(a)$, et le côté opposé à un segment J contenu dans la frontière de D . Alors $M(a')$ et $M(b')$ sont homéomorphes.

L'espace $M(b')$ est donc la réunion disjointe de $n(0) - 1$ composantes connexes difféomorphes à des disques. L'une de ces composantes contient q_1, q'_1 et q_2 .

Si $n(0) = 2$, la proposition est démontrée.

Sinon, on peut alors modifier f dans les $n(0) - 2$ autres composantes de $M(b')$ de telle sorte que les valeurs critiques des points correspondants soient plus grandes que $f(q'_1)$. En effet, il suffit d'appliquer la proposition 1 avec les voisinages canoniques de niveaux supérieurs b' . On réitère alors le procédé de réduction en déterminant q_2 le point critique d'indice 0 de valeur la plus élevée. $n(0)$ étant fini, le processus se termine et le dernier niveau noté b' correspond au niveau c recherché et la fonction g est la fonction f en prenant en compte toutes les modifications effectuées.

Pour démontrer la deuxième assertion du lemme, il suffit alors d'appliquer ce procédé en permutant les rôles des indices 0 et 2, en considérant $-g$ et sans rien modifier au-dessous du niveau c . \square

3.2 Le théorème de classification

Nous rappelons que M désigne une variété différentiable lisse, de dimension 2, compacte, connexe et orientable. D'après la proposition 6, il existe une fonction de Morse f sur M admettant un point critique d'indice 0, un point critique d'indice 2 et m points critiques d'indice 1.

On a alors le résultat suivant qui donne une classification des surface à homéomorphisme près.

Théorème 4. Soit M une surface lisse compacte, connexe et orientable et f une fonction de Morse sur M ayant un point critique d'indice 0, un point critique d'indice 1 et m points critiques d'indice 1. Alors m est pair, et M est homéomorphe à T_n où $m = 2n$.

Démonstration. Soit donc M et f vérifiant les propriétés du théorème. Montrons tout d'abord que le nombre de points critiques d'indice 1 est pair.

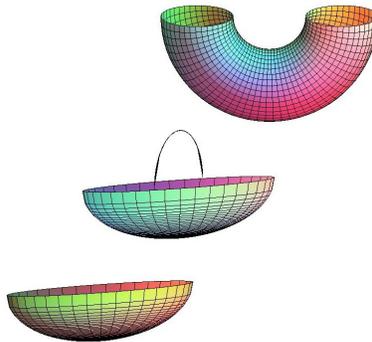
Soit $a < b$ deux niveaux séparant les points critiques d'indice 0, 1 et 2. Comme f n'admet qu'un point critique d'indice 0, $V(a)$ n'a qu'une seule composante connexe et il en va de même pour $V(b)$. Or, on a vu dans les parties précédentes, que le franchissement d'un point critique d'indice 1 change la parité du nombre de composantes connexes. Il y a donc entre a et b un nombre pair de points critiques d'indice 1. Donc, m est pair. Posons $m = 2n$.

Alors pour la même raison, il y a autant de points critiques d'indice 1 séparant les composantes connexes que de points critiques d'indice 1 reliant les composantes connexes. Ainsi, quitte à changer de fonction de Morse (proposition 1), on peut supposer que les points critiques d'indice 1 sont rangés par paires, le plus haut séparant les composantes connexes et le plus bas les reliant.

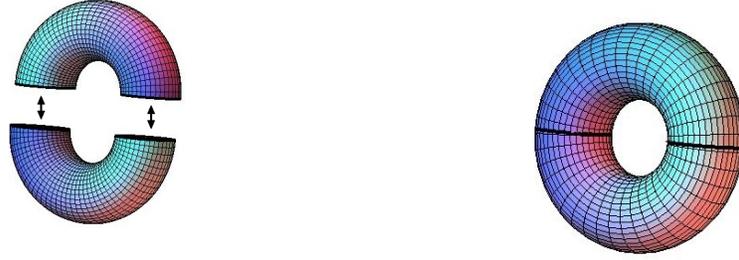
Montrons maintenant le résultat par récurrence sur n .

Pour $n = 0$, le résultat est donné par le théorème de Reeb. Supposons $n = 1$ et montrons que M est homéomorphe au tore.

Soit d un niveau situé entre les deux points critiques d'indice 1. Si a est un autre niveau de f situé entre le point critique d'indice 0 et le point critique d'indice 1. Alors, d'après la proposition 4, $M(d)$ est homéomorphe à l'espace obtenu en collant à $M(a)$ un rectangle selon deux segments de $V(a)$. Or, d'après la proposition 2, $M(a)$ est lui même homéomorphe à un disque. Donc, $M(d)$ est homéomorphe au recollement d'un rectangle sur un disque selon deux arcs de ce dernier. Ainsi, $M(d)$ est homéomorphe à la moitié d'un tore, comme illustré sur la figure ci-dessous.



De même, $f^{-1}([d, +\infty[)$ est homéomorphe à une autre moitié de tore. Donc, M est homéomorphe au recollement de ces derniers selon des cercles, en respectant l'orientation car M a été supposée orientable. Ainsi, M est homéomorphe à un tore.



Supposons maintenant le résultat vrai au rang $r \geq 1$ et montrons que si $n = r + 1$ alors M est homéomorphe à T_{r+1} .

Soit d un niveau supérieur à la deuxième valeur critique d'indice 1 et inférieur à la troisième. Alors d'après le cas $n = 1$ et la proposition 4, $M(d)$ est homéomorphe à un tore privé d'un disque. De même, par hypothèse de récurrence, $f^{-1}([d, +\infty[)$ est homéomorphe à M_r privé d'un disque. Donc, M est homéomorphe au recollement de ces deux parties selon un cercle, ce qui donne T_{r+1} .

Ainsi, d'après le principe de récurrence, la démonstration du théorème est achevée. \square

Remerciements

Notre travail terminé, nous tenons à remercier Ludovic Rifford sans qui ce mémoire n'aurait pas pu voir le jour. Ce fut un grand plaisir pour nous de pouvoir travailler sous sa direction. Ses précieux conseils et son soutien nous ont permis de mener à bien notre travail.

Références

- [1] A.Gramain, Topologie des surfaces, *Presses universitaires de France*, 1971.
- [2] J.Lafontaine, Introduction aux variétés différentielles, *EDP Sciences* 1996.
- [3] J.Milnor, Morse theory, *Annals of Mathematic Studies*, 1963.
- [4] A.Avez, Calcul différentiel, *Broché*, 1997.
- [5] A.Norton, A critical set with nonnul image has large hausdorff dimension, *Transactions of the American mathematical society* 296 (1986).
- [6] S-M.Bates, Toward a precise smoothness hypothesis in Sard's theorem, *Proceedings of the American mathematical society*, 117 (1993).